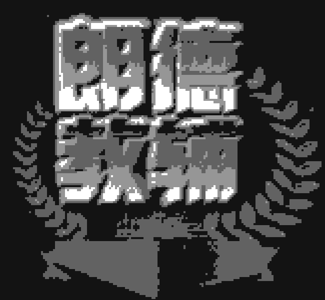


我一定要赚分



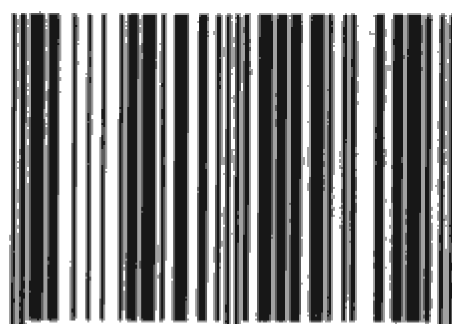
高中数学

黄河出版社

我一定要赚分

解题方法与技巧探秘

妈妈的双眼在看着我 为了母亲的微笑 我一定要赚分



ISBN 978-7-80152-961-9

我一定要赚分系列丛书

高中数学
解题方法与技巧探秘

丛书主编　戚德良　王金战

本册主编　王　飞

副 主 编　梁新华　程龙珍　孔令旺
边玉华

黄 河 出 版 社

责任编辑 葛春亮 张清训　　封面设计 贾正海

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题方法与技巧探秘/王飞主编.—济南：黄河出版社，2008.6
（我一定要赚分系列丛书/戚德良，王金战主编）
ISBN 978-7-80152-961-9

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第078931号

丛 书 名　我一定要赚分系列丛书
丛 主 编　戚德良　王金战
书　　名　高中数学解题方法与技巧探秘
主　　编　王　飞
副 主 编　梁新华　程龙珍　孔令旺　边玉华
发　　行　黄河出版社发行部
（济南市英雄山路21号　250002）
印　　刷　济宁市火炬书刊印务中心
规　　格　880毫米×1230毫米　32开本
14.25印张　547千字
版　　次　2008年10月第1版
印　　次　2008年10月第1次印刷
印　　数　1-3000册
书　　号　ISBN 978-7-80152-961-9/G·222
定　　价　108.00元(全三册)

致读者

如欲精通解题术，首先需要进行解题训练，包括解题思想与方法技巧的训练、得分步骤的训练。对于解题训练，必须下定决心，视其为日常生活中的一个重要部分。做到这点必须有坚韧不拔的意志。饮食质量、睡眠时间、社交生活乃至思维活动无不影响着你对解题的信念。

解题要的是激情。头脑中始终浮现的就是，当你达到目标时所能得到的奖赏，以此激励自己。充满激情就能赢得尊敬、争得公认，就能树立信心和胜利感，就能显得神采奕奕，就能感到自我满足。

解题训练的重要意义在于，它赋予人们一种临难不惧、泰然处之的本领。这个本领促使您在关键时刻采取迅捷而有效的行动：能在一刹那间作出抉择，反应正确。这个关键时刻就是高考战场的两个小时。

在掌握了解题的技巧之后，您就会觉得，解题这项活动变得更令人兴奋、更令人心满意足了。你就能充分利用自己的力量征服自身思维的薄弱。

胜利的滋味最令人陶醉。你的解法如果达到了炉火纯青的地步，那你就可以经常沉浸在胜利的喜悦之中。从事解题训练，要养成积极动脑的习惯，广做联想，让您的想像之翼时刻张开着、振动着。这一习性在日常生活中将处处给你带来益处，使你左右逢源，如有神助。

成功没有捷径，好题要做六遍。要小聪明抄近路，必定走进死胡同；投机取巧只能适得其反。

解题的训练要按计划进行。为达到掌握全部解题技术的长期目标，首先应制订短期目标。这些短期目标会时刻激励着你，帮助你克服懒散、灰心和惰性。

掌握解题术要有激情，要全力以赴、信心百倍。在考场上，这种精神会渗透于你解题的全过程，使你赢得胜利。

赚分赚天下，赢分赢天下。这正是《我一定要赚分》这套丛书命名的由来。

我们期待着你的成功！金榜题名时，是你和父母最激动也是我们最激动的时刻。现在，我们作者群已经闻到了您的谢师宴上庆功酒的醇香，祝酒词的激昂。虽然我们远隔百里、千里，但心绪是那样的一样。

再一次预祝您的成功，考场传出欢呼声！

戚德良

目　录

九种常用的金牌数学解题思想

十一类神奇的高考热点专题的方法技巧

九种常用的金牌数学解题思想

第一章 函数思想奠定百世基业

函数是高中数学的重要内容之一，其理论和应用涉及各个方面，是贯穿整个高中数学的一条主线. 函数思想，系最重要的、最基本的数学思想方法之一，可见它在整个高中数学中的地位和作用. 我们这里所说的函数思想是指运用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题. 为节省篇幅，本章仅侧重于对那些本身无明显的函数关系的问题，通过类比、联想、转化，合理地引进函数，并通过对所引进的函数的研究，使问题得以解决.

一、利用函数的定义域和值域

例 1 (2008 年重庆高考理 · T4)已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$的最大值为 M，最小值为 m，则$\frac{m}{M}$的值为 ( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【规范解析】 由题意函数的定义域为$\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}$，

$\because y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}\geqslant 0$.

$\therefore y^2=4+2\sqrt{(1-x)(x+3)}=4+2\sqrt{-(x+1)^2+4}$，

当 $x=-1$ 时，$y_{\max}^2=8$，$\therefore y_{\max}=2\sqrt{2}$，

当 $x=1$ 或 -3 时，$y_{\min}^2=4$，$\therefore y_{\min}=2$，

$\therefore \frac{m}{M}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【答案】 C

例 2 (2008 年安徽高考文 · T20)已知函数 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+(a+1)x+1$，其中 a 为实数.

(1)已知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极值，求 a 的值；

(2)已知不等式 $f'(x)>x^2-x-a+1$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$都成立，求实数 x 的取值范围.

【规范解析】 (1)$f'(x)=ax^2-3x+(a+1)$，

由于函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极值，所以 $f'(1)=0$.

即 $a-3+a+1=0$，$\therefore a=1$.

(2)由题设知：$ax^2-3x+(a+1)>x^2-x-a+1$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$ 都成立，

即 $a(x^2+2)-x^2-2x>0$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$ 都成立.

于是 $a>\dfrac{x^2+2x}{x^2+2}$ 对任意 $a\in(0,+\infty)$ 都成立，

即 $\dfrac{x^2+2x}{x^2+2}\leqslant 0$.

$\therefore -2\leqslant x\leqslant 0$.

所以 x 的取值范围是 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 0\}$.

例 3 已知方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0$ 中，a 为正整数，问 a 取何值时，方程至少有一个整数根.

【思路探索】 若用求根公式解出 $x=\dfrac{1-2a\pm\sqrt{3a+1}}{a}$ 来讨论 x 的整数值，将十分繁难. 不妨把 a 表成 x 的函数来试试.

【解】 将原方程改写为

$$a(x+2)^2=2x+7 \qquad (*)$$

显然，当 $x=-2$ 时，(*)式不成立，所以有

$$a=\frac{2x+7}{(x+2)^2}\quad (x\neq -2) \qquad (**)$$

若要 a 为正整数，则须 $2x+7\geqslant(x+2)^2$.

解得 $-3\leqslant x\leqslant 1(x\in\mathbf{Z},x\neq -2)$

$\therefore x$ 只能在 $-3,-1,0,1$ 中取值.

代入(* *)式中可知，仅当 $x=-3$，$x=-1$ 和 $x=1$ 时能保证 a 为正整数. 此时分别有 $a=1$ 和 $a=5$.

故当 a 为 1 或 5 时原方程至少有一个整数根.

【解后感言】 本来原方程中的变元是 x，a 为参数，解题过程中我们"反客为主"，将方程表示成为 a 的函数关系式(* *)，这种将参数和未知数等同看待的思想是函数思想的思维特征之一.

二、利用函数的单调性

解题秘言：函数的单调性，对具体函数通常并不难判别. 对有些数学问题，若能与函数的单调性联系起来，常能获得简捷、直观的解法.

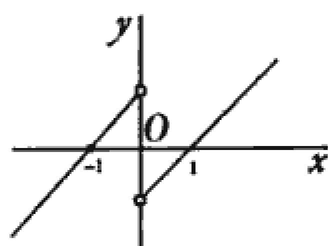
例 1 (2008 年全国Ⅰ高考理 · T9)设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 ( )

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

【规范解析】 由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

且 $f(1)=0$，$f(x)$ 为奇函数，可作出 $f(x)$ 的图象大致如下：



又 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0\Rightarrow\dfrac{2f(x)}{x}<0$

$\Rightarrow x\cdot f(x)<0$，由图象可知 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

【答案】 D

例 2 （2008 年山东高考文・T21）设函数 $f(x)=x^2e^{1-1}+ax^3+bx^2$，已知 $x=-2$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点.

(1)求 a 和 b 的值；

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3)设 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

【规范解析】 (1)因为 $f'(x)=e^{x-1}(2x+x^2)+3ax^2+2bx=xe^{x-1}(x+2)+x(3ax+2b)$，

又 $x=-2$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，

所以 $f'(-2)=f'(1)=0$

因此 $\begin{cases}-6a+2b=0\\3+3a+2b=0\end{cases}$，解方程组得 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=-1$.

(2)因为 $a=-\dfrac{1}{3}$，$b=-1$

所以 $f'(x)=x(x+2)(e^{x-1}-1)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=0$，$x_3=1$.

因为当 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(-2,0)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是单调递增的，

在 $(-\infty,-2)$ 和 $(0,1)$ 上是单调递减的.

(3)由(1)可知 $f(x)=x^2e^{x-1}-\dfrac{1}{3}x^3-x^2$，

故 $f(x)-g(x)=x^2e^{x-1}-x^3=x^2(e^{x-1}-x)$，

令 $h(x)=e^{x-1}-x$，则 $h'(x)=e^{x-1}-1$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$，

因为 $x\in(-\infty,1]$ 时，$h'(x)\leqslant0$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上单调递减.

故 $x\in(-\infty,1]$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=0$；

因为 $x\in[1,+\infty)$ 时，$h'(x)\geqslant0$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增.

天天警言

黑暗中高举探索火炬，发现神秘莫测的数学解题世界，是《赚分》给我傲视群雄的力量！

故 $x\in[1,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=0$.

所以对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $h(x)\geqslant 0$，

又 $x^2\geqslant 0$，因此，$f(x)-g(x)\geqslant 0$，

故对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $f(x)\geqslant g(x)$.

例 3 求自然数 a 的最大值，使得不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>2a-5$ 对一切自然数 n 都成立.

【解】 记 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$，则

$f(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}$.

$\because f(n+1)-f(n)=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+4}-\frac{2}{3(n+1)}$

$=\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)+\left(\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{(3n+3)}\right)$

$=\frac{1}{(3n+3)(3n+2)}-\frac{1}{(3n+3)(3n+4)}>0$

$\therefore f(n)$ 是 n 的增函数，

$\therefore f(n)$ 的最小值 $f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$，因此 $f(1)>2a-5$ 对一切自然数 n 都成立，当且仅当 $f(1)>2a-5$，

$\therefore a<\frac{73}{24}$

【解后感言】 对有关数列问题及涉及以自然数 n 为变量的问题，常可视为函数 $f(n)$，然后同 $f(x)$ 一样判定其单调性. 这里用的是差值法判定其单调性.

三、利用函数的奇偶性

例 1 (2008 年辽宁高考理 · T12) 设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是单调函数，则满足 $f(x)=f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为 ( )

A. -3　　B. 3　　C. -8　　D. 8

【规范解析】 若 $\frac{x+3}{x+4}\neq 0$，依题意 x 与 $\frac{x+3}{x+4}$ 异号，

即 $x<-4$ 或 $-3<x<0$ 且 $-x=\frac{x+3}{x+4}$，

$\therefore x^2+5x+3=0$，$\Delta=5^2-4\times 3>0$，$x_1+x_2=-5$，

此二根均符合题意.

若 $\frac{x+3}{x+4}=0$，则 $x=-3$，符合题意. 故所求和为 -8. 故选 C.

【答案】 C

为了母亲的微笑，我一定要赚分！我的考场每一分，都是妈妈的青丝绕。

【解后感言】 这里运用函数的奇偶性及单调函数一一对应的关系将复杂的隐性方程化归为简单的一元二次方程来求解.

例2 (2008年福建高考文·T4、理·T4)函数 $f(x)=x^3+\sin x+1(x\in\mathbf{R})$,若 $f(a)=2$,则 $f(-a)$的值为 ( )

A. 3　　B. 0　　C. −1　　D. −2

【规范解析】 设 $g(x)=x^3+\sin x$. 则 $f(x)=g(x)+1$

$f(a)=g(a)+1=2$, $\therefore g(a)=1$.

又 $g(-x)=(-x)^3+\sin(-x)=-(x^3+\sin x)=-g(x)$,

即 $g(x)$为奇函数.

$\therefore f(-a)=g(-a)+1=-g(a)+1=-1+1=0$

【答案】 B

例3 解方程$(5x+3)^3+x^3+6x+3=0$.

【解】 将方程改写成

$$(5x+3)^3+(5x+3)=-(x^3+x)$$

令 $f(x)=x^3+x$,则 $f(x)$为奇函数,且在 $\mathbf{R}$ 上单调增.

原方程即为 $f(5x+3)=-f(x)=f(-x)$.

由 $f(x)$的单调性知,其对应法则 f 是一一对应的.

故 $5x+3=-x$

得 $x=-\frac{1}{2}$,即 $x=-\frac{1}{2}$为原方程的解.

【解后感言】 这里运用函数的奇偶性及单调函数一一对应的关系将复杂的高次方程化归为简单的一元一次方程来求解.

四、利用函数的连续性和有界性

例1 证明:方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$至少有一个正根,它不超过 $a+b$.

【证明】 设 $f(x)=a\sin x+b-x$.

则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且 $f(0)=b>0$.

又 $f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)$

$=a[\sin(a+b)-1]\leqslant 0$

若 $f(a+b)=0$,则 $a+b$ 就是方程的根,且它不超过 $a+b$;

若 $f(a+b)<0$,又 $f(0)>0$,故在区间$(0,a+b)$内至少存在一个 x_0,使得 $f(x_0)=0$,即 $x_0=\sin x_0+b$.

故方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根,它不超过 $a+b$.

妈妈,我要用不懈的努力来回报您的爱!幸好,戚叔叔呕心沥血给我编写了《我一定要赚分》,是老天佑我!

【解后感言】 从几何意义上来讲，这里用到的结论是：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则函数 $f(x)$ 的图象必在区间 (a,b) 内至少要穿越 x 轴一次.

例 2 求函数 $y=x+4+\sqrt{5-x^2}$ 的最大值和最小值.

【解】 设 $x=\sqrt{5}\cos\theta,\theta\in[0,\pi]$，则

$y=\sqrt{5}\cos\theta+4+\sqrt{5-5\cos^2\theta}$

$=\sqrt{5}(\cos\theta+\sin\theta)+4.$

$=\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4.$

$\because \frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$

$\therefore$ 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$，即 $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时，$y_{\max}=4+\sqrt{10}$；

当 $\theta=\pi$，即 $x=-\sqrt{5}$ 时，$y_{\min}=4-\sqrt{5}$.

【解后感言】 利用换元，将代数函数转化为有界的三角函数，使解答过程简单明了.

五、利用函数的周期性

例 1 (2008 年四川高考文・T9、理・T11)函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$. 若 $f(1)=2$，则 $f(99)=$ （　）

A. 13　　B. 2　　C. $\frac{13}{2}$　　D. $\frac{2}{13}$

【规范解析】 由 $f(x)\cdot f(x+2)=13$，得 $f(x+2)=\frac{13}{f(x)}$，

$\therefore f(x+4)=f((x+2)+2)=\frac{13}{f(x+2)}$

$=\frac{13}{\frac{13}{f(x)}}=f(x)$，

即 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

所以 $f(99)=f(3+4\times24)=f(3)=f(1+2)$

$=\frac{13}{f(1)}=\frac{13}{2}$.

【答案】 C

妈妈天天为我操劳，我不想看到她老人家的青丝变白发，我要天天看《高中数学解题方法与技巧探秘》！

天天誓言

六、利用二次函数的性质

例 1 (2006年陕西高考理)已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4(0<a<3)$,若 $x_1<x_2$,$x_1+x_2=1-a$,则 ( )

A. $f(x_1)<f(x_2)$　　B. $f(x_1)=f(x_2)$

C. $f(x_1)>f(x_2)$　　D. $f(x_1)$与 $f(x_2)$的大小不确定

【规范解析】 二次函数的图象开口向上,对称轴为直线 $x=-1$.

又 $0<a<3$,所以 $x_1+x_2=1-a\in(-2,1)$,x_1 与 x_2 的中点在(-1,$\frac{1}{2}$之间),$x_1<x_2$,所以 x_2 到对称轴的距离大于 x_1 到对称轴的距离.

所以 $f(x_1)<f(x_2)$.

【答案】 A

【解后感言】 当 $a>0$ 时,x 到对称轴的距离越大,相应的函数值 $f(x)$也越大,反之越小;当 $a<0$ 时,x 到对称轴的距离越大,相应的函数值$f(x)$越小,反之越大.

例 2 α,β,γ 为任意三角形的三个内角,证明:

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos\alpha+2yz\cos\beta+2zx\cos\gamma$$

对于任意实数 x,y,z 总成立.

【思路探索】 欲证式可整理为 x 的二次函数式

$$f(x)=x^2-2x(y\cos\alpha+z\cos\gamma)+y^2+z^2-2yz\cos\beta\geqslant 0$$

这只要证 $f(x)$的图象不在 x 轴下方即可.

【证明】 令 $f(x)=x^2-2x(y\cos\alpha+z\cos\gamma)+y^2+z^2-2yz\cos\beta$

$\because \Delta=4(y\cos\alpha+z\cos\gamma)^2-4(y^2+z^2-2yz\cos\beta)$

$=4y^2(\cos^2\alpha-1)+8yz(\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta)+4z^2(\cos^2\gamma-1)$

$=-4y^2\sin^2\alpha+8yz[\cos\alpha\cos\gamma-\cos(\alpha+\gamma)]-4z^2\sin^2\gamma$

$=-4y^2\sin^2\alpha+8yz\sin\alpha\sin\gamma-4z^2\sin^2\gamma$

$=-4(y\sin\alpha-z\sin\gamma)^2\leqslant 0$

$\therefore f(x)\geqslant 0$

故 $x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy\cos\alpha+2yz\cos\beta+2zx\cos\gamma$.

【解后感言】 根据二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,若 $\Delta\leqslant 0$,则有 $f(x)\geqslant 0$;反之,若 $f(x)\geqslant 0$,则 $\Delta\leqslant 0$. 依此来构造二次函数解题是常用的方法.

例 3 等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1>0$,前 n 项和为 S_n,若 $S_m=S_k(m\neq k)$,问 n 为何值时,S_n 最大?

【思路探索】 考虑到 S_n 是 n 的二次函数,故设法运用二次函数的图象和性质来解.

【解】 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n.$

$\because a_1>0, S_m=S_k$

$\therefore d<0$

∴函数 $y=f(x)$ 是开口向下的抛物线. 由图象及 $f(m)=f(k)$ 知，当 $x=\frac{m+k}{2}$，$f(x)$ 最大.

考虑到 $n\in\mathbf{N}$，故有：

(1)若 $m+k$ 为偶数，则 $n=\frac{m+k}{2}$ 时，S_n 最大；

(2)若 $m+k$ 为奇数，则 $n=\frac{m+k\pm1}{2}$ 时，S_n 最大.

七、利用二项式定理

例 1　(2008 年湖北高考理 · T8)已知 $m\in\mathbf{N}^*$，$a,b\in\mathbf{R}$，若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^m+a}{x}=b$，则 $a\cdot b=$　　(　　)

A. $-m$　　B. m　　C. -1　　D. 1

【规范解析】 $\because (1+x)^m=C_m^0+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^mx^m$，

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^m+a}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+a}{x}+C_m^1+C_m^2x+\cdots+C_m^mx^{m-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+a}{x}+m\right).$

又 $\because \lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^m+a}{x}=b$，$\therefore a=-1, b=m$，$\therefore a\cdot b=-m$.

【答案】 A

例 2　证明：当 $n\geqslant3$ 时，$2^n\geqslant2(n+1)(n\in\mathbf{N})$.

【证明】 令 $f(x)=(1+x)^n=C_n^0x^0+C_n^1x+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

则　$f(1)=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$

$=1+n+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+n+1$

$=2(1+n)+(C_n^2+\cdots+C_n^{n-2})=2^n$

当 $n=3$ 时，$2^n=2(1+n)$；

当 $n>3$ 时，$2^n=2(1+n)+C_n^2+\cdots$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant3$ 时，$2^n\geqslant2(n+1)$.

此刻打盹，我将做梦；而此刻学习，我将圆梦。今天，我不偷懒！



实战秘修一

1. 解不等式 $\sqrt{4x-x^2}>ax(a<0)$.
2. 设对于任意实数 x,不等式
   $x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$ 都成立.求实数 a 的取值范围
3. (2007 年山东·文 15)当 $x\in(1,2)$时,不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立,则 m 的取值范围是________.
4. 解方程 $3^{\sqrt{5x-2y}}+5^{\sqrt{y-5}}=2$.
5. 已知函数 $f(x)=(a-1)\log_3^2x-6a\log_3x+a+1$,当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时,恒有 $f(x)\geqslant 0$,求 x 的取值范围.
6. 解不等式:$(2x|-1)^5+2x-1<x^5+x$.
7. (2008 年湖北高考文·T6)已知
   $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数,且满足 $f(x+4)=f(x)$,当 $x\in(0,2)$时,$f(x)=2x^2$,则 $f(7)=$ ( )
   A. -2　　B. 2
   C. -98　　D. 98
8. 已知 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\beta\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,且
   $(3\tan\alpha+\cot\beta)^3+\tan^3\alpha+4\tan\alpha+\cot\beta=0$
   证明:$4\tan\alpha+\cot\beta=0$.
9. 已知 $f(x)$的定义域关于原点对称,证明:$f(x)$可以用一个奇函数与一个偶函数的和来表示,并试用 e^x 构造一个奇函数与一个偶函数.
10. 已知$(4x+y)^7+x^7+5x+y=0$,求 $5x+y$ 的值.
11. 设 λ 是正常数,且 $f(x+\lambda)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$,试证 $f(x)$是周期函数,并求出它的一个周期.
12. 若 $f(x)$对一切实数 x 都有 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$,且 $f(0)=1,f(1)=2$,求 $f(2012)$.
13. 已知 x,y,z 三实数都属于$(0,1)$,证明:
    $$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$
14. 若方程 $x^2+(m+1)x+4=0$ 的两个根都比 1 大,求 m 的取值范围.
15. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $2a+b+2\leqslant 0$.证明:方程 $x^2+\frac{1}{x^2}+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0$ 至少有一个正实数解.
16. 已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.证明:
    $$|\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma|\leqslant 2\sqrt{2}.$$
17. 设 $x>0$,证明:$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}\leqslant x^2-2x+1+\sqrt{2}$.



实战秘修一答案与提示

1.【解】 构造函数 $y=\sqrt{4x-x^2}$和 $y=ax(a<0)$，对于函数 $y=\sqrt{4x-x^2}$可求得定义域为$\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，再由半圆 $y=\sqrt{4x-x^2}$在直线 $y=ax$ 上方，求得原不等式的解集为$\{x|0<x\leqslant 4\}$.

2.【解】 原不等式可化为

$$x^2\log_2\frac{8(a+1)}{2a}-2x\log_2\frac{a+1}{2a}+2\log_2\frac{a+1}{2a}>0$$

即 $3x^2+\left(\log_2\frac{a+1}{2a}\right)(x^2-2x+2)>0$

显然 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$

$\therefore\log_2\frac{a+1}{2a}>\frac{-3x^2}{(x-1)^2+1}$

令$\frac{-3x^2}{(x-1)^2+1}=f(x)$，易见 $f(x)\leqslant 0$. 当 $x=0$ 时，$f(x)=0$，可见 $f(x)$的最大值是 0.

$\therefore\log_2\frac{a+1}{2a}>0$ 即 $1<\frac{a+1}{2a}$

$\therefore 0<a<1$.

3. $m\leqslant -5$

【解】 $x^2+mx+4<0\Leftrightarrow m<-x-\frac{4}{x}$.

$\because y=-(x+\frac{4}{x})$在$(1,2)$上单调递增，

$\therefore -(x+\frac{4}{x})\in(-5,-4)$. $\therefore m\leqslant -5$.

4.【解】 $\because y=a^x(a>1)$在 **R** 上是增函数且

$\sqrt{5x-2y}\geqslant 0$，$\sqrt{y-5}\geqslant 0$

$\therefore 3^{\sqrt{5x-2y}}\geqslant 3^0=1,5^{\sqrt{y-5}}\geqslant 5^0=1$

$\therefore 3^{\sqrt{5x-2y}}+5^{\sqrt{y-5}}\geqslant 2$　　(*)

当且仅当$\begin{cases}\sqrt{5x-2y}=0\\\sqrt{y-5}=0\end{cases}$时，(*)式取等号.

解得$\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$为原方程的解.

勿将今日之事拖到明天。今天是最好的机会！

天天警言

5.【解】 设 $g(a)=(\log_3^2 x-6\log_3 x+1)a+(1-\log_3^2 x)$，这是一个关于 a 的一次函数，这个函数仍然满足当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$g(a)\geqslant 0$.

由于一次函数 $g(a)$ 是一个单调函数，为保证 $g(a)\geqslant 0$，因此有

$$\begin{cases} g(0)\geqslant 0 \\ g(1)\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} g(0)=1-\log_3^2 x\geqslant 0 \\ g(1)=-6\log_3 x+2\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1\leqslant \log_3 x\leqslant \frac{1}{3}\Rightarrow \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{3}$$

故 $x\in\left[\frac{1}{3},\sqrt[3]{3}\right]$.

6. 令 $f(x)=x^5+x$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增.

原不等式为 $f(2x-1)<f(x)$.

解 $2x-1<x$ 得 $x<1$ 为其解.

7. 选 A.

【解】 $\because f(x+4)=f(x)$，

$\therefore T=4$. 又 $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore f(7)=f(8-1)=f(-1)=-f(1)=-2$.

8. 条件等式变形为 $(3\tan\alpha+\cot\beta)^3+(3\tan\alpha+\cot\beta)=-(\tan^3\alpha+\tan\alpha)$

令 $f(x)=x^3+x$，则 $f(x)$ 为奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上单调增. 上式为

$f(3\tan\alpha+\cot\beta)=-f(\tan\alpha)=f(-\tan\alpha)$

$\therefore 3\tan\alpha+\cot\beta=-\tan\alpha$，即 $4\tan\alpha+\cot\beta=0$.

9. 依定义域对称于原点，$f(x)$ 有意义则 $f(-x)$ 一定有意义. 要求一个偶函数 $g(x)$ 与一个奇函数 $h(x)$，使

$g(x)+h(x)=f(x)$ ①

以 $-x$ 代 x，有

$g(x)-h(x)=f(-x)$ ②

由①，②得

$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数；

$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 为奇函数.

$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 为偶函数，$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 为奇函数.

10.【解】 条件等式可变形为

$(4x+y)^7+(4x+y)=-(x^7+x)$

令 $f(x)=x^7+x$，上式即为

$$f(4+y)=-f(x).$$

11. 由 $f(x+\lambda)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$解得 $f(x)=\frac{1-f(x+\lambda)}{1+f(x+\lambda)}=f(x+2\lambda)$

知 $f(x)$是以 2λ 为周期的周期函数.

12. 【解】 $\because f(x+1)=f(x)-f(x-1)$

$\therefore f(x+2)=f(x+1)-f(x)=[f(x)-f(x-1)]-f(x)$

$=-f(x-1)=-[-f(x-4)]=f(x-4)$

$\therefore f(x+6)=f(x)$

从而知 $f(x)$是 6 为周期的周期函数,所以

$f(2012)=f(2+6\times335)=f(2)=f(1)-f(0)=1.$

13. 【解】 原不等式化为$(1-y-z)x+(1-z)(y-1)<0$.

令 $f(x)=(1-y-z)x+(1-z)(y-1)$为 $x\in(0,1)$的一次函数.

$\because f(0)=(1-z)(y-1)<0$

$f(1)=1-y-z+(1-z)(y-1)=-yz<0$

$\therefore f(x)$在 $x\in(0,1)$内恒为负,得证.

14. 【解】 令 $f(x)=x^2+(m+1)x+4$,其图象交 x 轴于 x_1,x_2.

依$\begin{cases}\triangle=(m+1)^2-16\geqslant0\\x_1+x_2=-(m+1)>2\\(x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}$ 解得$-6<m\leqslant-5$.

15. 【解】 令 $u=x+\frac{1}{x}$,原方程变为 $u^2+au+b-2=0$ (*)

要证原方程有正根 x_0,只要证(*)有实根 $u_0\geqslant2$(因 $x_0+\frac{1}{x_0}\geqslant2$).

引入辅助函数 $f(u)=u^2+au+b-2$.

由 $f(2)=2a+b+2\leqslant0$ 知,$f(u)$在$[2,+\infty]$内必有一根 $u_0\geqslant2$ 使得 $f(u_0)=0$.

16. 【解】 由 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ 知 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

令 $f(x)=(x\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(x\sin\beta-\cos\beta)^2+(x\sin\gamma-\cos\gamma)^2$

$=x^2-(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)x+2$.

显然 $f(x)\geqslant0$,故 $\Delta=(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)^2-8\leqslant0$.

即然$|\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma|\leqslant2\sqrt{2}$.

17. 【解】 令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+1}}$,$g(x)=x^2-2x+1+\sqrt{2}$.

证明 $f(x)\leqslant\sqrt{2}\leqslant g(x)$.

学习并不是生命的全部。但,既然连人生的一部分——学习也无法征服,我还能做什么呢?

第二章 方程思想闪耀万丈光芒

方程思想是最基本的，也是最重要的数学思想方法之一.它从对问题的数量关系分析入手，运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型(这种模型可以是方程、不等式或方程与不等式的混合组)，然后通过解方程(组)或不等式(组)来使问题获解.

应该注意的是，这里我们所说的方程思想与我们常见的列方程(组)不同，我们把一些看上去似乎与方程不发生明显联系的数学问题，运用方程的思想而巧妙地使问题获解.

一、待定系数法

解题秘言：待定系数法的实质就是方程思想，它把待定的未知数与已知数等同看待来建立等式，即得方程.

例1 (2008年江苏高考·T18)在平面直角坐标系 xOy 中，设二次函数 $f(x)=x^2+2x+b(x\in\mathbf{R})$ 的图象与两个坐标轴有三个交点，经过这三点的圆记为 C.

(1)求实数 b 的取值范围；

(2)求圆 C 的方程；

【规范解析】 (1)当 $b=0$ 时，二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ 的图象与两个坐标轴只有两个交点 $(0,0)$，$(-2,0)$，这与题意不符.由 $b\neq0$ 知，二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ 的图象与 y 轴有一个非原点的交点 $(0,b)$，故它与 x 轴必有两个交点，从而方程 $x^2+2x+b=0$ 有两个不相等的实数根，因此方程的判别式 $4-4b>0$ 即 $b<1$.所以，b 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

(2)由方程 $x^2+2x+b=0$，得 $x=-1\pm\sqrt{1-b}$.于是二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ 的图象与坐标轴的交点是 $(-1-\sqrt{1-b},0)$，$(-1+\sqrt{1-b},0)$，$(0,b)$.

设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，因圆 C 过上述三点，

则有：$\begin{cases}(-1-\sqrt{1-b})^2+D(-1-\sqrt{1-b})+F=0\\(-1+\sqrt{1-b})^2+D(-1+\sqrt{1-b})+F=0,\\b^2+Eb+F=0\end{cases}$

解方程组，因 $b\neq0$，得 $\begin{cases}D=2\\E=-(b+1),\\F=b\end{cases}$

所以，圆 C 的方程为 $x^2+y^2+2x-(b+1)y+b=0$.

例2 证明：多项式 $x^2-y^2+dx-ey+f$ 能分解成两个一次因式之积的充要条件是 $4f-d^2+e^2=0$.

【证明】 必要性：

设 $x^2-y^2+dx-ey+f=(x+y+l)(x-y+m)$

$=x^2-y^2+(l+m)x+(m-l)y+lm$

比较对应项的系数，得

$$\begin{cases} l+m=d & ① \\ m-l=-e & ② \\ lm=f & ③ \end{cases}$$

由①、②得 $l=\frac{1}{2}(d+e)$，$m=\frac{1}{2}(d-e)$，代入③消去 l、m，得

$$4f-d^2+e^2=0.$$

充分性：由 $4f-d^2+e^2=0 \Rightarrow f=\frac{d^2-e^2}{4}$，代入多项式，得

$$x^2-y^2+dx-ey+\frac{d^2-e^2}{4}$$

$$=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2-\left(y+\frac{e}{2}\right)^2$$

$$=\left(x+y+\frac{d+e}{2}\right)\left(x-y+\frac{d-e}{2}\right)$$

故命题获证.

【解后感言】 待定系数法是解决此类问题的统性通法.在解决二次曲线表示两直线方程时也常用到.

二、直接设元解方程

例1 证明：$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=2$.

【证明】 设 $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=x$，两边立方后，得

$$x^3=(10+6\sqrt{3})+(10-6\sqrt{3})+$$

$$3\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})(10-6\sqrt{3})}\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)$$

即 $x^3=20-6x \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+10)=0$

∵方程 $x^2+2x+10=0$ 无实数根

∴$x=2$

故 $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=2$.

【解后感言】 这里是直接设待证式为未知数，通过解方程求出值而使其获证.比配立方或其它方法来得直观、明了.

投资未来的人才是忠于现实的人！



例 2 求 $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}$的值.

【解】 设 $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=x$,显然 $x>0$. 平方之,得

$$x^2=\cos^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{4\pi}{5}\right)-2\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$$

得方程 $2x^2+x-1=0$.

解之,取其正值,得 $x=\frac{1}{2}$

【解后感言】 这种方法实际上是作整体代换.通过某些变形后又回归出现其自身的表达式,因此化归为解方程问题.

本例为某些非特殊角的三角函数求值问题提供了一种解题的参考方法.

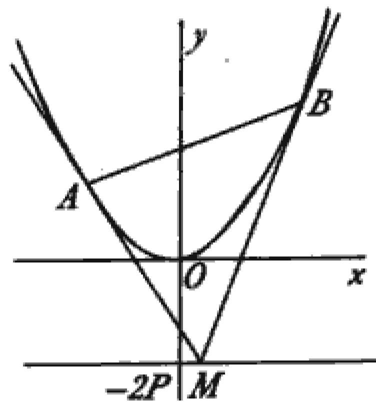
三、运用根的定义构造方程

例 1 (2008 年山东高考理 · T22)如图,设抛物线方程为 $x^2=2py(p>0)$,M 为直线 $y=-2p$ 上任意一点,过 M 引抛物线的切线,切点分别为 A、B.

(Ⅰ)求证:A、M、B 三点的横坐标成等差数列;

(Ⅱ)已知当 M 点的坐标为$(2,-2p)$时,$|AB|=4\sqrt{10}$.求此时抛物线的方程;

(Ⅲ)是否存在点 M,使得点 C 关于直线 AB 的对称点 D 在抛物线 $x^2=2py(p>0)$上,其中,点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$($O$ 为坐标原点).若存在,求出所有适合题意的点 M 的坐标;若不存在,请说明理由.



【解析】 (1)证明:由题意设

$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right)$,$x_1<x_2$,$M(x_0,-2p)$.

由 $x^2=2py$ 得 $y=\frac{x^2}{2p}$,则 $y'=\frac{x}{p}$,所以 $k_{MA}=\frac{x_1}{p}$,$k_{MB}=\frac{x_2}{p}$.

因此直线 MA 的方程为 $y+2p=\frac{x_1}{p}(x-x_0)$，

直线 MB 的方程为 $y+2p=\frac{x_2}{p}(x-x_0)$，

所以 $\frac{x_1^2}{2p}+2p=\frac{x_1}{p}(x-x_0)$， ①

$\frac{x_2^2}{2p}+2p=\frac{x^2}{p}(x_2-x_0)$. ②

由①、②得 $\frac{x_1+x_2}{2}=x_1+x_2-x_0$，

因此 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，即 $2x_0=x_1+x_2$.

所以 A、M、B 三点的横坐标成等差数列.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，当 $x_0=2$ 时，

将其代入①、②并整理得

$x_1^2-4x_1-4p^2=0$

$x_2^2-4x_2-4p^2=0$

所以 x_1、x_2 是方程 $x^2-4x-4p^2=0$ 的两根，

因此 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=-4p^2$，

又 $k_{AB}=\dfrac{\frac{x_2^2}{2p}-\frac{x_1^2}{2p}}{x_2-x_1}=\frac{x_1+x_2}{2p}=\frac{x_0}{p}$，所以 $k_{AB}=\frac{2}{p}$.

由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+\frac{4}{p^2}}\sqrt{16+16p^2}$.

又 $|AB|=4\sqrt{10}$，所以 $p=1$ 或 $p=2$，

因此所求抛物线方程为 $x^2=2y$ 或 $x^2=4y$.

(Ⅲ)设 $D(x_3,y_3)$，由题意得 $C(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

则 CD 的中点坐标为 $Q\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right)$，

设直线 AB 的方程为 $y-y_1=\frac{x_0}{p}(x-x_1)$，

由点 Q 在直线 AB 上，并注意到点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{}\right)$ 也在直线 AB 上，代入得

$y_3=\frac{x_0}{p}x_3$.

若 $D(x_3,y_3)$ 在抛物线上，则 $x_3^2=2py_3=2x_0x_3$，

因此 $x_3=0$ 或 $x_3=2x_0$，即 $D(0,0)$ 或 $D\left(2x_0,\frac{2x_0^2}{p}\right)$.



教育程度代表收入。我要追求更高，更高！

(1)当 $x_0=0$ 时，则 $x_1+x_2=2x_0=0$，

此时，点 $M(0,-2p)$ 适合题意.

(2)当 $x_0\neq0$，对于 $D(0,0)$，

此时 $C\left(2x_0,\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2p}\right)$，$k_{CD}=\dfrac{\frac{x_1^2+x_2^2}{2p}}{2x_0}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4px_0}$，

又 $k_{AB}=\dfrac{x_0}{p}$，$AB\perp CD$，

所以 $k_{AB}\cdot k_{CD}=\dfrac{x_0}{p}\cdot\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4px_0}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{4p^2}=-1$，

即 $x_1^2+x_2^2=-4p^2$，矛盾.

对于 $D\left(2x_0,\dfrac{2x_0^2}{p}\right)$，因为 $C\left(2x_0,\dfrac{x_1^2+x_2^2}{2p}\right)$，此时直线 CD 平行于 y 轴，又 $k_{AB}=\dfrac{x_0}{p}\neq0$.

所以直线 AB 与直线 CD 不垂直，与题设矛盾，

所以 $x_0\neq0$ 时，不存在符合题意的 M 点.

综上所述，仅存在一点 $M(0,-2p)$ 适合题意.

四、运用判别式构造方程

例1 若 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$. 证明：x,y,z 成等差数列.

【思路探索】 题设正好是某一元二次方程判别式等于0的形式，因此可以构造一个一元二次方程来求解.

【证明】 当 $x=y$ 时，由条件式得 $x=z$，此时 x,y,z 成公差为零的等差数列.

当 $x\neq y$ 时，设有方程

$$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0 \qquad (*)$$

依题设知，(*)式的判别式 $\Delta=0$，方程有两相等的实根，即 $t_1=t_2$.

又，此一元二次方程的所有系数之和等于0，即

$$(x-y)+(z-x)+(y-z)=0$$

故 $t=1$ 为方程(*)的根.

$\therefore t_1t_2=\dfrac{y-z}{x-y}=1$

即 $y-z=x-y$，$x+z=2y$

$\therefore x,y,z$ 成等差数列.

【解后感言】 利用题设具有 $b^2-4ac=0$ 的条件，不失时机地构造一元二次方程，使问题简捷获解. 这种解题的简捷性来源于观察力的敏锐性.

天天誓言

既便现在，对手也不停地翻动书页。好恐怖呦，我不能松懈！

例 2 求函数 $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$ 的值域.

【解】 $\because 2x^2+2x+1\neq 0$

$\therefore$ 函数的定义域为全体实数.

将原函数变形为

$$(2y-1)x^2+2(y+1)x+(y+3)=0 \quad (*)$$

当 $y=\dfrac{1}{2}$ 时,(*)有解 $x=-\dfrac{7}{6}$,满足题意;

当 $y\neq\dfrac{1}{2}$ 时,方程(*)有实数解,则

$\Delta=[2(y+1)]^2-4(2y-1)(y+3)\geqslant 0$

$\Rightarrow y^2+3y-4\leqslant 0$

$\Rightarrow -4\leqslant y\leqslant 1$ 且 $y\neq\dfrac{1}{2}$.

综上所述,$y\in[-4,1]$.

【解后感言】 此即所谓"判别式"法,其实质是把原分式函数 $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ 化为关于 x 的一元二次方程,依判别式来求出 y 的取值范围.使用判别式法一定要注意定义域,当定义域不是全体实数时,一定要验算函数所取得的值是否在定义域内.

五、运用根与系数关系构造方程

例 1 已知实数 m,n,l 满足 $m-n=8,mn+l^2+16=0$.证明:$m+n+l=0$.

【证明】 将已知条件变为

$m+(-n)=8,m\cdot(-n)=l^2+16$

故 $m,(-n)$ 是一元二次方程

$$x^2-8x+(l^2+16)=0 \quad (*)$$

的两个实数根.

由 $\Delta=(-8)^2-4(l^2+16)=-4l^2\geqslant 0$,知

$l=0,\Delta=0$

方程(*)变为 $x^2-8x+16=0$,则方程两根相等,即 $m=-n$.

$\therefore m+n+l=0$.

【解后感言】 利用根与系数关系构造方程是方程思想的常用方法,其关键是善于发现和联想到韦达定理.

没有艰辛,便无收获。艰辛,成功的金种子!

天天警言

例 2　若 $p,q\in\mathbf{R}$，$p^3+q^3=2$，证明：$0<p+q\leqslant 2$.

【证明】 将条件等式 $p^3+q^3=2$ 变形，有

$$(p+q)^3-3pq(p+q)=2.$$

设 $p+q=k$，则 $pq=\dfrac{k^3-2}{3k}$. 于是 p,q 是一元二次方程

$$x^2-kx+\frac{k^3-2}{3k}=0 \text{ 的两实根.}$$

$\therefore \Delta=k^2-4\cdot\dfrac{k^3-2}{3k}=\dfrac{8-k^3}{3k}\geqslant 0$

解之得 $0<k\leqslant 2$，即 $0<p+q\leqslant 2$.

【解后感言】 如何从条件等式中发掘出两数之和与两数之积是使用这种方法的关键. 这里题设中有 $p+q$ 的形式，只需设法找到 pq，这是将已知式变形的目的.

六、由待求式与条件式构造方程组

例 1　已知 $f(x)$ 满足

$$2f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{x+1}{x}\right)=1+x \quad (x\neq 0)$$

求 $f(x)$.

【解】 $\because 2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1+x$　①

以 $-x$ 代 x，得

$$2f\left(\frac{x+1}{x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-x \qquad ②$$

联立①、②，解得

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{1}{3}-x \qquad ③$$

令 $\dfrac{x+1}{x}=t$，得 $x=\dfrac{t}{t-1}$，代入③得

$$f(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{t-1}=\frac{t-4}{3(t-1)}$$

$\therefore f(x)=\dfrac{x-4}{3(x-1)}$.

【解后感言】 用构造方程组来求函数解析式也是常用方法之一，且常以 $f(x)$ 与 $f(-x)$、$f(x)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f(x)$ 与 $f(x+a)$ 等构成方程组.

例 2　已知 $\sin\alpha+3\cos\alpha=2$，求 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ 的值.

【解】 令 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=x$，则

$$(x-1)\sin\alpha+(x+1)\cos\alpha=0 \quad ①$$

又　$\sin\alpha+3\cos\alpha=2$　②

由①、②解得

$$\sin\alpha=\frac{x+1}{2-x},\cos\alpha=\frac{x-1}{x-2}$$

则
$$\left(\frac{x+1}{2-x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=1.$$

整理，得 $x^2+4x-2=0$

解得 $x=-2\pm\sqrt{6}$，即 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-2\pm\sqrt{6}$.

【解后感言】 若利用条件式与 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求出 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的值再代入求值，计算十分复杂.

例 3　求 $\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ$ 的值.

【解】 令 $x=\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ$

匹配与之相应的对偶式

$$y=\cos20^\circ\sin70^\circ+\cos10^\circ\cos50^\circ$$

则
$$x+y=(\sin20^\circ\cos70^\circ+\cos20^\circ\sin70^\circ)+(\sin10^\circ\sin50^\circ+\cos10^\circ\cos50^\circ)$$

$=\sin90^\circ+\cos40^\circ$

$=1+\cos40^\circ$　①

$$x-y=(\sin20^\circ\cos70^\circ-\cos20^\circ\sin70^\circ)+(\sin10^\circ\sin50^\circ-\cos10^\circ\cos50^\circ)$$

$=\sin(20^\circ-70^\circ)-\cos(10^\circ+50^\circ)$

$=-\cos40^\circ-\dfrac{1}{2}$　②

①+②得 $x=\dfrac{1}{4}$，即 $\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ=\dfrac{1}{4}$.

【解后感言】 这种匹配对偶式以便解方程组的方法，在求三角函数值及共轭根式、共轭复数中常有应用.

享受无法回避的痛苦！

天天警言



七、挖掘隐含条件构造方程(组)

例1 已知$\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$.证明:$\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$.

【证明】 设$\cos^2 A=x,\cos^2 B=y$.则$\sin^2 A=1-x,\sin^2 B=1-y$.

将以上诸式代入条件等式,得

$$\frac{x^2}{y}+\frac{(1-x)^2}{1-y}=1$$

整理得$(x-y)^2=0$,即$x=y$.

$\therefore \cos^2 A=\cos^2 B$,从而$\sin^2 A=\sin^2 B$.

故$\frac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=\frac{\cos^4 A}{\cos^2 A}+\frac{\sin^4 A}{\sin^2 A}=1$.

【解后感言】 这里根据隐含条件,从条件等式中找出两个所设变元间的关系式来建立方程.

例2 已知$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$,且$f(0)=a,f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$,求$f(x)$.

【思路探索】 所给条件式中出现了$f(x),f(x+y),f(x-y)$三种函数表达式,情况比较复杂,又已知$f(0),f\left(\frac{\pi}{2}\right)$及考虑到还有$\cos y$,故应注意合理赋值,充分利用题设中的隐含条件.

【解】 令$x=0,y=t$,得$f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t$,即

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t \quad ①$$

令$x=\frac{\pi}{2}+t,y=\frac{\pi}{2}$,得

$$f(\pi+t)+f(t)=0 \quad ②$$

令$x=\frac{\pi}{2},y=\frac{\pi}{2}+t$,得$f(\pi+t)+f(-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$,

即

$$f(\pi+t)+f(-t)=-2b\sin t \quad ③$$

①+②-③得

$$f(t)=a\cos t+b\sin t$$

$\therefore f(x)=a\cos x+b\sin x$.

【解后感言】 本例在挖掘隐含条件构造方程组的过程中,“换元”和“凑式”的技巧性都较强,应注意理解和掌握.

从以上我们已不难看到方程思想在解题应用中的广泛性和灵活性,至于解析几何、立体几何中的许多问题,最终都是通过建立方程式,运用方程的观点来解决,对这些大家司空见惯的形式我们就不作赘述了.

只有比别人更早、更勤奋地努力,才能尝到成功的滋味!

实战秘修二

1. 已知 $f(x)$ 为一次函数，且 $f\{f[f(x)]\}=8x+7$，求 $f(x)$ 的表达式.

2. 已知 $2f(x^2)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=x(x>0)$，求 $f(x)$.

3. 已知 $mf(2x-3)+nf(3-2x)=2x(m^2\neq n^2)$，求 $f(x)$.

4. 求 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ 的值.

5. 已知 a,b,c,d 为实数，且满足 $2c-b=a, c^2+\frac{1}{4}d^2=ab$. 证明：$a=b$.

6. 锐角 A,B,C 满足

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

证明：$A+B+C=\pi$.

7. 证明：$C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^n=2^{2n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^n$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$，证明：$\triangle ABC$ 是正三角形.

9. 已知 $x\in\mathbf{R}$，证明：$2\leqslant\frac{3x^2-6x+6}{x^2-x+1}\leqslant6$.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$\lg\tan A+\lg\tan C=2\lg\tan B$，证明：$\frac{\pi}{3}\leqslant B<\frac{\pi}{2}$.

11. 求不超过 $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^6$ 的最大整数.

12. 若正数 α,β 满足 $\alpha+\beta=\alpha\beta$. 求 $\alpha+\beta$ 的最小值.

13. 设 $x>0$，试求 $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$ 的最大值.

14. 当 x 取何值时，$y=2x-3+\sqrt{13-4x}$ 有最大值？

15. 求函数 $y=\frac{3\sin x+2\cos x+1}{2\sin x+3\cos x+1}$ 的值域.

16. 求 $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$ 的值.

17. 化简：$\tan\alpha+2\tan2\alpha+2^2\tan2^2\alpha+\cdots+2^{n-1}\tan2^{n-1}\alpha(n\in\mathbf{N}^*)$.

18. 设 $25\cos A+5\sin B+\tan C=0, \sin^2B-4\cos A\tan C=0$.

证明：$\tan C=25\cos A$.

19. 在 $\triangle ABC$ 中，证明：

$$\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}\geqslant4\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1\right).$$

20. 已知 $0<\alpha<\beta<\pi$，且无论 θ 为何实数，$\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)$ 都为定值. 求 α,β 及这个定值.

实战秘修二答案与提示

1. 设 $f(x)=ax+b$,则 $f\{f[f(x)]\}=a^3x+a^2b+ab+b$.
   故 $a=2,b=1$. 所以 $f(x)=2x+1$.
2. 以 $\frac{1}{x}$ 代换 x,得 $2f(\frac{1}{x^2})+f(x^2)=\frac{1}{x}$,与已知式联立,解得
   $$f(x^2)=\frac{2x^2-1}{3x}(x>0).$$
   从而 $$f(x)=\frac{2x-1}{3\sqrt{x}}(x>0).$$
3. 令 $t=2x-3$,则 $mf(t)+nf(-t)=t+3$,以 $-t$ 代换 t,得
   $mf(-t)+nf(t)=-t+3$
   两方程联立解得 $f(t)=\frac{(m+n)t+3(m-n)}{m^2-n^2}$.
   即 $f(x)=\frac{(m+n)x+3(m-n)}{m^2-n^2}$. $(m^2\neq n^2)$
4. 设 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$,立方之,解得 $x=4$.
5. 由条件 $a+b=2c,ab=c^2+\frac{1}{4}d^2$ 知 a,b 为方程
   $x^2-2cx+(c^2+\frac{1}{4}d^2)=0$
   的二实根. 由 $\Delta=-d^2\geqslant 0$ 知 $d=0,\Delta=0$. 故 $a=b$.
6. 已知式说明 $\cos A$ 是方程
   $x^2+2\cos B\cos C\cdot x+\cos^2B+\cos^2C-1=0$ 的正根,所以
   $\cos A=\frac{1}{2}[-2\cos B\cos C+\sqrt{4\cos^2B\cos^2C-4(\cos^2B+\cos^2C-1)}]$
   $=-\cos B\cos C+\sin B\sin C=-\cos(B+C)=\cos[\pi-(B+C)]$
   故 $A+B+C=\pi$.
7. 令 $a=C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^{n-1}+C_{2n}^n,b=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\cdots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$.
   则 $a+b=(1+1)^{2n}=2^{2n},a-b=C_{2n}^n$
   故 $a=2^{2n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^n$.
8. 把 $\cot C=-\cot(A+B)=\frac{1-\cot A\cot B}{\cot A+\cot B}$ 代入原等式并整理,得
   $\cot^2A+(\cot B-\sqrt{3})\cot A+(\cot^2B-\sqrt{3}\cot B+1)=0$.
   $\therefore \Delta_{\cot A}=-(\sqrt{3}\cot B-1)^2\geqslant 0$
   $\therefore \sqrt{3}\cot B-1=0\Rightarrow \cot B=\frac{\sqrt{3}}{3}$
   $\because 0<B<\pi\quad \therefore B=\frac{\pi}{3}$

同理 $A=C=\frac{\pi}{3}$.

∴$\triangle ABC$ 是正三角形.

9. 令 $t=\frac{3x^2-6x+6}{x^2-x+1}$,变形为 $(t-3)x^2-(t-6)x+(t-6)=0$.

由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $2\leqslant t\leqslant 6$.

10. 由已知条件,有

$-\tan A\tan(A+B)=\tan^2 B$

$\Rightarrow -\frac{\tan A(\tan A+\tan B)}{1-\tan A\tan B}=\tan^2 B$

$\Rightarrow \tan^2 A+(\tan B-\tan^3 B)\tan A+\tan^2 B=0$

$\therefore \Delta_{\tan A}=\tan^2 B(\tan^2 B+1)(\tan^2 B-3)\geqslant 0$

$\therefore \tan B\geqslant \sqrt{3}$

又∵$0<B<\pi$　　$\therefore \frac{\pi}{3}\leqslant B<\frac{\pi}{2}$.

11. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^6+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^6$

$=2(7^3+C_6^2\cdot 7^2\cdot 3+C_6^4\cdot 7\cdot 3^2+3^3)$

$=7040$

又 $0<\sqrt{7}-\sqrt{3}=\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\leqslant\frac{4}{2.5+1.5}=1$

∴所求的最大整数是 7039.

12. 设 $\alpha+\beta=k>0$,依题知 α,β 为 $x^2-kx+k=0$ 的二实根.

依 $\Delta\geqslant 0$ 得 $k\geqslant 4$. 故 $(\alpha+\beta)_{\min}=4$.

13. 设 $u=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$,$v=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}$.

依均值不等式,有

$v\geqslant 2+\sqrt{2+1}=2+\sqrt{3}$($x=1$ 时取等号).

$\therefore u=\frac{1}{v}\leqslant\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$($x=1$ 时取等号).

14. 令 $t=\sqrt{13-4x}$,则 $y=-\frac{t^2}{2}+t+\frac{7}{2}(t\geqslant 0)$.

当 $t=1$,即 $x=3$ 时,有 $y_{\max}=4$.

15. $-1\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$.

16. 设 $x=\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$,$y=\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$.

由 $xy=\frac{y}{16}$ 知 $x=\frac{1}{16}$.

17. 令 $a=\tan\alpha+2\tan 2\alpha+2^2\tan 2^2\alpha+\cdots+2^{n-1}\tan 2^{n-1}\alpha$

$b=\cot\alpha+2\cot 2\alpha+2^2\cot 2^2\alpha+\cdots+2^{n-1}\cot 2^{n-1}\alpha$



则 $a-b=(\tan\alpha-\cot\alpha)+2(\tan2\alpha-\cot2\alpha)+\cdots+2^{n-1}(\tan2^{n-1}\alpha-\cot^{2n-1}\alpha)$

$=-2\cot2\alpha-2^2\cot2^2\alpha-\cdots-2^n\cot2^n\alpha$

$=\cot\alpha-2^n\cot2^n a-b$

故 $a=\cot\alpha-2^n\cot2^n\alpha$.

18. 若 $\cos A=0$,则易证结论成立.

若 $\cos A\neq0$,则 5 是方程 $x^2\cos A+x\sin B+\tan C=0$ 的根.

又由 $\Delta=\sin^2B-4\cos A\tan C=0$ 知 5 是其二重根.

依韦达定理得 $\tan C=25\cos A$.

19. 因 $\tan\frac{B}{2}>0$,乘以待证式得

$(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2})^2-4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1)\geqslant0$

以此为判别式构造一元二次方程

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cdot x^2+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\cdot x+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}-1=0$

$\because \cot\frac{B}{2}=\tan\frac{A+C}{2}=\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}$

$\therefore \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}-1=0$

则 1 是二次方程的根,故其判别式 $\Delta\geqslant0$,不等式获证.

20. 令 $\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)=a$.

分别令 $\theta=0,\frac{\pi}{2},-\alpha,-\beta$,代入上式,得

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\sin^2\beta=a & ①\\ 1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta=a & ②\\ \sin^2\alpha+\sin^2(\beta-\alpha)=a & ③\\ \sin^2\beta+\sin^2(\beta-\alpha)=a & ④\end{cases}$$

①+②得 $a=\frac{3}{2}$.

③-④得 $\sin(\beta-\alpha)\sin(\alpha+\beta)=0$.

因为 $0<\beta-\alpha<\pi,0<\alpha+\beta<2\pi$,所以 $\alpha+\beta=\pi$.

将 $a=\frac{3}{2},\alpha+\beta=\pi$ 代入①得

$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sin\alpha=\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由 $0<\alpha<\beta<\pi$ 得 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2}{3}\pi$.

第三章 换元思想化繁为简 妙不可言

在初中数学中我们就接触过换元法，它是把某个代数式看成一个新的未知数(元)来实行变量替换，其实质就是转化．通过这种转化常能化繁为简、化难为易、化陌生的为熟悉的．在高中数学中，我们常用换元法将分式转化为整式、将无理式转化为有理式、将高次式降幂、将超越式转化为代数式．

换元法，即变量替换作为一种重要的数学思想方法被广泛地应用于恒等式的证明、化简求值、解方程、解不等式、求函数的极值及研究函数性质等各个方面．

一、比值换元

例1 已知$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$，且$\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$，求$\frac{x}{y}$的值．

【解】 令$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}=k$，则$\sin\theta=kx$，$\cos\theta=ky$．

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore k^2=\frac{1}{x^2+y^2}$，$\sin^2\theta=k^2x^2=\frac{x^2}{x^2+y^2}$，$\cos^2\theta=k^2y^2=\frac{y^2}{x^2+y^2}$

代入$\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$，得

$$\frac{y^2}{x^2(x^2+y^2)}+\frac{x^2}{y^2(x^2+y^2)}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$$

即 $3x^4+3y^4-10x^2y^2=0$

亦即 $(3x^2-y^2)(x^2-3y^2)=0$

$\therefore \frac{x}{y}=\pm\sqrt{3}$或$\frac{x}{y}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【解后感言】 这种比值换元法大家都比较熟悉，只不过应注意灵活运用罢了．本例也可以由$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$得$\frac{x}{y}=\tan\theta$，再求出$\tan\theta$的值即可．想试试吗？你用功哪！

天天箴言

二、整体换元

例1 已知 $x\in\mathbf{R}, m\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{R}$，且 $m\neq n$. 证明：分式 $\dfrac{(x+m)^2-4mn}{2(x-n)}$ 的值不可能在 $2m$ 和 $2n$ 之间.

【证明】 设 $t=\dfrac{(x+m)^2-4mn}{2(x-n)}$，去分母，整理得 x 的二次方程

$$x^2+2(m-t)x+(m^2-4mn+2nt)=0$$

$\because x\in\mathbf{R}$

$\therefore \Delta=4(m-t)^2-4(m^2-4mn+2nt)\geqslant 0$

得　$(t-2m)(t-2n)\geqslant 0$

当 $m<n$ 时，有 $t\leqslant 2m$ 或 $t\geqslant 2n$；

当 $m>n$ 时，有 $t\leqslant 2n$ 或 $t\geqslant 2m$.

故 $\dfrac{(x+m)^2-4mn}{2(x-n)}$ 不可能在 $2m$ 与 $2n$ 之间.

【解后感言】 对求代数式的值域问题，常作整体换元，利用判别式求解. 对多变元的问题，有时要辅以参数讨论.

例2 求 $5+55+555+\cdots+\underbrace{555\cdots5}_{n个5}$ 的和.

【解】 设 $S=5+55+555+\cdots+\underbrace{555\cdots5}_{n个5}$，则　①

$$10S=50+550+5550+\cdots+\underbrace{555\cdots50}_{n-1个5}+\underbrace{555\cdots50}_{n个5} \quad ②$$

①－②得

$$-9S=\underbrace{5+5+\cdots+5}_{n个5相加}-\underbrace{555\cdots50}_{n个5}$$

$$=5n-5\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10$$

$$=5n-\frac{5}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times10$$

$$=5n-\frac{5}{9}(10^n-1)\times10$$

$$\therefore S=\frac{5}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right].$$

【解后感言】 这种方法是整体思维在数列求和中的典型运用.



例3 设 x 是实数,证明:

$$(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x\geqslant -10.$$

【证明】 令 $y=x^2+4x+2$. 易知 $y=(x+2)^2-2\geqslant -2$, $y_{\min}=-2$.

则 $(x^2+4x+5)(x^2+4x+2)+2x^2+8x$

$=(y+3)y+2y-4$

$=y^2+5y-4=\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{41}{4}$

$=f(y)$

依 $f(y)$的单调性及 $y_{\min}=-2$ 知

$$f_{\min}(y)=f(-2)=(-2)^2+5(-2)-4=-10$$

故原不等式成立.

【解后感言】 这里令 $x^2+4x+2=y$ 是相对的"整体",因为相对于待证式又是"局部",妙在其原式的左边能用此"局部"表出,这种代换也很具代表性.

三、倒数换元

例1 假设 $y=f(x)$ 是实数函数(即 $x, f(x)\in\mathbf{R}$),且满足 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$. 证明:$|f(x)|\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

【证明】 用$\frac{1}{x}$代换已知式中的 x,则

$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x}$

与已知式联立,消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,得

$-3f(x)=x+\frac{2}{x}$

即 $x^2+3xf(x)+2=0$

$\because x\in\mathbf{R}, f(x)\in\mathbf{R}$

$\therefore \Delta=9f^2(x)-4\times 2\geqslant 0$

故$|f(x)|\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

【解后感言】 利用题设条件或待证式中存在的系数关系进行倒数代换常能使问题很快获解. 有的使用相反数代换,如 $af(x)+bf(-x)=cx$ 的问题.



例2 证明：$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

【证明】 设 $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}$

$y=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{101}$

又 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\frac{5}{6}<\frac{6}{7},\cdots,\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$

$\therefore x^2<xy=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$

$\therefore x<\frac{1}{10}$

【解后感言】 这里先根据待证式作整体换元，又将其作变形后的倒数代换，其巧妙的解题思路来源于整体观察和类比联想.

例3 函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}_+$，且对任意正实数 x、y 均有$f(xy)=f(x)+f(y)$，若 $f(\sqrt{7}-\sqrt{2})+f(\sqrt{7}+\sqrt{2})=2$，求 $f\left(\frac{1}{\sqrt{26}-1}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{26}+1}\right)$的值.

【解】 $\because f(xy)=f(x)+f(y)$

$\therefore f(\sqrt{7}-\sqrt{2})+f(\sqrt{7}+\sqrt{2})=f[(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})]=f(5)=2$

令 $y=1$ 时，则 $f(x)=f(x)+f(1)$，

$\therefore f(1)=0$；

令 $y=\frac{1}{x}$，则 $f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$，

$\therefore f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\therefore f\left(\frac{1}{\sqrt{26}-1}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{26}+1}\right)$

$=f\left[\frac{1}{(\sqrt{26}-1)(\sqrt{26}+1)}\right]$

$=f\left(\frac{1}{25}\right)=-f(25)$

$=-[f(5)+f(5)]=-4$.

四、均值换元

例1 分解因式$(x+1)(x+3)(x-2)(x-4)+24$.

【解】 原式$=(x+1)(x-2)\cdot(x+3)(x-4)+24$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-12)+24$

令 $y=\frac{(x^2-x-2)+(x^2-x-12)}{2}=x^2-x-7$，则

原式$=(y+5)(y-5)+24=y^2-1$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-8)$

$=(x+2)(x-3)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{33}}{2}\right).$

【解后感言】 这里令 $y=x^2-x-7$(平均值)为均值换元,比令 $y=x^2-x$ 更为简便.

例 2 解方程 $2^{4x}+(2^x-2)^4-34=0$.

【思路探索】 此为指数方程,若将 $(2^x-2)^4$ 展开来解,显然很复杂.观察 $2^{4x}=(2^x)^4$、$(2^x-2)^4$ 两个底数结构,考虑用它们的平均数 2^x-1 作为新变量 t,则原方程可整理成关于 t 的双二次方程.

【解】 设 $t=2^x-1$,则 $2^{4x}=(2^x)^4=(t+1)^4$,因此,原方程变为

$(t+1)^4+(t-1)^4-34=0$

即 $\quad t^4+6t^2-16=0.$

又设 $t^2=y$,则 $y^2+6y-16=0$.解之得 $y_1=-8$(舍去),$y_2=2$,因而 $t=\pm\sqrt{2}$.

$\because t=2^x-1>-1$,

$\therefore$ 取 $t=\sqrt{2}$,则 $2^x=\sqrt{2}+1$,解得 $x=\log_2(\sqrt{2}+1)$.

故原方程的解为 $x=\log_2(\sqrt{2}+1)$.

例 3 解方程 $(2x^2-x-6)^2+(2x^2-x-8)^2=4$.

【解】 设 $2x^2-x-6$ 与 $2x^2-x-8$ 的平均值 $2x^2-x-7=t$,则 $(t+1)^2+(t-1)^2=4$,即 $2t^2+2=4$,解得 $t=\pm1$.

$t=1\Rightarrow 2x^2-x-8=0\Rightarrow x_1=\dfrac{1+\sqrt{65}}{4},x_2=\dfrac{1-\sqrt{65}}{4};$

$t=-1\Rightarrow 2x^2-x-6=0\Rightarrow x_3=2,x_4=-\dfrac{3}{2}.$

故 $x_i(i=1,2,3,4)$ 均是原方程的解.

例 4 已知:$x_1+x_2+x_3+x_4=6 \qquad ①$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=12 \qquad ②$

证明:$0\leqslant x_i\leqslant 3(i=1,2,3,4)$.

【思路探索】 由 x_1,x_2,x_3,x_4 的对称性知,只须证明其中一个属于区间[0,3]即可.

【证明】 由①得 $x_1+x_2+x_3=6-x_4$.

令 $x_j=\dfrac{6-x_4}{3}+t_j(t_j\in\mathbf{R},j=1,2,3)$,则 $t_1+t_2+t_3=0$.

由②得

$12-x_4^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$=\left(\dfrac{6-x_4}{3}+t_1\right)^2+\left(\dfrac{6-x_4}{3}+t_2\right)^2+\left(\dfrac{6-x_4}{3}+t_3\right)^2$

$=3\left(\dfrac{6-x_4}{3}\right)^2+2\cdot\dfrac{6-x_4}{3}(t_1+t_2+t_3)+t_1^2+t_2^2+t_3^2$

$=\frac{(6-x_4)^2}{3}+(t_1^2+t_2^2+t_3^2)\geqslant\frac{(6-x_4)^2}{3}$

即　$36-3x_4^2\geqslant 36-12x_4+x_4^2$

$\therefore 0\leqslant x_4\leqslant 3$

依对称性知 $0\leqslant x_i\leqslant 3(i=1,2,3,4)$.

【解后感言】 对于 n 个变量的和为定值的问题，常以它们的平均值加上一个增量 t_i 的形式来换元. 注意其中 $\sum t_i=0$，常具有效的转化作用.

五、三角换元

解题秘言：三角换元有化弦、化切、化割、万能置换等常用形式.

1. **化弦**

例1 在实数集上解无理方程

$$\frac{1-2x^2}{2x\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}+x}.$$

【解】 令 $x=\sin\theta(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 且 $\theta\neq 0)$，原方程变为

$$\frac{1-2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

即　$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow\cot 2\theta=\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore 2\theta=k\pi+\theta+\frac{\pi}{4},\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

$\because -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore k=0,\theta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

经检验知 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为原方程的根.

【解后感言】 遇 $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin\theta$（或 $a\cos\theta$）；遇 $\sqrt{a-x}$ 可令 $x=a\sin^2\theta$（或 $a\cos^2\theta$）；遇 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 可令 $\begin{cases}x=k\cos\theta\\y=k\sin\theta\end{cases}(0\leqslant k\leqslant a)$. 均应注意角的范围. 这恰好体现三角函数定义在解题中的活用.



例2 已知：$a^2+b^2=c^2(a,b,c,\in \mathbf{R}_+)$.

证明：$a^n+b^n<c^n(n>2$ 且 $n\in \mathbf{N})$.

【思路探索】 已知条件 $a^2+b^2=c^2$ 可转化为 $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$.

【证明】 令 $\frac{a}{c}=\sin\theta, \frac{b}{c}=\cos\theta$.

$\because a,b,c\in \mathbf{R}_+$

$\therefore 0<\sin\theta<1, 0<\cos\theta<1$.

又 $\because n-2$ 为大于 1 的自然数.

$\therefore \begin{cases}0<(\sin\theta)^{n-2}<1\\0<(\cos\theta)^{n-2}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^n\theta<\sin^2\theta\\\cos^n\theta<\cos^2\theta\end{cases}$

$\therefore \sin^n\theta+\cos^n\theta<\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

即 $\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<1\Rightarrow a^n+b^n<c^n$.

【解后感言】 利用正余弦函数的有界性，作化弦换元后来证不等问题用得十分灵活、广泛.

2. **化切**

例3 已知 $x>0,y>0$，证明：$\sqrt{(1+x)(1+y)}\geqslant 1+\sqrt{xy}$.

【证明】 令 $x=\tan^2\theta, y=\tan^2\varphi$，不妨设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则

$\sqrt{(1+x)(1+y)}=\sqrt{(1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\varphi)}$

$=\sqrt{\sec^2\theta\sec^2\varphi}=\frac{1}{\cos\theta\cdot\cos\varphi}$

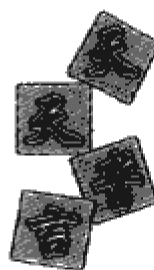
又 $1\geqslant\cos(\theta-\varphi)$

$\therefore \sqrt{(1+x)(1+y)}=\frac{1}{\cos\theta\cos\varphi}\geqslant\frac{\cos(\theta-\varphi)}{\cos\theta\cos\varphi}$

$=\frac{\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta\cos\varphi}=1+\tan\theta\tan\varphi$

$=1+\sqrt{\tan^2\theta\tan^2\varphi}=1+\sqrt{xy}$

【解后感言】 遇 $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan\theta$（或 $a\cot\theta$）；遇 $\sqrt{a+x}$ 可令 $x=a\tan^2\theta$（或 $a\cot^2\theta$）



3. **化割**

例4 求方程 $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$ 的实数根.

【解】 令 $x=\sec\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

原方程转化为

$\sec\theta+\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}=\dfrac{35}{12}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{35}{12}\Rightarrow 12(\sin\theta+\cos\theta)=35\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow 144(\sin\theta+\cos\theta)^2=1225(\sin\theta\cos\theta)^2$ ①

令 $\sin\theta\cos\theta=k$,代入①得

$144(1+2k)=1225k^2$

$\Rightarrow 1225k^2-288k-144=0$

解得 $k=\dfrac{12}{25}$ 或 $k=-\dfrac{12}{49}$(舍去).

由 $k=\sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}\Rightarrow\sin2\theta=\dfrac{24}{25}\Rightarrow\cos2\theta=\pm\dfrac{7}{25}$.

当 $\cos2\theta=\dfrac{7}{25}$ 时,$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos2\theta}{2}}=\dfrac{4}{5}$,$x_1=\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{5}{4}$.

当 $\cos2\theta=-\dfrac{7}{25}$ 时,$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$,$x_2=\dfrac{5}{3}$.

经检验知 $x_1=\dfrac{5}{4}$,$x_2=\dfrac{5}{3}$ 为原方程的根.

【解后感言】 遇 $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec\theta$(或 $a\csc\theta$);遇 $\sqrt{x-a}$ 可令 $x=a\sec^2\theta$(或 $a\csc^2\theta$)

4. **万能置换**

例5 解方程 $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$.

解法一 应用万能公式换元. 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t(x\neq 2k\pi+\pi)$,则 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$,$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,原方程变为

$\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=1$

整理化简得

$2t(1-t)(t^2+t+2)=0$

$\Leftrightarrow t=0,t=1$

$\Leftrightarrow\tan\dfrac{x}{2}=0,\tan\dfrac{x}{2}=1$



$\Leftrightarrow x_1=2k\pi, x_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

$\because x=2k\pi+\pi$ 不是原方程的根，

$\therefore x_1=2k\pi, x_2=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 是原方程的根.

【解后感言】 应用万能公式换元解三角方程时，因 $t=\tan\frac{x}{2}$ 中 $x\neq(2k+1)\pi$，所以有可能失去解 $x=(2k+1)\pi$，故应加以检验，以免失根；又应用万能公式换元，通常是升幂，若次数过高不易解出，则应另辟新径.

解法二 设 $\sin x+\cos x=y$，则 $=-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$.

又 $y^2=1+2\sin x\cos x$

$\therefore \sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$

代入原方程，得

$y+\frac{y^2-1}{2}=1\Leftrightarrow(y+3)(y-1)=0$

$\therefore y_1=-3$（舍去），$y_2=1$.

故 $\sin x+\cos x=1$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x=2k\pi$ 或 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

【解后感言】 对含 $\sin x$、$\cos x$ 的对称式常可用此法. 换元法在解三角方程中应用广泛且灵活，读者应注意自我总结.

六、对称换元

例1 若 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$. 证明：x,y,z 成等差数列.

【证明】 令 $x=a+b, z=a-b$. 代入已知等式，得

$(2b)^2-4(a+b-y)(y-a+b)=0$

$b^2-[b+(a-y)][b-(a-y)]=0$

即 $(a-y)^2=0$

$\therefore a=y$

$\therefore x+z=2a=2y$

故 x,y,z 成等差数列.

【解后感言】 实际上这里是采用逆向思维的方法来进行设元的：$x+z=2y$，是要证的，$x+z=2a$ 是所设的，剩下的问题就是证 $a=y$，这正是上述证题的思路.

例 2 函数 $y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ 的最大值是多少？

【解】 令 $\sin x=a+b,\cos x=a-b$.

由 $\sin^2x+\cos^2x=1$，得 $a^2+b^2=\frac{1}{2}$.

又 $2a=\sin x+\cos x$，知 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore y=(a+b)(a-b)+(a+b)+(a-b)$

$=a^2-b^2+2a$

$=a^2-\left(\frac{1}{2}-a^2\right)+2a$

$=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-1$

故当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

【解后感言】 若直接将 $\sin x$ 用 $\cos x$ 表示，则带根式，若用万能公式又出现高次幂，这里根据题目的特点，作对称换元后很快就转化为一元二次函数的最值问题.

另解 设 $t=\sin x+\cos x, t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

$\therefore y=f(t)=\frac{t^2-1}{2}+t=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$.

由二次函数图象知 $y_{\max}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$.

例 3 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，证明：

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc.$$

【证明】 设 $a+b-c=2x,b+c-a=2y,c+a-b=2z$，则

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=8xyz$$

$\because x+y=b,y+z=c,z+x=a$ 均为正数，

$\therefore x,y,z$ 中至多只能有一个负数.

现分两种情况讨论：

(1)若 x,y,z 中有一个为负数，则 $xyz\leqslant 0$，而 $abc>0$，$8xyz<abc$，原不等式成立；

(2)若 x,y,z 中无负数存在，则 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$，有

$$2\sqrt{xy}\leqslant x+y,2\sqrt{yz}\leqslant y+z,2\sqrt{zx}\leqslant z+x$$

于是 $8xyz\leqslant(x+y)(y+z)(z+x)$

即 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc$

故原不等式得证.

【解后感言】 待证不等式是对称式，这给对称设元创造了条件，虽然换元之后没有减少变元的个数，但为应用平均值不等式提供了条件.



实战秘修三

1. 已知 a,b,c 是不为 1 的正数，$x,y,z\in\mathbf{R}_+$，且有 $a^x=b^y=c^z$ 和 $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$. 证明：$a,b,c$ 成等比数列.

2. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三边长分别为 a,b,c，及 a',b',c' 若 $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ 是与 x 无关的定值，证明：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

3. 求 $1+2r+3r^2+4r^3+\cdots+nr^{n-1}$，其中 $r\in\mathbf{R}$.

4. 解方程 $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$.

5. 解方程 $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$.

6. 解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$.

7. 解方程 $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$.

8. 若 $a,b\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b=1,a\neq b$. 证明：$a^4+b^4>\frac{1}{8}$.

9. 若 $x+y+z=a$，证明：$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{a^2}{3}$.

10. 已知 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x-\frac{1}{x}$，求 $f(x)$.

11. 已知 $f(1+\cos x)=1+\cos^2 x$，求 $f(x)$.

12. 已知 $f(e^x)=x^2-2x+3$. 求 $f(x)$ 的最小值.

13. 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$. 证明：$a^2+b^2=1$.

14. 设点 $P(x,y)$ 是单位圆内（含圆周）的一点，试求 $x^2+4xy-y^2$ 的最大值和最小值.

15. 已知 $x^2-y^2=1$，求 $\frac{1}{x^2}+\frac{2y}{x}$ 的取值范围.

16. 实数 x,y 满足 $x^2+4y^2=4x$. 证明：$2-\sqrt{5}\leqslant x+y\leqslant 2+\sqrt{5}$.

17. 求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值和最小值.

18. 已知 $f(\cos x)=\cos 3x$，求 $f(\sin x)=\sin x$ 的解集.

19. 解方程 $\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x+2=0$.

20. 设实数 a,b,c 满足方程组

$$\begin{cases}a^2-bc-8a+7=0\\b^2+c^2+bc-6a+6=0\end{cases}$$

求 a 的取值范围.

实战秘修三答案与提示

1. 令 $a^x=b^y=c^z=k$,得 $x=\log_a k$,$y=\log_b k$,$z=\log_c k$.

运用换底公式得 $\frac{\lg a}{\lg k}+\frac{\lg c}{\lg k}=\frac{2\lg b}{\lg k}\Rightarrow \lg a+\lg c=2\lg b\Rightarrow ac=b^2$.

2. 令 $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=k$(定值),则有

$(a-a'k)x^2+(b-b'k)x+(c-c'k)=0$

依其与 x 无关知各项系数为 0,可得 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

3. 设 $S=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}$ ①

则 $rS=r+2r^2+3r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$ ②

当 $r\neq1$ 时,①-②得 $S=\frac{1+r^n}{(1-r)^2}-\frac{nr^2}{1-r}$;

当 $r=1$ 时,$S=\frac{n(1+n)}{2}$.

4. 先观察得 $x_1=-1$,原方程除以 $x+1$ 得

$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$

令 $x+\frac{1}{x}=y$,解得

$x_2=2,x_3=\frac{1}{2},x_4=-2+\sqrt{3},x_5=-2-\sqrt{3}$.

5. 可设 $x-\frac{1}{x}=y$,解得 $x_1=1,x_2=1,x_3=2,x_4=-\frac{1}{2}$.

6. 令 $t=\sqrt{2x+5}\,(t\geqslant0)$,则 $x=\frac{t^2-5}{2}$.

代入原不等式并整理得 $(t+1)(t-3)<0$

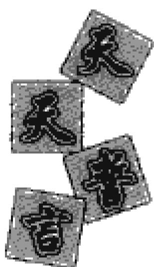
$\therefore 0\leqslant t<3$

$\therefore \begin{cases}\sqrt{2x+5}<3\\ 2x+5\geqslant0\end{cases}\Rightarrow -\frac{5}{2}\leqslant x<2$

7. 令 $y=\frac{1}{4}[(a-x)+(b-x)+(a+b-2x)]=\frac{a+b}{2}-x$

代入原方程,整理得 $y\left[y^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]=0$

解得 $x_1=a,x_2=b,x_3=\frac{a+b}{2}$.



8. 令 $a=\frac{1}{2}+t_1, b=\frac{1}{2}+t_2$，注意 $t_1+t_2=0$ 且 $t_1\neq t_2$，代入展开即可得证.

9. 令 $x=\frac{a}{3}+t_1, y=\frac{a}{3}+t_2, z=\frac{a}{3}+t_3$，则 $t_1+t_2+t_3=0$.

所以 $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{3}+(t_1{}^2+t_2{}^2+t_3{}^3)\geqslant\frac{a^2}{3}$.

10. 令 $\frac{x-1}{x+1}=t$，求得 $f(x)=\frac{4x}{1-x^2}$.

11. 令 $1+\cos x=t$. 求得 $f(x)=x^2-2x+2$.

12. $f(x)=(\ln x-1)^2+2\geqslant 2, f_{\min}(x)=2$.

13. 令 $a=\sin\alpha, b=\sin\beta, \alpha, \beta\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

14. 设 $x=k\cos\theta, y=k\sin\theta(0\leqslant k\leqslant 1)$，则

$x^2+4xy-y^2=k^2(2\sin 2\theta+\cos 2\theta)=\sqrt{5}k^2\sin(2\theta+\varphi)$

$\therefore -\sqrt{5}\leqslant x^2+4xy-y^2\leqslant\sqrt{5}$.

15. 令 $x=\sec\theta, y=\tan\theta(\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z})$，则

$\frac{1}{x^2}+\frac{2y}{x}=-\sin^2\theta+2\sin\theta+1=2-(1-\sin\theta)^2$

$\therefore -2<\frac{1}{x^2}+\frac{2y}{x}<2$.

16. $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$. 令 $x=2+\cos\theta, y=\sin\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，则

$x+y=2+2\cos\theta+\sin\theta=2+\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$

$\therefore 2-\sqrt{5}\leqslant x+y\leqslant 2+\sqrt{5}$.

17. 由 $0\leqslant x\leqslant 1$，可令 $x=\sin^2\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$. 则

$y=\sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{\cos^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta+\left(\frac{\pi}{4}\right)$

故 $y_{\min}=1, y_{\max}=\sqrt{2}$.

18. $f(\sin x)=-\sin 3x$，由 $\sin 3x+\sin x=0$，得 $\sin x(1-\sin^2 x)=0$，其解集为

$\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$.

19. 原方程为$(\sin x+\cos x)+\dfrac{1}{\sin x\cos x}+\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=-2$.

令 $\sin x+\cos x=y$,则 $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(y^2-1)$.

则原方程为 $y+\dfrac{2}{y^2-1}+\dfrac{2y}{y^2-1}=-2$,解得 $y_1=0,y_2=-1$.

显然 $y=-1$ 为增根.

由 $y=0$ 即 $\sin x+\cos x=0$,得 $\tan x=-1$.

$\therefore \{x\mid x=k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\in \mathbf{Z}\}$为原方程的解集.

20. 令 $b=x+y,c=x-y$,则条件式为

$$\begin{cases}y^2-x^2+(a^2-8a+7)=0\\3x^2+y^2-6(a-1)=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{4}(a-1)^2 & ①\\y^2=-\dfrac{3}{4}(a^2-10a+9) & ②\end{cases}$

其中①式恒成立,对②而言,应有 $a^2-10a+9\leqslant 0$,解得 $1\leqslant a\leqslant 9$ 为所求的范围.



第四章 整体思想雄霸天下 彰显王者风范

解数学问题时，人们常习惯于把它分成若干个较简单的问题，然后再各个击破，分而治之. 有时，研究问题若能有意识地放大考察问题的“视角”，将需要解决的问题看作一个整体，通过研究问题的整体形式、整体结构，并注意已知条件及待求结论在这个“整体”中的地位和作用，然后通过对整体结构的调节和转化使问题获解. 我们把这种从整体观点出发研究问题的心理活动过程，叫做整体思维或整体思想.

整体思维是数学解题中的一种常用思维方法. 由于这种思维具有一定的简约性和跳跃性，掌握起来有一定的难度. 在这里我们通过一些具体实例由浅入深地进行展开和讨论，以便读者领会和掌握.

一、整体观察

解题秘言：整体观察就是从宏观上来考察问题的结构，从而制订出合理的解题方案.

例1 (2008 年江苏高考 · T23)请先阅读：在等式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1(x\in \mathbf{R})$ 的两边对 x 求导 $(\cos 2x)'=(2\cos^2 x-1)'$. 由求导法则得 $(-\sin 2x)\cdot 2=4\cos x\cdot(-\sin x)$，化简后得等式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

(Ⅰ)利用上述想法(或者其他方法)，试由等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n(x\in \mathbf{R}$，整数 $n\geqslant 2)$. 证明 $n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$.

(Ⅱ)对于整数 $n\geqslant 3$，求证：

(ⅰ) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k=0$；

(ⅱ) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kk^2C_n^k=0$；

(ⅲ) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

【规范解析】 （Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$

$=-\frac{\ln x}{(1+x)^2}$.

故当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

由此知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的极大值为 $f(1)=\ln 2$，没有极小值.

（Ⅱ）（ⅰ）当 $a\leqslant 0$ 时，

由于 $f(x)=\frac{(1+x)\ln(1+x)-x\ln x}{1+x}$

$=\frac{\ln(1+x)+x[\ln(1+x)-\ln x]}{1+x}>0$，

故关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$.

（ⅱ）当 $a>0$ 时，由 $f(x)=\frac{\ln x}{1+x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 知

$f(2^n)=\frac{\ln 2^n}{1+2^n}+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$，其中 n 为正整数.

且有 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{a}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n}<e^{\frac{a}{2}}-1\Leftrightarrow n>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$.

又 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{\ln 2^n}{1+2^n}=\frac{n\ln 2}{1+(1+1)^n}<\frac{n\ln 2}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2\ln 2}{n-1}$，

且 $\frac{2\ln 2}{n-1}<\frac{a}{2}\Leftrightarrow n>\frac{4\ln 2}{a}+1$.

取整数 n_0 满足 $n_0>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$，$n_0>\frac{4\ln 2}{a}+1$，且 $n_0\geqslant 2$，则 $f(2^{n_0})=\frac{n_0\ln 2}{1+2^{n_0}}+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n_0}}\right)<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$，

即当 $a>0$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集不是 $(0,+\infty)$.

综合（ⅰ）（ⅱ）知，存在 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$，且 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

例2 设 $a,b\in\mathbf{R}_+$，且 $a\neq b$，求函数

$$f(x)=(a\sin^2x+b\cos^2x)(a\cos^2x+b\sin^2x)$$

何时取得最大值？最大值是多少？

【解】 $\because a,b\in\mathbf{R}_+$，且 $a\neq b$

$\therefore a\sin^2x+b\cos^2x>0$，$a\cos^2x+b\sin^2x>0$

又 $(a\sin^2x+b\cos^2x)+(a\cos^2x+b\sin^2x)=a+b$

依均值不等式有

$f(x)=(a\sin^2x+b\cos^2x)(a\cos^2x+b\sin^2x)$

$\leqslant\left[\frac{(a\sin^2x+b\cos^2x)+(a\cos^2x+b\sin^2x)}{2}\right]^2$

$=\frac{(a+b)^2}{4}$

当且仅当 $a\sin^2x+b\cos^2x=a\cos^2x+b\sin^2x$，即 $\tan^2x=1$(因为 $a\neq b$)，亦即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取得最大值$\frac{1}{4}(a+b)^2$.

【解后感言】 通过整体观察，发现和应用均值不等式是关键的一步."整体观察"法适用于社会各个领域，是我们中国人思维的东方特色.已故伟人毛主席就是通过整体观察思维解决革命战争问题的高手，他的大作《毛泽东选集》也很值得二十一世纪的广大师生学习，借以改善自己的思维.

二、整体代入

解题秘言：在求解有些问题时，不能(或不必)分别求出各个量的具体值，我们常考虑求出这些量所构成的某代数式的整体值，继而达到解题的目的.

例1 长方体的全面积为11，十二条棱长度之和为24，则这个长方体的一条对角线长为 ( )

A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{14}$ C. 5 D. 6

【解】 设长方体的长、宽、高分别为 a,b,c 对角线长为 l. 依题设有

$$\begin{cases}2ab+2bc+2ca=11\\4a+4b+4c=24\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}2(ab+bc+ca)=11\\a+b+c=6\end{cases}$$

$\therefore\quad l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{6^2-11}=5$

故选 C.

【解后感言】 从这里不难体会"整体代入"的思想方法及其优越性.

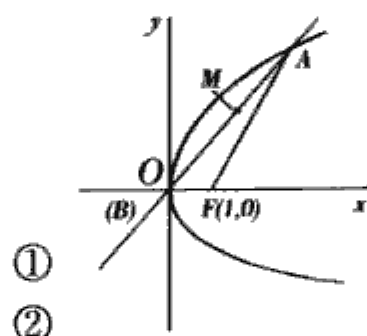
例2 (2008年全国Ⅱ高考文·T15)已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，A、B 是 C 上的两点，线段 AB 的中点为 $M(2,2)$ 则△ABF 的面积等于________.

【规范解析】由抛物线 C：$y^2=4x$ 得焦点 $F(1,0)$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$

则 $y_1^2=4x_1$ ①

$y_2^2=4x_2$ ②



①－②得 $y_1^2-y_2^2=4(x_1-x_2)$，

$\therefore \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{4}{2\times 2}=1$.

即直线 AB 的斜率 $k=1$.

又直线 AB 过点 $M(2,2)$，

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y-2=x-2$，即 $y=x$，

$\therefore \begin{cases} y=x \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow x^2-4x=0$

$\therefore x_1+x_2=4, x_1x_2=0$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k_{AB}^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}=4\sqrt{2}$.

点 F 到 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$.

【答案】 2

例 3 （2008年福建高考理·T10）在$\triangle ABC$中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c 若$(a^2+c^2-b^2).\tan B=\sqrt{3}ac$，则角 B 的值为 （　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

【规范解析】 由$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，

联想到余弦定理并代入得

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan B}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\cos B}{\sin B}$.

显然 $B\neq\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在$(0,\pi)$内 $B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

【答案】 D

三、整体变形

解题秘言：把求解问题看作是一个整体，然后根据题目的特点进行变形，以达到求解的目的.

例 1 计算$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

【思路探索】 分别求出这两个二重根式的值困难较大，不妨设其整体值为 x，然后再作变形进行观察.

【解】 设$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=x$.

两边同时立方，得



$(7+5\sqrt{2})+(7-5\sqrt{2})+3\sqrt[3]{7^2-(5\sqrt{2})^2}x=x^3$

整理，得 $x^3+3x-14=0$

即 $(x-2)(x^2+2x+7)=0$

$\because x^2+2x+7\neq 0$

$\therefore x=2$，即原式$=2$.

【解后感言】 这种整体变形思想首先来源于整体观察，其中蕴含方程的思想.

例2 设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，S_n是其前n项的和. 证明：$\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$.

【思路探索】 若孤立地寻求S_n、S_{n+1}及S_{n+2}的关系，则需讨论公比q，而S_n、S_{n+1}、S_{n+2}的整体变形出发，则可以简化运算.

【证明】 设$\{a_n\}$的公比为q，则$S_{n+1}=a_1+qS_n$，$S_{n+2}=a_1+qS_{n+1}$.

$\therefore S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=S_n(a_1+qS_{n+1})-(a_1+qS_n)S_{n+1}$

$=a_1(S_n-S_{n+1})$

$=-a_1a_{n+1}<0$

$\therefore S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$

两边取常用对数，得$\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$.

四、整体联想

解题秘言：所谓整体联想，就是从分析问题的整体形象或整体结构出发，充分挖掘各学科知识的纵横联系，运用有关知识来解决这一问题.

例1 给定数列$\{x_n\}$，且$x_{n+1}=\dfrac{x_n+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})x_n}$，则$x_{2007}-x_{123}=$______

【思路探索】 从欲求的式子看，$\{x_n\}$可能具有周期性；从条件等式的结构看，可联想到公式$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，利用好这样的条件，可求出周期，进而解决问题.

【解】 模拟数列$\tan\alpha_n=x_n$，又$2-\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{12}$，则

$$x_{n+1}=\frac{\tan\alpha_n+\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\alpha_n\cdot\tan\frac{\pi}{12}}=\tan\left(\alpha_n+\frac{\pi}{12}\right),$$

$$x_{n+2}=\tan\left(\alpha_n+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\alpha_n+2\cdot\frac{\pi}{12}\right),$$

$x_{n+12}=\tan\left(\alpha_n+\frac{\pi}{12}\cdot 12\right)=\tan\alpha_n$,

故数列$\{x_n\}$是以 12 为周期的周期函数.

故 $x_{2007}-x_{123}=x_{167\times 12+3}-x_{10\times 12+3}=x_3-x_3=0$.

【解后感言】 正确的思考与判断足以使问题豁然开朗.人曰:人类失去联想,世界将会怎样?整体联想,您奋飞的翅膀!

五、整体配对

解题秘言:对有些问题,根据其本身的特点,相应地配出与其相匹配的另一个整体,然后根据其相依的关系而求解.

例 1 求 $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$的值.

【解】 设 $a=\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$,

配 $b=\cos^2 20°+\sin^2 80°+\sqrt{3}\cos 20°\sin 80°$.

$\because a+b=2+\sqrt{3}\sin 100°=2+\sqrt{3}\cos 10°$, ①

$a-b=-\cos 40°+\cos 160°+\sqrt{3}\sin(20°-80°)$

$=-(\cos 40°+\cos 20°)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}$

$=-\sqrt{3}\cos 10°-\frac{3}{2}$, ②

①+②得 $a=\frac{1}{4}$.

故 $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°=\frac{1}{4}$

【解后感言】 也可以配 $b=\cos^2 20°+\sin^2 80°-\sqrt{3}\cos 20°\sin 80°$.这种方法称之为和式配对.正所谓:和式配对妙如花,加加减减题拿下!

例 2 证明:$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}(n\in\mathbf{N}^+)$

【证明】 设 $a=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$

配 $b=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{x}{2^n}$

则 $ab=\frac{1}{2^n}\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}$

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2^2}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot b \quad \because b\neq 0$$

$\therefore a=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$故原式获证.

【解后感言】 称这种配对方法为积式配对. 有诗云:积式配对好,出入如鸳鸯;两式喜相乘,犹若人相逢!

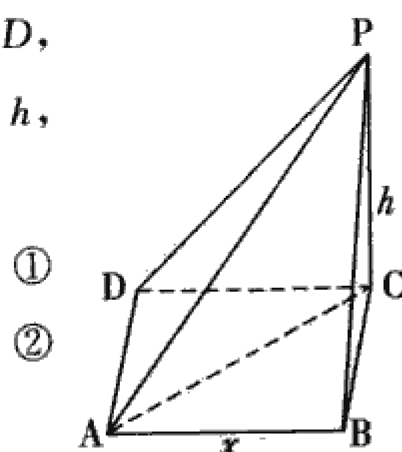
六、设而不求

解题秘言:在求解某个量的过程中,可能要借助其他的量,对于这些辅助量,我们只是表出而不必求出,谓之为“设而不求”,其实质也是一种整体代换,只不过是又有其自身特点而已.

例1 (2008年宁夏高考理·T12)某几何体的一条棱长为$\sqrt{7}$,在该几何体的正视图中,这条棱的投影是长为$\sqrt{6}$的线段,在该几何体的侧视图与俯视图中,这条棱的投影分别是长为a和b的线段,则$a+b$的最大值为 ( )

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{5}$

【规范解析】 如图,由题设知:$PA=\sqrt{7}$,$PC\perp$面$ABCD$,PD为PA的正视图,AC为俯视图,PB为侧视图. 设$PC=h$,$AB=x$. 由已知得$AD=1$.



即$a^2+x^2=PA^2=7\Rightarrow b^2+h^2=PA^2=7$ ①

又$a^2-h^2=BC^2=1$ ②

①+②得 $a^2+b_2=8$,

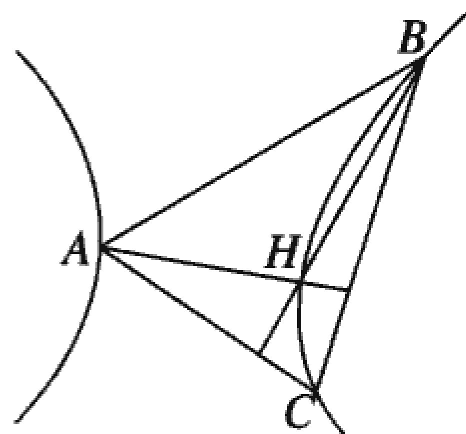
$\because\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

$\therefore a+b\leqslant 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=4$.

所以选C.

【答案】 C

例 2 若 A,B,C 是 $xy=1$ 上的三点，证明：$\triangle ABC$ 的垂心 H 必在此双曲线上.



【证明】 设 A、B、C 三点的坐标顺次为 $\left(x_1,\frac{1}{x_1}\right)$，$\left(x_2,\frac{1}{x_2}\right)$，$\left(x_3,\frac{1}{x_3}\right)$，则

$$k_{BC}=\frac{\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_2}}{x_3-x_2}=-\frac{1}{x_2x_3},$$

$$k_{AH}=-\frac{1}{k_{BC}}=x_2x_3$$

于是，AH 的方程为 $y-\frac{1}{x_1}=x_2x_3(x-x_1)$

同理，BH 的方程为 $y-\frac{1}{x_2}=x_3x_1(x-x_2)$

点 H 的坐标 (x_H,y_H) 同时满足这两个方程.

即 $y_H-\frac{1}{x_1}=x_2x_3(x_H-x_1)$ ①

$y_H-\frac{1}{x_2}=x_3x_1(x_H-x_2)$ ②

①与②两端交叉相乘，得

$$\left(y_H-\frac{1}{x_1}\right)x_3x_1(x_H-x_2)=\left(y_H-\frac{1}{x_2}\right)x_2x_3(x_H-x_1)$$

化简得 $x_Hy_H(x_1-x_2)=x_1-x_2$.

$\because x_1\neq x_2\quad\therefore x_Hy_H=1$

故 $\triangle ABC$ 的垂心 H 在双曲线 $xy=1$ 上.

【解后感言】 这里虽然涉及的量较多，但通过巧用整体代换，瞄准最终目标，避免了冗长的计算. 其中，根据点 A,B,C 在 $xy=1$ 上，而只设横坐标 x_i，而将纵坐标表为 $\frac{1}{x_i}(i=1,2,3)$，也是常用的技巧.

七、合设方程

解题秘言：对具有某种相同性质的两条曲线，若把它们的方程从整体上合设成一种表达式，有时可以减少计算量.

例 1 一直线 $y=kx+m$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 及其渐近线分别交于 A,B 及 C,D. 证明：$|AC|=|BD|$.

【思路探索】 若分别求出 A,B,C,D 四个交点的坐标，显然十分麻烦. 注意到 $|AC|=|BD|$ 等价于线段 AB 和 CD 的中点重合. 又两渐近线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，

与椭圆方程的左端完全相同.不妨将二方程合写成$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda=0$ 或 $1)$.只需要证明直线 $y=kx+m$ 与曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ 的两个交点的中点的坐标与 λ 无关即可.

【证明】 将双曲线及其渐近线的方程合写成$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda=0$ 或 $1)$

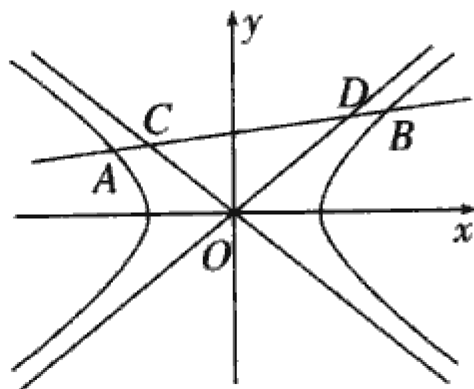
与直线 $y=kx+m$ 联立,消去 y 得

$(b^2-a^2k^2)x^2-2kma^2x-(m^2+\lambda b^2)a^2=0$

设直线与曲线的交点坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2).

依韦达定理知 $x_1+x_2=\frac{2kma^2}{b^2-a^2k^2}$.

故两交点的中点的横坐标为$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}$.



这说明无论是 $\lambda=0$ 还是 $\lambda=1$,曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ 与直线 $y=kx+m$ 所得的两个交点的中点的横坐标相同(与 λ 无关),其纵坐标也必然相同.

∴线段 AB 和 CD 的中点重合.

即有 $|AC|=|BD|$.

【解后感言】 从以上证明过程不难体会到这种抓住题目特征合设方程的精妙之处.

此外,还有“整体补形”,可参见“折叠、展开与割补　空间变换建奇功”一章中的有关内容.

从上述各例可见,解题策略中的整体思维方法的内涵十分丰富,它主要是从分析问题的条件或结论的表达形式、内部结构的特征出发,注意从整体结构及其改造入手探求解题途径,或从整体结构及原问题的转化入手寻找解题途径.在思维方向上既有正向的,又有逆向的;思维性态上既有集中的,又有发散的;既有直观的,又有抽象的.相对于解题策略中的局部思维方式,其思维更具有灵活性和敏捷性.读者应注意自觉地加强这种思维的自我训练.

实战秘修四

1. 设$(x^2-x+1)^6=a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$,求 $a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$ 的值.
2. 若 $\log_7(2\sqrt{2}-1)+\log_2(\sqrt{2}+1)=a$,求 $\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)$的值.
3. 已知:方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之和为 S_1,两根的平方和为 S_2,两根的立方和为 S_3.证明:$aS_3+bS_2+cS_1=0$.

4. 求函数 $y=|\sin x|+\sin^4 2x+|\cos x|$ 的最大值与最小值.

5. 证明:$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$.

6. 已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_{16}=41$,求 S_{31}.

7. $\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ$的值是 ( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

8. 求 $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$的值.

9. 求 $\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{3\pi}{17}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{8\pi}{17}$的值.

10. 三棱锥的三个侧面两两互相垂直,且面积分别是 6m^2,4m^2 和 3m^2,求它的体积.

11. 过圆外一点 $P(a,b)$引圆 $x^2+y^2=r^2$ 的两条切线,求经过两切点的直线方程.

12. 已知 A,B 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的两点,且线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0,0)$. 证明:$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

13. 已知中心在原点,对称轴为坐标轴的二次曲线经过两点 $P\left(5,\frac{9}{4}\right)$和 $Q\left(-2\sqrt{6},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$,求此曲线方程.

14. 已知 $\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$,求 $\cos x+\cos y$ 的取值范围.

15. 方程$(3m^2-11m-20)x^2+(2m^2-5m-3)y^2=6m^2+11m+4$ 表示双曲线,求实数 m 的取值范围.

16. 证明:$f(x)=5^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}\in[2\sqrt{5},6]$.

17. 已知双曲线的中心在原点,对称轴是坐标轴,一条渐近线方程为$4x-3y=0$,且双曲线经过点 $A\left(8,\frac{40}{3}\right)$,求此双曲线的标准方程.

18. 若点 $P(3,2)$是椭圆 $4x^2+9y^2=144$ 内一点,过点 P 的弦恰以 P 为中点,求此弦所在直线方程.

19. 等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=\frac{1}{2}$,且 $S_{100}=125$,求 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$的值.

20. 求经过圆 $x^2+y^2-2x=0$ 和直线 $x+2y-3=0$ 的交点,且和直线$x+3y-4=0$相切的圆的方程.



实战秘修四答案与提示

1. 分别令 $x=1,x=-1$ 代入原式，二者相加可得

$a_{12}+a_{10}+\cdots+a_2+a_0=365$.

2. 令 $\log_7(2\sqrt{2}+1)+\log_2(\sqrt{2}-1)=x$，与条件式两边分别相加，得 $x+a=2$，故原式的值为 $2-a$.

3. 设 x_1,x_2 是方程的两根，则有

$$ax_1^2+bx_1+c=0 \quad ①$$

$$ax_2^2+bx_2+c=0 \quad ②$$

由①$\cdot x_1$+②$\cdot x_2$ 即得.

4. 令 $|\sin x|+|\cos x|=t$，则 $|\sin 2x|=t^2-1$，且 $1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore y=(t^2-1)^4+t, t\in[1,\sqrt{2}]$.

显然，y 在 $t\in[1,\sqrt{2}]$ 上是增函数.

$\therefore$ 当 $t=1$，即 $|\sin x|+|\cos x|=1$ 时，$y_{\min}=1$；

当 $t=\sqrt{2}$，即 $|\sin x|+|\cos x|=\sqrt{2}$ 时，$y_{\max}=\sqrt{2}+1$.

5. 令原式左端为 x，立方之，得 $2-x=x^3$，解得 $x=1$.

6. $S_{31}=\dfrac{a_1+a_{31}}{2}\times 31=a_{16}\times 31=1271$.

7. 设 $a=\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ$

$b=\cos 20^\circ\sin 70^\circ+\cos 10^\circ\cos 50^\circ$

则 $a+b=1+\cos 40^\circ, a-b=-\dfrac{1}{2}-\cos 40^\circ$

解得 $a=\dfrac{1}{4}$，故选(A).

8. 设 $a=\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$

$b=\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$

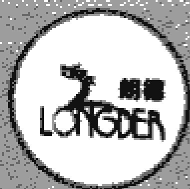
由 $ab=\dfrac{1}{16}\cos 70^\circ\cos 30^\circ\cos 10^\circ\cos 50^\circ=\dfrac{1}{16}b$

得 $a=\dfrac{1}{16}$.

9. 令原式 $=A$，配 $B=\sin\dfrac{\pi}{17}\sin\dfrac{2\pi}{17}\cdot\cdots\cdot\sin\dfrac{8\pi}{17}$.

由 $AB=\dfrac{B}{256}$ 知 $A=\dfrac{1}{256}$.





10. 设三条互相垂直的侧棱长分别为 x,y,z,则有

$\frac{1}{2}xy=6,\frac{1}{2}yz=4,\frac{1}{2}xz=3.$

得 $xyz=24$, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xyz=4(\mathrm{m}^3)$.

11. 设两切点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$. 两切线方程为

$x_1x+y_1y=r^2,x_2x+y_2y=r^2$.

又两切线均过 $P(a,b)$,则 $x_1a+y_1b=r^2,x_2a+y_2b=r^2$.

故过 AB 的直线方程为 $ax+by=r^2$.

12. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,AB 的中点 $M(x',y')$. 显然 $x_1\neq x_2$,且

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad ①$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad ②$$

①－②,得

$$\frac{2x'}{a^2}(x_1-x_2)+\frac{2y'}{b^2}(y_1-y_2)=0$$

$$\Rightarrow k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2x'}{a^2y'}=-\frac{1}{k_{PM}}=-\frac{x'-x_0}{y'}$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{a^2-b^2}{a^2}x'$$

$$\because -a<x'<a \qquad \therefore -\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}.$$

13. 设所求曲线方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$. 以两点 P、Q 的坐标代入,得

$$\begin{cases}\frac{25}{m}+\frac{81}{6n}=1\\ \frac{24}{m}+\frac{18}{4n}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=16\\ n=-9\end{cases}$$

故所求曲线为双曲线,其方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

14. 设 $\cos x+\cos y=t$,与已知式联立,可得

$$2\cot(x-y)=t^2-\frac{3}{2}.$$

$$\therefore |t^2-\frac{3}{2}|\leqslant 2\Rightarrow -\frac{\sqrt{14}}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\sqrt{14}}{2}$$

即$-\frac{\sqrt{14}}{2}\leqslant\cos x+\cos y\leqslant\frac{\sqrt{14}}{2}$.

天天警言

15. 由已知得$\frac{x^2}{\frac{2m+1}{m-5}}+\frac{y^2}{\frac{3m+4}{m-3}}=1$,从而

$\frac{2m+1}{m-5}\cdot\frac{3m+4}{m-3}<0$

$\Rightarrow -\frac{4}{3}<m<-\frac{1}{2}$或$3<m<5$

故$m\in\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup(3,5)$.

16. $f(x)\geqslant 2\sqrt{5^{\sin^2 x}\cdot 5^{\cos^2 x}}=2\sqrt{5}$.

又∵$0\leqslant\sin^2 x\leqslant 1$,$1\leqslant 5^{\sin^2 x}\leqslant 5$

$\therefore (5^{\sin^2 x}-1)(5^{\sin^2 x}-5)\leqslant 0$

$\Rightarrow (5^{\sin^2 x})^2+5\leqslant 6\cdot 5^{\sin^2 x}$

$\Rightarrow 5^{\sin^2 x}+5^{1-\sin^2 x}\leqslant 6$

$\Rightarrow 5^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}\leqslant 6$

$\therefore f(x)\in[2\sqrt{5},6]$.

17. 设双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=t$,以点$A\left(8,\frac{40}{3}\right)$代入解得$t=-4$.故所求双曲线方程为$-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$.

18. 设过点P的弦的两端点坐标为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则有

$\begin{cases}4x_1{}^2+9y_1{}^2=144\\4x_2{}^2+9y_2{}^2=144\end{cases}$

两式相减,并利用$x_1+x_2=6$,$y_1+y_2=4$,得$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{2}{3}$.

故所求直线方程为$2x+3y-12=0$.

19. 设奇数项的和为S_1,偶数项的和为S_2,则有

$\begin{cases}S_1+S_2=125\\S_2-S_1=50d\end{cases}$

两式相减,并以$d=\frac{1}{2}$代入得$S_1=50$.

即$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=50$.

20. 设所求圆方程为

$x^2+y^2-2x+\lambda(x+2y-3)=0$

$\Rightarrow\left(x+\frac{\lambda-2}{2}\right)^2+(y+\lambda)^2=3\lambda+\frac{(\lambda-2)^2}{4}+\lambda^2$

再由相切的条件列出λ的方程,解出$\lambda=2$.

从而所求圆方程为$x^2+y^2+4y-6=0$.

第五章 逆反思想围魏救赵 快速突破

对有些数学问题，如果从正面去直接探求，常常一筹莫展. 但是，若改变一下思维的角度，避开正面强攻，从问题的反面进行逆向思考，又常能找到解题的通道，甚至获得优秀的解法. 波利亚在《怎样解题》中写道："毫无疑问，这种方法有某些发人深思之处. 不照直走一条通往目标的道路，而是从目标走开，转过头来倒着干."这里我们不妨称这种"倒着干"的思维方法为"逆反思维"，并就其常见的形式予以归纳总结.

一、逆用定义

解题秘言：本来数学定义总是可逆的，但中学生在解题过程中往往习惯于正向使用，而对定义的逆用缺乏自觉性和敏感性. 下面以一道竞赛题为例来分析定义的逆用，以窥一斑.

例 首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0 \quad ①$$

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0 \quad ②$$

(其中 a,b 为正整数)有一个公共根，求$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$的值.

【解】 由已知条件知 $a>1,b>1,a\neq b$.

设方程①，②的公共根为 x_0，显然 $x_0\neq 1$(否则 $a=b$). 将 x_0 代入①，②，整理得

$$(1-x_0)a^2+(x_0{}^2+2)a-(x_0{}^2+2x_0)=0 \quad ③$$

$$(1-x_0)b^2+(x_0{}^2+2)b-(x_0{}^2+2x_0)=0 \quad ④$$

则 a,b 是方程

$$(1-x_0)t^2+(x_0{}^2+2)t-(x_0{}^2+2x_0)=0 \quad ⑤$$

的两个相异的正整数根.

$\therefore a+b=\frac{x_0{}^2+2}{x_0-1},ab=\frac{x_0{}^2+2x_0}{x_0-1}=2+\frac{x_0{}^2+2}{x_0-1}$.

从而 $ab=2+a+b$，即 $(a-1)(b-1)=3$.

$\because a-1,b-1$ 均为正整数，

$\therefore \begin{cases}a-1=1\\b-1=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=3\\b-1=1\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=4\\b=2\end{cases}$

故$\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=\dfrac{2^4+4^2}{2^{-4}+4^{-2}}=32\times8=256.$

【解后感言】 本来方程③、④中 a,b 是已知数，这里我们逆用根的定义，构造出方程⑤，这是逆向思维的常用方法之一. 另外，本例中将方程①，②中关于 x_0 的一元二次形式整理成为关于 a,b 的二次形式也是一种逆向思维的体现.

二、逆用公式

解题秘言：对所给的数学问题，若能挖掘其隐含的某些公式的特征，借以逆用，使问题转化，常可得到简捷、巧妙的解法.

例 证明：对于任意自然数 $n(n\geqslant3)$，总有不等式 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!$ 成立.

【证明】 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^1\cdot2^2\cdot\cdots\cdot2^{n-1}$

又 $2^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}$

$=1+(n-1)+C_{n-1}^2+\cdots>n$

$\therefore 2^{\frac{n(n-1)}{2}}=1\cdot2^1\cdot2^2\cdot2^3\cdot\cdots\cdot2^{n-1}>1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n=n!$

不等式得证

【解后感言】 这里逆用了 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$a^m\cdot a^n\cdot a^k=a^{m+n+k}$ 及 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 等几个公式，并大步地实行了“放缩”.

三、执果索因

解题秘言：当从题设条件出发，“由因导果”受阻时，不妨从肯定结论入手进行“执果索因”，从而探求出因果之间的联系.

例1 设 $a,b\in\mathbf{R}_+$，且 $2c>a+b$，证明：

$$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}.$$

【证明】 $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$

$\Leftrightarrow |a-c|<\sqrt{c^2-ab}$

两边平方得 $a^2-2ac+c^2<c^2-ab$.

$\because a>0\quad\therefore a+b<2c$

最后一式为已知条件，且以上推理每步均可逆，故原不等式得证.

【解后感言】 这里讲的"执果索因"就是在第十一章"不等式证明的常用方法"一章中所提到的分析法.它较之由因导果的思维过程有支歧较少,易找到通向结论的道路的优越性,所以在探求证题方向上更受解题者的欢迎.

例 2 在$\triangle ABC$中,已知$\tan A,\tan B,\tan C$成等差数列.

证明:$\cos(B+C-A)=\dfrac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$.

【证明】 由$\tan A,\tan B,\tan C$成等差数列,可知$\tan A+\tan C=2\tan B$,而在$\triangle ABC$中,有$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$,所以$3\tan B=\tan A\tan B\tan C$.

又因$0<B<\pi$知,$\tan B\neq 0$,得$\tan A\tan C=3$ ①

这时再往下推去,解题方向不明.反过来,从结论出发,执果索因,有

$\cos(B+C-A)=\cos(\pi-2A)=-\cos 2A$

若结论成立,则有

$$-\cos 2A=\frac{4+5\cos 2C}{5+4\cos 2C}$$

将左边视为分母为1的分式,利用合分比定理,有

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\frac{(5+4\cos 2C)+(4+5\cos 2C)}{(5+4\cos 2C)-(4+5\cos 2C)}=\frac{9(1+\cos 2C)}{1-\cos 2C}$$

即 $\dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}\cdot\dfrac{1-\cos 2C}{1+\cos 2C}=9$

依半角公式,即为$\tan^2 A\cdot\tan^2 C=9$ ②

显然②正好与①接轨,得证.

【解后感言】 本例的前半段是"由因导果",后半段是"执果索因",相得益彰,恰到好处.这就是我们通常所说的综合法与分析法的结合使用.

四、反面思考

解题秘言:对一些问题的结论,若其正面情况复杂,而反面情况简单,不妨从结论的反面去思考和探索,得出反面结论后,就容易得到正面的结论.这种思维方法我们常称为"正难则反".

例 1 求二项式$(\sqrt[15]{3x}-y)^{15}$展开式中所有无理系数之和.

【思路探索】 本题若正面求解,必须用二项式定理展开,先找出所有无理系数,再求其和,这显然十分麻烦,则试试从反面思考.

【解】 该二项式的展开式中所有有理系数只有两项$(\sqrt[15]{3x})^{15}=3x^{15}$及$(-y)^{15}=-y^{15}$,其系数之和为$3+(-1)=2$.

又,在二项式$(\sqrt[15]{3x}-y)^{15}$中,令$x=y=1$,可得展开式中所有各项的系数和为$(\sqrt[15]{3}-1)^{15}$.

故所有无理系数之和为$(\sqrt[15]{3}-1)^{15}-2$.

【解后感言】 若把二项式展开式中所有系数视为全集，则展开式中无理系数与有理系数互为补集，这种方法又叫做“补集分析法”.

例 2 若下列三个方程

$x^2+4ax-4a+3=0, x^2+(a-1)x+a^2=0, x^2+2ax-2a=0$

至少有一个方程有实根，试求实数 a 的取值范围.

【思路探索】 三个方程中至少有一个方程有实根，情况很复杂，逐一讨论，十分繁杂.但其反面，只有一种情况：三个方程都没有实根，情况极为简单.

【解】 若三个方程均无实数根，则有

$$\begin{cases}(4a)^2-4(-4a+3)<0\\(a-1)^2-4a^2<0\\(2a)^2-4(-2a)<0\end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2}<a<-1$

记 $\overline{A}=\left\{a\mid-\frac{3}{2}<a<-1\right\}$

则 $A=\overline{\overline{A}}=\left\{a\mid a\leqslant-\frac{3}{2}\text{或 }a\geqslant-1\right\}$

即所求实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

【解后感言】 这里亦是用补集分析法来求解，其中 **R** 为全集.

例 3 （2008 年全国Ⅱ高考理・T6）从 20 名男同学，10 名女同学中任选 3 名参加体能测试，则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为 （　　）

A. $\frac{9}{29}$　　B. $\frac{10}{29}$

C. $\frac{19}{29}$　　D. $\frac{20}{29}$

【规范解析】 方法一：直接法

从 20 名男同学，10 名女同学中任选 3 名，共有 $C_{30}^3=\frac{A_{30}^3}{A_3^3}=\frac{30\times29\times28}{6}$ 种选法.选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的选法有 $C_{20}^1C_{10}^2+C_{20}^2C_{10}^1=\frac{20\times10\times9}{2}+\frac{20\times19\times10}{2}$ 种选法，所以既有男同学又有女同学的概率

$$P=\frac{C_{20}^1C_{10}^2+C_{20}^2C_{10}^1}{C_{10}^3}=\frac{20}{29}.$$

方法二：间接法

所选 3 名同学都是男同学或都是女同学的概率为

$\overline{P}=\frac{C_{20}^3+C_{10}^3}{C_{30}^3}=\frac{9}{29}$，所以选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率 $P=1-\overline{P}=1-\frac{9}{29}=\frac{20}{29}$.

【答案】 D

五、反客为主

解题秘言：通常我们解题时，总是把注意力集中在那些主要变元上，这当然是正确的. 当思维受阻时，若能注意在某种特定的条件下，从结论与条件的内在联系出发，变换思维角度，"反客为主"，常能取得解题突破.

例 1 解方程 $x=(x^2-2)^2-2$.

【思路探索】 显然这是一个关于 x 的四次方程，不易求解，但方程中仅有 x 与常数 2 两数，且 2 的最高次数为 2 次. 我们不妨来个颠倒，将变元视为常数，将常数视为变元一试.

【解】 原方程变形为

$2^2-(2x^2+1)\cdot 2+(x^4-x)=0$

视其变元为 2，一次项系数为 $-(2x^2+1)$，常数项为 (x^4-x)，依求根公式，得

$$2=\frac{(2x^2+1)\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4(x^4-x)}}{2}$$

$$=\frac{(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2}$$

得 $x^2+x-1=0$ 或 $x^2-x-2=0$

再解这两个 x 的二次方程，得

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},x_3=-1,x_4=2.$$

【解后感言】 这里不难见到"反客为主"的奇异功效. 读者若不习惯，可令 $a=2$ 来过渡一下.

例 2 已知曲线系 C_k 的方程为 $\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$. 试证明对坐标平面内任一点 $(a,b)(a,b\neq 0)$，总存在 C_k 中的一椭圆和一双曲线通过该点.

【思路探索】 若从曲线系的角度去考虑，即以 x,y 为主元，思维受阻. 若从 k 来考虑，不难看出，当 $k<4$ 或 $4<k<9$ 时，C_k 表示的曲线分别为椭圆和双曲线. 问题归结为证明在区间 $(-\infty,4)$ 和 $(4,9)$ 内分别存在 k 值，使曲线 C_k 过点 (a,b).

【证明】 设点 $(a,b)(a,b\neq 0)$ 在曲线 C_k 上，则

$$\frac{a^2}{9-k}+\frac{b^2}{4-k}=1$$

整理得

$$k^2+(a^2+b^2-13)k+(36-4a^2-9b^2)=0 \qquad (*)$$

令 $f(k)=k^2+(a^2+b^2-13)k+(36-4a^2-9b^2)$

则 $f(k)$ 为开口向上的一条抛物线.

又 $f(4)=-5b^2<0$

$f(9)=5a^2>0$

可知 $f(k)=0$，即方程(*)在 $(-\infty,4)$ 和 $(4,9)$ 内分别有一根.

即对平面内任一点 $(a,b)(a,b\neq0)$，总存在曲线系 C_k 中的一椭圆和一双曲线通过该点.

【解后感言】 在解析几何中这种视参变量为主元的方法用得较为普遍.

六、反例否定

解题秘言：证明一个命题需进行严格的逻辑推理，而否定一个命题仅需举出一个反例即可. 与演绎推理相比，举反例否定某一命题也是一种逆反思维形式. 特别是当推理思维受阻时，更应考虑是否能举出反例.

例 1 (2008 年福建高考理 · T16)设 P 是一个数集，且至少含有两个数，若对任意 a、$b\in P$，都有 $a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b}\in P$(除数 $b\neq0$)，则称 P 是一个数域，例如有理数集 Q 是数域，数集 $F=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in Q\}$ 也是数域. 有下列命题：

①整数集是数域；

②若有理数集 $Q\subseteq M$，则数集 M 必为数域；

③数域必为无限集；

④存在无穷多个数域.

其中正确的命题的序号是________.(把你认为正确的命题的序号都填上)

【规范解析】 命题①：$1\in\mathbf{Z}$，$2\in\mathbf{Z}$ 但 $\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$，故整数集是数域不正确；

命题②：设 $M=\{x|x\in Q$ 或 $x=\pi\}$，则满足 $Q\subseteq M$.

由 $2\in M$，$\pi\in M$ 但 $2\pi\notin M$ 知②不正确；

命题③：设 P 是数域，$m\in P$ 且 $m\neq0$，

则由数域定义知 $2m\in P$，$3m\in P$，$4m\in P$，…，

$nm\in P(n\in\mathbf{N}^*)$，

故 P 中有无限个元素，即命题③正确；

命题④：设 P 是数域，

则集合 $\{a+kb\}a,b\in P,k\in Q$ 且 $k\neq0$ 也是数域，

故这样的数域有无数个，即命题④正确.

【答案】 ③④

例2 设实数 a,b,c 满足

$$\begin{cases} a^2-bc-8a+7=0 \\ b^2+c^2+bc-6a+6=0 \end{cases}$$

那么 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]\cup[9,+\infty)$

C. $(0,7)$　　D. $[1,9]$

【思路探索】 因为$\frac{1}{2}$是同属于 A,B,C 三个选择支中的元素. 当 $a=\frac{1}{2}$时, $b^2+c^2+bc-6a+6=b^2+c^2+bc-6\times\frac{1}{2}+6=b^2+c^2+bc+3=\left(b+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2+3>0$, 不满足题设的第二个方程, 这说明 $a\neq\frac{1}{2}$. 故可排除 A,B,C 三个选择支.

【答案】 D.

【解后感言】 上述这种排除法, 根据选择题中的四个选择支只有一个正确的特点, 采用举出反例淘汰三个(少则一个反例, 多则三个反例), 余下为真的方法颇为实用.

七、反证法

解题秘言: 反证法大家并不陌生, 它是逆反思维的常用武器, 是常见的一种证明方法. 下面我们列举几种使用反证法较多的题型.

1. **命题的结论为否定形式**

例1 (2008 年湖北高考文 · T21) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=\lambda$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+n-4$, $b_n=(-1)^n(a_n-3n+21)$, 其中 λ 为实数, n 为正整数.

(1) 证明: 对任意实数 λ, 数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列;

(2) 证明: 当 $\lambda\neq-18$ 时, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在实数 λ, 使得对任意正整数 n, 都有 S_n -12? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

【规范解析】 (1) 假设存在一个实数 λ, 使 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则有 $a_2^2=a_1a_3$, 即

$$\left(\frac{2}{3}\lambda-3\right)^2=\lambda\left(\frac{4}{9}\lambda-4\right)\Leftrightarrow\frac{4}{9}\lambda^2-4\lambda+9=\frac{4}{9}\lambda^2-4\lambda\Leftrightarrow 9=0, \text{矛盾}.$$

所以 $\{a_n\}$ 不是等比数列.



2. **命题的结论具唯一性**

例 2 有一方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\x_{21}x_1+x_{22}x_2+a_{23}x_3=0\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}a_3=0\end{cases}$$

其系数满足下列条件：

①a_{11},a_{22},a_{33}为正数，其余系数都是负数；

②在每个方程中系数之和为正数.

证明：方程组有唯一的一组解.

【证明】 显然$(0,0,0)$即$x_1=x_2=x_3=0$是方程组的一组解.假定(a,b,c)是方程组的另一组解，则可分两种情况：

(ⅰ)a,b,c中至少有一个正数；

(ⅱ)a,b,c中至少有一个负数.

对情况(ⅰ)，不妨设$a>0,a\geqslant b,a\geqslant c$.

$\because a_{12}<0,a_{13}<0$

$\therefore a_{12}b\geqslant a_{12}a,a_{13}c\geqslant a_{13}a$

又$a_{11}+a_{12}+a_{13}>0,a_{11}>0$

$\therefore a_{11}a+a_{12}b+a_{13}c\geqslant(a_{11}+a_{12}+a_{13})a>0$

这与(a,b,c)是方程组的解的定义相矛盾.

对情况(ⅱ)，不妨设$a<0,a\leqslant b,a\leqslant c$，则$-a>0,-a\geqslant -b,-a\geqslant -c$，依(ⅰ)知

$a_{11}a+a_{12}b+a_{13}c=-[a_{11}(-a)+a_{12}(-b)+a_{13}(-c)]<0$

同样导致矛盾.

综上所述，方程组仅有唯一一组解$(0,0,0)$.

【解后感言】 当结论的反面不止一种情形时，反设后，则应分别就各种情况进行归谬，做到无一遗漏.‘无一遗漏’，锻炼您的精密思维能力！

3. **命题结论呈"至多"、"至少"形式**

例 3 设a,b,c均为实数，且$a=x^2-2y+\frac{\pi}{2},b=y^2-2z+\frac{\pi}{3},c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$.证明：$a,b,c$中至少有一个大于0.

【证明】 假设a,b,c都不大于0，即$a\leqslant0,b\leqslant0,c\leqslant0$，则$a+b+c\leqslant0$.

而$a+b+c=x^2-2y+\frac{\pi}{2}+y^2-2z+\frac{\pi}{3}+z^2-2x+\frac{\pi}{6}$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\pi-3>0$

这就产生了矛盾.

故a,b,c中至少有一个大于0.

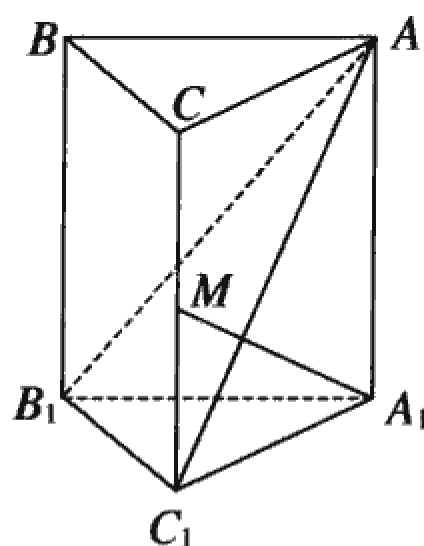
【解后感言】 对结论呈"至多"、"至少"及存在性的问题也往往从反证法入手较为有利.有时反证法又常与直接推理演绎、数形结合等结合应用，本题就是这方面的典型例子.

实战秘修五

1. 已知$\begin{cases}x-y=k\\2x^2-2x+k=0\\2y^2-2y+k=0\end{cases}$，求 k 的值.

2. 证明：$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\leqslant n^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

3. 如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，M 是 CC_1 的中点. 证明：$AB_1\perp A_1M$.



4. 数字 1,2,3,4,5 可以组成多少个没有重复数字且数字 1 与 2 不相邻的五位数？

5. (2008 年天津高考理 · T10)有 8 张卡片分别标有数字 1,2,3,4,5,6,7,8，从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列，要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5，则不同的排法共有 ( )

A. 1 344 种　　B. 1 248 种

C. 1 056 种　　D. 960 种

6. (2008 年福建高考理 · T7)某班级要从 4 名男生、2 名女生中选派 4 人参加某次社区服务，如果要求至少有 1 名女生，那么不同的选派方案种数为 ( )

A. 14　　B. 24　　C. 28　　D. 48

7. 解方程 $x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$.

8. 解关于 x 的方程 $x^4-2ax^2+x+a^2-a=0$.

9. “若 $a>0,b>0$，且 $a\neq1,b\neq1$，则 $\log_a b+\log_b a\geqslant2$”是否正确？

10. 底面是正三角形、侧面是等腰三角形的棱锥一定是正棱锥吗？若是，予以证明；若不是，请举出反例.

11. 正方体内可以作出不同的内接四面体的个数是 ( )

A. C_8^4-6　　B. C_8^4　　C. C_8^4-8　　D. C_8^4-12

12. “已知数列$\{a_n\}$的项满足$\begin{cases}a_1=b\\a_{n+1}=ca_n+d\end{cases}$

其中 $c\neq1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{bc^n+(d-b)c^{n-1}-d}{c-1}$.”

是否正确？若正确，予以证明；否则举出反例.

13. “已知 a,b,c 成等比数列，m 是 a,b 的等差中项，n 是 b,c 的等差中项，则 $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=2$.”是否正确？若正确，予以证明；否则举出反例.

14. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中的 a,b,c 均为整数，且 $f(0),f(1)$ 均为奇数，证明：方程 $f(x)=0$ 无整数根.

15. 四面体 $P-ABC$ 中三个面为直角三角形，则第四个面必为锐角三角形.

16. 给定实数 $a,a\neq0$ 且 $a\neq1$. 设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{1}{a})$，证明：

(1)经过这个函数图象上任意两个不同点的直线不平行于 x 轴；

(2)这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

实战秘修五答案与提示

1. 依方程组的后两个方程知 x,y 是方程 $2u^2+2u+k=0$ 的两个根.

故有 $x+y=1,xy=\frac{k}{2}$.

于是依 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$，有 $k^2=1-2k$.

即 $k^2+2k-1=0$，解之得 $k_1=-1+\sqrt{2},k_2=-1-\sqrt{2}$ 为所求.

2. 逆用公式 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，有 $k(2n-k)\leqslant\left(\frac{k+2n-k}{2}\right)^2=n^2$.

令 $k=1,3,5\cdots,(2n-1)$，然后各式相乘得

$[1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)]^2\leqslant(n^2)^n=(n^n)^2$

故 $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\leqslant n^n$.

3. 易证 AC_1 是 AB_1 在平面 AA_1C_1C 上的射影，若能证 $AC_1\perp A_1M$ 即可推得 $AB_1\perp A_1M$.

若欲证 $AC_1\perp A_1M$，只要证 $\angle A_1AC_1$ 与 $\angle AA_1M$ 互余即可.

可通过计算有关边长知 $\angle A_1AC_1=\angle C_1A_1M$，故得 $\angle A_1AC_1+\angle AA_1M=\angle C_1A_1M+\angle AA_1M=90°$.

4. 从五个数字的全排列数中去掉 1 与 2 相邻的排列数，得 $P_5^5-P_4^4P_2^2=72$ 个.

5. 选 B.

【解】 中间行两张卡片为 1,4 或 2,3，且另两行不可同时出现这两组数字. ①用间接法，先写出中间行为(1,4)或(2,3)，$C_2^1\cdot A_2^2\cdot A_6^4$；②去掉两行同时出现 1,4 或 2,3，$(A_2^2C_2^1)^2A_4^2$，所以 $C_2^1A_2^2A_6^4-(A_2^2C_2^1)^2A_4^2=1\ 440-192=1\ 248$，故选 B.

6. 选 A.

【解】 用间接法得不同选法有 $C_6^4-1=14$ 种，故选 A.

7. 视$\sqrt{3}$为“变元”，将原方程整理为

$x\cdot 3+(2x^2+1)\sqrt{3}+(x^3-1)=0\ (x\neq 0)$

则 $\sqrt{3}=\dfrac{-(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2x}$

即 $x=1-\sqrt{3}$或 $x^2+(1+\sqrt{3})x+1=0$

得 $x_1=1-\sqrt{3}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}-\sqrt[4]{12})$，

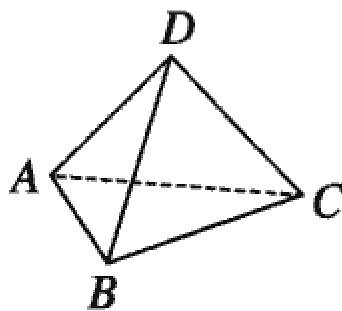
$x_3=-\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{12})$.

8. 原方程化为 $a^2-(2x^2+1)a+(x^4+x)=0$.

解得 $a=x^2+x$ 或 $a=x^2-x+1$.

得 $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，$x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$.

9. 不正确，不等式成立的条件是 $\log_a b>0$，$\log_b a>0$. 如当 $a=2$，$b=\dfrac{1}{2}$时，符合题设条件，但 $\log_2\dfrac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}2=-2$.



10. 不一定，如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=BC=CA=CD$，$DA=DB\neq DC$，则各侧面均为等腰三角形，底面亦为正三角形，但 $D-ABC$ 不是正三棱锥.

11. 从正方体 8 个顶点任选 4 个的组合数为 C_8^4，减去正方体的 6 个面和 6 个对角面. 选(D).

12. 不正确. 当 $n=1$ 时，若 $c=0$，则出现 0^0，无意义.

13. 不正确. 若令 $a=2$，$b=-2$，$c=2$，则 a,b,c 成等比数列，此时 a 与 b，b 与 c 的等差中项均为 0. 可见$\dfrac{a}{m}$，$\dfrac{b}{n}$均无意义.

14. 设方程 $f(x)=0$ 有一整数根 k，则

$ak^2+bk=-c$ ①

因 $f(0)=c$，$f(1)=a+b+c$ 均为奇数，有 $a+b$ 为偶数.

当 k 为偶数时，显然与①矛盾；

当 k 为奇数时，设 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$，则 $ak^2+bk=(2n+1)(2na+a+b)$为偶数，也与①矛盾.

15. 不妨设$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=\frac{\pi}{2}$，$PA=a$，$PB=b$，$PC=c$.

假设第四个面$\triangle ABC$不是锐角三角形，设其中$\angle BAC\geqslant\frac{\pi}{2}$，则

$AB^2+AC^2-BC^2\leqslant 0$，

即$(a^2+b^2)+(a^2+c^2)-(b^2+c^2)\leqslant 0$

$\Rightarrow 2a^2\leqslant 0$

故$\angle BAC<\frac{\pi}{2}$. 同理$\angle ABC$，$\angle ACB$均为锐角.

16. (1)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$为函数图象上的不同的两点. 假设AB平行于x轴，则$y_1=y_2$，即$\frac{x_1-1}{ax_1-1}=\frac{x_2-1}{ax_2-1}$，其中$a\neq 0$，$a\neq 1$，$x_1\neq x_2$，依等比定理，有

$\frac{x_1-1}{ax_1-1}=\frac{x_1-1-(x_2-1)}{ax_1-1-(ax_2-1)}=\frac{x_1-x_2}{a(x_1-x_2)}=\frac{1}{a}$

$\Rightarrow a(x_1-1)=ax_1-1\Rightarrow a=1$，矛盾.

(2)设$P(x_0,y_0)$为函数图象上任意一点，则

$$y_0=\frac{x_0-1}{ax_0-1}\left(x_0\neq\frac{1}{a}\right) \quad ①$$

$$\Rightarrow x_0(ay_0-1)=y_0-1 \quad ②$$

若$ay_0-1=0$，则$y_0=\frac{1}{a}$，故$\frac{1}{a}=\frac{x_0-1}{ax_0-1}\Rightarrow a=1$，矛盾.

故由②式得$x_0=\frac{y_0-1}{ay_0-1}$.

与①比较知$P'(y_0,x_0)$也在函数$y=\frac{x-1}{ax-1}$的图象上，由$P(x_0,y_0)$的任意性知函数的图象关于直线$y=x$对称.

第六章 特殊与一般思想 能上能下 阴阳互化

华罗庚教授曾告诉我们:“善于‘退’,足够地‘退’,‘退’到最原始而不失去重要性的地方,是学好数学的一个诀窍.”又云:“先足够地退到我们最容易看清楚的地方,认透了,钻深了,然后再上去.”这就是以退求进的思想.

当我们在探究某些数学问题时,常会碰到一些疑惑费解或难以入手的困难,不妨把复杂的问题退到较为简单易解的地步,从中找出能反映问题本质属性的东西,或获得答案,或产生解题灵感,以达到认识上的飞跃,使原问题化难为易而获解.这种以退求进的思想是我们解决数学问题时的特殊与一般的唯物辩证思想的一种体现.

一、从抽象到具体

解题秘言:对一些比较抽象的问题,往往不易找到解题思路,甚至给人“摸不着边际”的感觉,但如果能把它具体化,就能窥得某种解题途径.

例1 已知集合 A 与集合 B 各含有 12 个元素,$A\cap B$ 含有 4 个元素,集合 C 同时满足下面两个条件:

(1)$C\subsetneqq A\cup B$,且 C 中含有 3 个元素;

(2)$C\cap A\neq\varnothing$.

这样的集合 C 的个数为________.

【思路探索】 本题题意抽象,不易理解,为将其具体化,不妨设计一个符合原题要求的模型:

某班数学竞赛训练小组(集合 A)和计算机兴趣小组(集合 B)各有 12 人,其中有 4 名同学同时参加了两个小组($A\cap B$),现在从这些同学中选出 3 人组成代表队(集合 C)参加校际比赛,要求其中至少有一名是竞赛训练小组的成员,问一共可组成多少种这样的代表队?

由于问题比较具体,我们立即可以写出下列结果:

$C_{12}^{3}+C_{12}^{2}C_{8}^{1}+C_{12}^{1}C_{8}^{2}=1084$(个)

或为 $C_{20}^{3}-C_{8}^{3}=1084$(个).

【答案】 1084 个.

【解后感言】 在构造具体模型时一定要注意不要改变问题的实质性条件.

例2 函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且满足以下条件：

①x_1，x_2 是 $f(x)$ 定义域中的数，且 $f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$；

②$f(a)=1(a>0)$；

③当 $0<x<2a$ 时，$f(x)>0$.

(1)判定 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)判定 $f(x)$ 是否是周期函数，若是周期函数，求出周期.

【思路探索】 由条件①容易联想到两角差的余切公式

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

由 $\cot\dfrac{\pi}{4}=1$，猜想 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. 不难发现题设条件类似余切函数的运算法则和性质，故可将题中的函数从抽象退到具体，"退"为 $f(x)=\cot x$，由此猜想此题中的结论.

(1)$f(x)$ 为奇函数；

(2)$y=\cot x$ 的周期为 $\pi=4\times\dfrac{\pi}{4}$，猜想 $f(x)$ 为周期函数，其周期为 $4a$.

【证明】 (1)令 $x=x_1-x_2$，因为 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，所以 $-x=x_2-x_1$ 也在其定义域内，且

$$f(-x)=f(x_2-x_1)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$$=-f(x_1-x_2)=-f(x)$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

(2)$\because f(x+a)=\dfrac{f(x)f(-a)+1}{f(-a)-f(x)}=\dfrac{-f(x)f(a)+1}{-f(a)-f(x)}$

$$=\frac{1-f(x)}{-1-f(x)}=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$$

$\therefore f(x+2a)=f[(x+a)+a]=\dfrac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1}$

$$=\frac{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=\frac{-2}{2f(x)}=-\frac{1}{f(x)}$$

$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]$

$$=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 为周期函数，且其周期为 $4a$.

【解后感言】 在解题过程中，将抽象问题退到具体问题，仅有利于启迪思维，找到抽象问题的具体模型. 但在具体解证过程中仍应就其抽象性进行严格论证.

二、从一般到特殊

解题秘言:由于共性寓于事物的个性之中,对于有些较复杂的问题,当从一般角度难以解决时,我们可以通过考察和研究它的特殊情况,去探求发现规律和解题方法.

例 1 (2008 年天津高考理·T22)在数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中,$a_1=1$,$b_1=4$,数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$,$2a_{n+1}$ 为 b_n 与 b_{n+1} 的等比中项,$n\in\mathbf{N}^*$.

(Ⅰ)求 a_2,b_2 的值;

(Ⅱ)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式;

(Ⅲ)设 $T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\cdots+(-1)^{a_n}b_n$,$n\in\mathbf{N}^*$.

证明:$|T_n|<2n^2$,$n\geqslant 3$.

【解析】 (Ⅰ)由题设有 $a_1+a_2-4a_1=0$,$a_1=1$,

解得 $a_2=3$.由题设又有 $4a_2^2=b_2b_1$,$b_1=4$,解得 $b_2=9$.

(Ⅱ)解法一:由题设 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$,$a_1=1$,$b_1=4$,及 $a_2=3$,$b_2=9$,进一步可得 $a_3=6$,$b_3=16$,$a_4=10$,$b_4=25$,猜想 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,$b_n=(n+1)^2$,$n\in\mathbf{N}^*$.

先证 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

当 $n=1$ 时,$a_1=\dfrac{1\times(1+1)}{2}$,等式成立.当 $n\geqslant 2$ 时用数学归纳法证明如下:

(1)当 $n=2$ 时,$a_2=\dfrac{2\times(2+1)}{2}$,等式成立.

(2)假设当 $n=k$ 时等式成立,即 $a_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$,$k\geqslant 2$.

由题设,$kS_{k+1}=(k+3)S_k$, ①

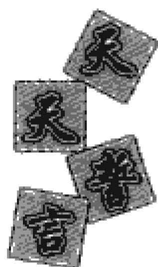
$(k-1)S_k=(k+2)S_{k-1}$. ②

①的两边分别减去②的两边,整理得 $ka_{k+1}=(k+2)a_k$,从而 $a_{k+1}=\dfrac{k+2}{k}a_k=\dfrac{k+2}{k}\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

这就是说,当 $n=k+1$ 时等式也成立.根据(1)和(2)可知,等式$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$对任何的 $n\geqslant 2$ 成立.

综上所述,等式 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$对任何的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

再用数学归纳法证明 $b_n=(n+1)^2$,$n\in\mathbf{N}^*$.



(1)当 $n=1$ 时,$b_1=(1+1)^2$,等式成立.

(2)假设当 $n=k$ 时等式成立,即 $b_k=(k+1)^2$,那么

$$b_{k+1}=\frac{4a_{k+1}^2}{b_k}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{(k+1)^2}=[(k+1)+1]^2.$$

这就是说,当 $n=k+1$ 时等式也成立.根据(1)和(2)可知,等式 $b_n=(n+1)^2$ 对任何的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

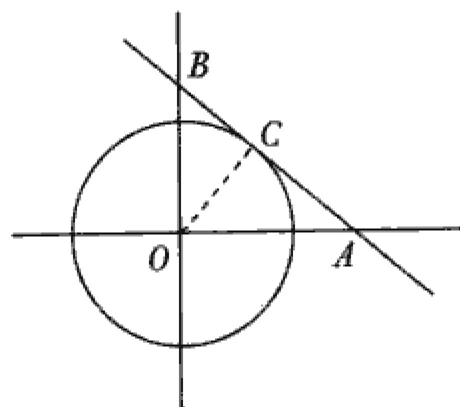
(Ⅲ)解法略.

例2 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的切线交 x 轴于 A,交 y 轴于 B,则 $|AB|$ 的最小值为 ( )

A. $2\sqrt{a^2+b^2}$ B. $a+b$

C. $\sqrt{2ab}$ D. $4\sqrt{ab}$

【思路探索】 将椭圆的一般情况退到特例——圆.令 $a=b=1$(再一次特殊化),即如右图的单位圆情形.点 C 为切点,易见



$$|AB|=|AC|+|BC|\geqslant 2\sqrt{|AC|\cdot|BC|}$$
$$=2\sqrt{|OC|^2}=2.$$

即当 $a=b=1$ 时,$|AB|_{\min}=2$.在四个选择支中,仅有 $a+b=1+1=2$.

【答案】 B.

【解后感言】 这里采用的赋值法和图形特殊化都是从一般退到特殊的常用方法,特别是对选择题采用这种方法能产生简捷明快的效果.

三、从多元到少元

解题秘言:对元素较多,呈现的情况较复杂的问题,我们可以先从元素较少的简单情况进行研究,然后以此为起点去解答较多元素的原题,它常能起到"退一步,进两步"的作用.

例 设 $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$,其中 $n\geqslant 2$.证明:

$$\tan\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<\tan\alpha_n.$$

【思路探索】 由于变元较多,难于下手,先退为二元考虑,即

已知 $0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$,证明:$\tan\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}<\tan\alpha_2$.

只要证得 $\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}<\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}$ 就行,这是不难办到的.

$\because 0<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\sin\alpha_1<\sin\alpha_2, \cos\alpha_1>\cos\alpha_2>0$

$\therefore 0<2\sin\alpha_1<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2<2\sin\alpha_2$

$2\cos\alpha_1>\cos\alpha_1+\cos\alpha_2>2\cos\alpha_2>0$

故 $\frac{2\sin\alpha_1}{2\cos\alpha_1}<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}<\frac{2\sin\alpha_2}{2\cos\alpha_2}$

即 $\tan\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}<\tan\alpha_2$.

这样就发现了原题证明的诀窍.

【证明】 $\because 0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\sin\alpha_1<\sin\alpha_2<\cdots<\sin\alpha_n$

$\cos\alpha_1>\cos\alpha_2>\cdots>\cos\alpha_n>0$

$\therefore 0<n\sin\alpha_1<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n<n\sin\alpha_n$

$n\cos\alpha_1>\cos\alpha_1+\cos\alpha_1+\cdots+\cos\alpha_n>n\cos\alpha_n>0$

$\therefore \tan\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cdots+\cos\alpha_n}<\tan\alpha_n$

【解后感言】 对有些涉及自然数 n 的这类"多元"问题,有时也可以用数学归纳法来解,这里就不举例了.

四、从高维到低维

解题秘言:在解答高维空间的有关问题时,我们常把它退到低维空间上来考虑,然后利用在低维空间所获得的启示再去解答高维空间的问题,这种方法尤其在立体几何中用得较多.

例1 凸 n 面体的 n 个面的面积记为 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$,P 为 n 面体内任一点,且 P 到各面的距离为 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$.若 $S_1:S_2:\cdots:S_n=1:2:\cdots:n$,证明:$\sum_{i=1}^{n}(ih_i)$为定值.

【思路探索】 将问题退到:平面凸 n 边形内任一点 P 到各边距离为 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$,n 条边的比为 $\frac{a_i}{a_j}=\frac{i}{j}(i,j=1,2,\cdots,n)$,证明:$\sum_{i=1}^{n}(ih_i)$为定值.依面积法此问题不难证明.

设 $\frac{a_i}{i}=\frac{a_j}{j}=k$,则 $a_i=ik$.

将 n 边形的面积剖分成 n 个小三角形的面积,有



$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_ih_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(ik)h_i=\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}(ih_i)$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}(ih_i)=\frac{2S}{k}$(定值)

故可进到空间解决原问题.

【证明】 由题设知$\frac{S_i}{i}=k$(定值),则 $S_i=ik(i=1,2,\cdots,n)$.

凸 n 面体的体积被 P 剖分成 n 个小锥体的体积之和.

$\therefore V=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}S_ih_i=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(ik)h_i=\frac{k}{3}\sum_{i=1}^{n}(ih_i)$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}(ih_i)=\frac{3V}{k}$(定值).

【解后感言】 这里是将空间问题退为平面问题,然后运用类比方法来解决空间问题.

例 2 空间有 n 个平面,每三个平面交于一点,但无四面共点,试问:这些平面将空间分成几部分?

【思路探索】 先退一步:平面内有 n 条直线,每两条直线交于一点,无三条直线共点情况,问:这些直线将平面分成多少个部分?

再退一步:直线上有 n 个点,这 n 个点把直线分成多少个部分?

这时容易找到答案,n 个点把直线分成 $n+1$ 个部分,记为 $f_1(n)=n+1$.

以此为基础,我们再来寻求解答.

【解】 一条直线分平面为两部分.设 n 条直线分平面为 $f_2(n)$部分.再添一直线,与前 n 条直线相交,依 $f_1(n)$知,要增加 $n+1$ 部分,即

$f_2(n+1)=f_2(n)+n+1$,其中 $f_2(1)=2$,

于是 $f_2(n+1)-f_2(n)=n+1$

$$\begin{aligned}\therefore f_2(n)&=f_2(1)+[f_2(2)-f_2(1)]+[f_2(3)-f_2(2)]\\&\quad+\cdots+[f_2(n-1)-f_2(n-2)]+[f_2(n)-f_2(n-1)]\\&=2+2+3+\cdots+(n-1)+n\\&=1+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)\end{aligned}$$

又一个平面分空间为两部分,设 n 个平面分空间为 $f_3(n)$部分,再添一个平面则与前 n 个平面相交,依 $f_2(n)$知,要增加$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$部分.

即 $f_3(n+1)=f_3(n)+\frac{1}{2}(n^2+n+2)$,其中 $f_3(1)=2$

于是 $f_3(n+1)-f_3(n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$

$\therefore f_3(n)=f_3(1)+[f_3(2)-f_3(1)]+[f_3(3)-f_3(2)]$
$+\cdots+[f_3(n-1)-f_3(n-2)]$
$+[f_3(n)-f_3(n-1)]$

$=2+\sum_{i=1}^{n-1}[f_3(i+1)-f_3(i)]$

$=2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(i^2+i+2)$

$=2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}1$

$=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{4}(n-1)n+(n-1)$

$=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$

故 n 个平面将空间分成$\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$个部分.

【解后感言】 这里作了"大踏步的退",从空间退到平面,再退到直线,然后再一步一步地进到原来的空间问题上,颇具一定的代表性和典型性.

至于涉及解方程(组)中的降维思想这是大家在初中数学中就早已熟悉的问题,就不必浪费笔墨了.

五、从整体到局部

解题秘言:有些数学问题,如果从整体上不便解决,可先研究其局部.如果局部问题得以解决,常常能促使问题整体得以解决.

例 1 在锐角$\triangle ABC$中,证明:

$$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$$

【思路探索】 本题看起来似乎很简单,但从整体上解答比较难入手,由三个角的和为 π,以及三角函数间的转换关系,我们可从局部(从一个角的三角函数式或两个角的三角函数式)着手处理.

证明一 $\because\triangle ABC$ 为锐角三角形

$\therefore A+B=\pi-C>\frac{\pi}{2}$

$\therefore A>\frac{\pi}{2}-B$

即 $0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$

依正弦函数在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性知

$\sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$

同理，$\sin B > \cos C$，$\sin C > \cos A$

三式相加即得

$$\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C.$$

证明二　由和差化积公式知

$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\therefore (\sin A + \sin B) - (\cos A + \cos B)$

$= 2\left(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$

$\therefore 0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\therefore \cos\frac{C}{2} > \sin\frac{C}{2} > 0$

又 $-\frac{\pi}{4} < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{4}$

$\therefore \cos\frac{A-B}{2} > 0$

$\therefore \sin A + \sin B > \cos A + \cos B$

同理　$\sin B + \sin C > \cos B + \cos C$

　　　$\sin C + \sin A > \cos C + \cos A$

将三式左右两边分别相加，约去 2，即得证.

【解后感言】　这种方法在涉及三角形三内角的三角函数关系式的问题中经常用到. 由此可见从整体退到局部思想方法之一斑.

例 2　已知四面体 $A_1A_2A_3A_4$，S_1, S_2, S_3, S_4 分别是以 A_1, A_2, A_3, A_4 为球心的球面，它们两两相切. 如果存在一点 O，使得以 O 点为球心可作一个半径为 r 的球面 P 与 S_1, S_2, S_3, S_4 都相切，还可作一个半径为 R 的球面 Q 与四面体的各棱都相切. 证明：四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体.

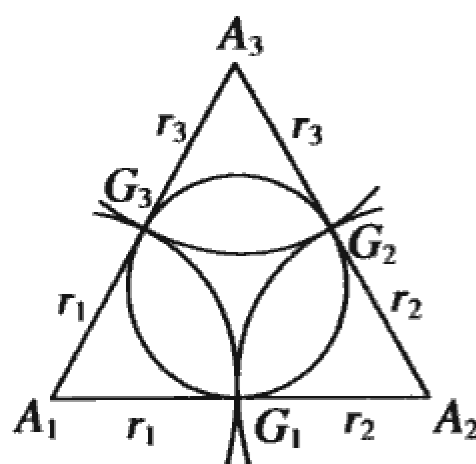
【思路探索】　由于问题比较复杂，若从整体考虑困难较大，不妨先从局部着手.

图（甲）为球面 S_1, S_2, S_3 的球心 A_1, A_2, A_3 的截面图，G_1, G_2, G_3 为三个球面两两相切的切点，显然切点 G_1, G_2, G_3 必在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边上，记三球半径相应为 r_1, r_2, r_3，$\triangle A_1A_2A_3$ 的三边相应为 a_1, a_2, a_3，其半周长 $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) = p$.

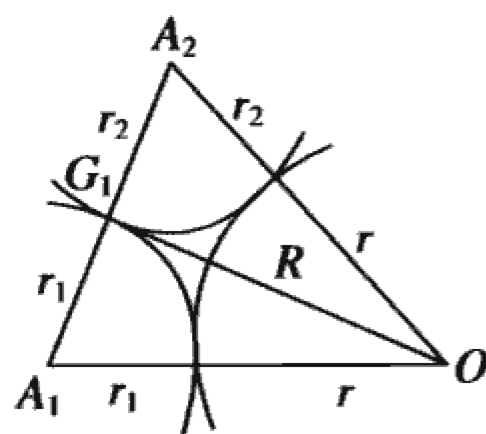
由于 $r_1 + r_2 = a_3$，$r_2 + r_3 = a_1$，$r_3 + r_1 = a_2$

于是 $r_1 = p - a_1$，$r_2 = p - a_2$，$r_3 = p - a_3$.

这说明 G_1, G_2, G_3 恰好为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆的三个切点.



(甲)



(乙)

因为棱切球 Q 与各棱都相切,则其在平面 $A_1A_2A_3$ 上的截圆就是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆.

这样,球面 S_1, S_2, S_3, S_4 两两相切的切点就是球面 Q 与四面体各棱相切的切点.

下面再来证明各棱棱长应相等.

如图(乙),过点 O 和 A_1, A_2 作截面,显然 OG_1 是球面 S_1, S_2 的公切线,且 $OG_1=R$,依切割线定理知

$$R^2=r(r+2r_1)=r(r+2r_2)$$

因此得到 $r_1=r_2$,同理,$r_2=r_3=r_4$.

于是 $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_1=A_1A_4=A_2A_4=A_3A_4$

故四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体.

【解后感言】 本例中应用从整体退到局部及将空间问题降为平面问题的思想方法都是可取的.

实战秘修六

1. 已知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 对 $x,y\in\mathbf{R}$ 都成立,且 $f(0)\neq0$. 试判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

2. 证明:不论 m、n 为何实数,方程

$$x^2+y^2-2mx-2ny+4(m-n-2)=0$$

所表示的曲线必通过一定点,并求出此定点.

3. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}+x}{1-\sqrt{3}x}$, $f(x_0)=1990$, $x_n=f(x_{n-1})(n\geqslant1)$. 求 $f(x_{2007})$.

4. 求和:$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sin[\alpha+(k-1)\beta]\sin(\alpha+k\beta)}$.

5. 现有 243 个小球,从外观上看完全相同,除一个小球略轻外,其余的小球重量均相等. 现有满足各种操作要求的天平和砝码. 问最少称几次,可保证将这个较轻的球找出?

6. 证明：空间中从同一点出发不在同一平面内的三条射线中，每两条所成角的平分线与第三条射线确定一个平面，如此所得的三个平面必相交于一直线.

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，D 点在截面 ACD_1 上的射影为 H. 证明：$\triangle ADD_1$ 的面积是 $\triangle ACD_1$ 和 $\triangle AHD_1$ 的面积的比例中项.

8. 在四棱锥的四个侧面中，直角三角形最多可有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

9. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，如果 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=$______.

10. 是否存在常数 a,b,c，使得等式

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(an^2+bx+c)$$

对一切自然数 n 都成立？并证明你的结论.

实战秘修六答案与提示

1. $f(x)$ 为偶函数，联想三角函数的和差化积公式，可把 $f(x)$ 具体化为 $\cos x$. 证明可仿例 2.

2. 令 $m=n=0$，及 $m=0,n=1$，解方程组得交点 $(2,-2)$ 及 $(-2,-2)$. 代入曲线系验证知曲线系必过点 $(2,-2)$.

3. 由 $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$ 知函数值是周期为 3 的周期数列，所以

$f(x_{2007})=x_{2008}=x_1=f(x_0)=1990$.

4. 取 $k=1$

$$\frac{1}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\beta\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\sin\beta}[\cot\alpha-\cot(\alpha+\beta)]$$

由此知

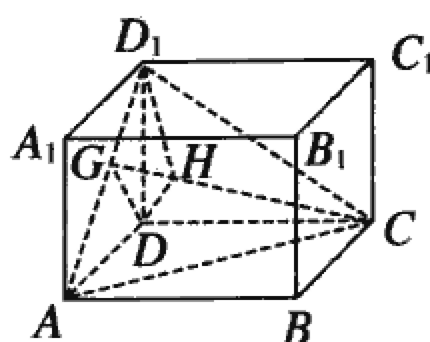
$$\text{原式}=\frac{1}{\sin\beta}\sum_{k=1}^{n}\{\cot[\alpha+(k-1)\beta]-\cot(\alpha+k\beta)\}$$

$$=\frac{1}{\sin\beta}[\cot\alpha-\cot(\alpha+n\beta)].$$

5. 若问题减少为两个球时，只需称一次；若问题减少为 3 个球时，也只需称一次；由此 9 个球称两次可找到：先将 9 个球分成 3 组，每组 3 个球，称一次可知较轻的球在哪一组，再称一次即可找到较轻的球. 依次类推，27 个球需称 3 次，81 个球需称 4 次，243 个球需要称 5 次. 一般地，3^n 个球需称 n 次.

6. 在三条射线上分别取点 A,B,C，使 $OA=OB=OC$（O 为三条射线的交点），设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，证 OG 为三平面的交线即可.

7. 由于$\triangle ADD_1$,$\triangle ACD_1$,$\triangle AHD_1$ 有公共边 AD_1,问题等价于这个三角形在 AD_1 上的高存在比例中项关系. 如图,连 CH 延长交 AD_1 于 G,可证 DG,CG,HG 分别为$\triangle ADD_1$,$\triangle ACD_1$,$\triangle AHD_1$ 的公共边 AD_1 上的高,依射影定理可证:$DG^2=GH\cdot GC$.



8. 退到特殊四棱锥:底面为矩形,其一条侧棱垂直于底面,依三垂线定理知其四个侧面都是直角三角形. 选(D).

9. 若$\left\{\dfrac{na_n}{S_n}\right\}$的极限存在,必为唯一常数. 取特殊等差数列 $a_n=n$,则

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+1),\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n(n+1)}=2.$$

10. 问题等式要对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立. 可将整体 $\mathbf{N}^*$ 退为局部,取 $n\in\{1,2,3\}$,考察 a,b,c 是否存在. 即由等式可得

$$\begin{cases}4=\dfrac{1}{6}(a+b+c)\\22=\dfrac{1}{2}(4a+2b+c)\\70=9a+3b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=11\\c=10\end{cases}$$

代入等式,再用数学归纳法证明此等式是否成立即可.

第七章 分类讨论思想深究细察 各个击破

分类讨论是数学中的一种重要的思想方法和解题策略，它是逻辑划分思想在数学解题中的具体运用.这种数学思想方法几乎涉及中学数学内容的各个部分.如复数分为实数与虚数两类；实数又分为有理数与无理数两类；两直线的位置关系分为平行、相交、异面三类；非退化的圆锥曲线可分为椭圆(包括圆)、双曲线、抛物线三类.由于这类问题涉及面广、综合性强，有助于提高我们分析问题和解决问题的能力，可见其地位之重要.另一方面，忽视分类讨论或讨论中发生逻辑错误的现象又屡见不鲜，可见有引起重视和加强训练之必要.

分类讨论的动因和方法

解题秘言：进行分类讨论的关键是明确讨论的动因，即认识为什么要分类讨论，只有明确了讨论的原因，才能准确地、恰当地进行讨论.

1. **根据有关定义分类讨论**

有些数学概念本身就是以分类形式定义的.如绝对值、直线与平面所成的角，有些数学概念自身就有一定的限制，如斜率 $k=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$；曲线系中二次曲线的分类等，解题时以所定义的概念为依据来进行分类讨论，但要注意概念所受的限制.

例1 (2008年广东高考理·T14)(不等式选讲选做题)已知$a\in\mathbf{R}$,若关于x的方程 $x^2+x+\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根，则 a 的取值范围是________.

【规范解析】 $|a|=0$ 时，$a=0$，

$\left|a-\frac{1}{4}\right|=0$ 时，$a=\frac{1}{4}$.

①$a<0$ 时，方程化为 $x^2+x+\frac{1}{4}-a-a=0$

即 $x^2+x+\frac{1}{4}-2a=0$.

$\Delta=1-4\left(\frac{1}{4}-2a\right)=2a<0$ 无解.

②$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$ 时，方程化为 $x^2+x+\frac{1}{4}-a+a=0$，

即 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$，$\therefore x=-\frac{1}{2}$. $\therefore 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$.

③$a>\frac{1}{4}$时，方程化为 $x^2+x+a-\frac{1}{4}+a=0$，

即 $x^2+x+2a-\frac{1}{4}=0$. $\Delta=1-4\left(2a-\frac{1}{4}\right)=2-8a$.

$\therefore 2-8a<0$ 无解.

综上，$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$.

【答案】 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$.

例 2 （2008 年上海高考理 · T20）设 $P(a,b)(b\neq 0)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点，l 是经过原点与点 $(1,b)$ 的直线. 记 Q 是直线 l 与抛物线 $x^2=2Py(P\neq 0)$ 的异于原点的交点.

（Ⅰ）已知 $a=1,b=2,P=2$，求点 Q 的坐标；

（Ⅱ）已知点 $P(a,b)(ab\neq 0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，$P=\frac{1}{2ab}$. 求证：点 Q 落在双曲线 $4x^2-4y^2=1$ 上；

（Ⅲ）已知动点 $P(a,b)$ 满足 $ab\neq 0$，$P=\frac{1}{2ab}$. 若点 Q 始终落在一条关于 x 轴对称的抛物线上，试问动点 P 的轨迹落在哪种二次曲线上，并说明理由.

【解析】 （Ⅰ）当 $a=1,b=2,P=2$ 时，

解方程组 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=2x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=8,\\y=16,\end{cases}$

即点 Q 的坐标为 $(8,16)$.

（Ⅱ）由方程组 $\begin{cases}x^2=\frac{1}{ab}y,\\y=bx,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{a},\\y=\frac{b}{a},\end{cases}$

即点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1}{a},\frac{b}{a}\right)$.

$\because P$ 是椭圆上的点，即 $\frac{a^2}{4}+b^2=1$，

$\therefore 4\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{4}{a^2}(1-b^2)=1$.

因此点 Q 落在双曲线 $4x^2-4y^2=1$ 上.

（Ⅲ）设 Q 所在抛物线的方程为 $y^2=2q(x-c)$，$q\neq 0$.

将 $Q\left(\frac{1}{a},\frac{b}{a}\right)$ 代入方程，得 $\frac{b^2}{a^2}=2q\left(\frac{1}{a}-c\right)$，

即 $b^2=2qa-2qca^2$.

当 $qc=0$ 时，$b^2=2qa$，此时点 P 的轨迹落在抛物线上；

当 $qc=\frac{1}{2}$ 时，$\left(a-\frac{1}{2c}\right)^2+b^2=\frac{1}{4c^2}$，

此时点 P 的轨迹落在圆上；

当 $qc>0$ 且 $qc\neq\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\left(a-\frac{1}{2c}\right)^2}{\frac{1}{4c^2}}+\frac{b^2}{\frac{q}{2c}}=1$，此时点 P 的轨迹落在椭圆上；

当 $qc<0$ 时，$\frac{\left(a-\frac{1}{2c}\right)^2}{\frac{1}{4c^2}}-\frac{b^2}{\left(-\frac{q}{2c}\right)}=1$，此时点 P 的轨迹落在双曲线上.

2. 按某些运算的要求分类讨论

有些运算有一定的要求限制，如除法要求除式不为零；解不等式要看不等式两边是同乘以一正数还是负数；在实数集内开偶次方时被开方式须非负；对数运算其真数应为正数等. 这些都是进行运算时须进行讨论的动因.

例 3 已知 $a\in\mathbf{R}$，解关于 x 的不等式 $a(ax-1)>x-1$.

【解】 不等式变形为 $(a^2-1)x>a-1$.

若 $a=1$，原不等式为 $0>0$，无解；

若 $a=-1$，原不等式为 $0>-2$，其解为一切实数；

若 $|a|>1$，则 $a^2-1>0$，原不等式的解集为 $x>\frac{1}{a+1}$；

若 $|a|<1$，则 $a^2-1<0$，原不等式的解集为 $x<\frac{1}{a+1}$.

【解后感言】 若按 $x<-1$，$x=-1$，$-1<x<1$，$x=1$，$x>1$ 来进行分类也行.

例 4 已知 $a>0$，$a\neq1$，$b\in\mathbf{R}$，解方程 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=b$.

【思路探索】 本例出现 a,b 两个参数，究竟如何进行分类讨论好，尚不清楚，待变形后再定.

【解】 原方程变形为

$a^x-a^{-x}=b\cdot a^x+b\cdot a^{-x}$

即 $(1-b)a^{2x}=1+b$ （ * ）

当 $b=1$ 时，(*)式无解，原方程无解

当 $b\neq1$ 时，原方程同解于 $a^{2x}=\frac{1+b}{1-b}$

若 $-1<b<1$，则 $\frac{1+b}{1-b}>0$，得 $x=\frac{1}{2}\log_a\frac{1+b}{1-b}$

若 $b>1$ 或 $b\leqslant -1$，则 $\dfrac{1+b}{1-b}\leqslant 0$，此时原方程无解.

故当且仅当 $-1<b<1$ 时，原方程的解为

$x=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{1+b}{1-b}$.

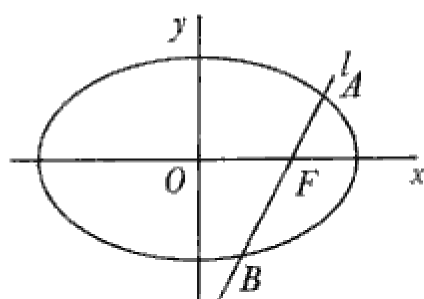
【解后感言】 1. 当出现多参数时，往往是先变形，在探明“方向”后再分类讨论，以避免讨论的盲目性和将问题复杂化；

2. 有时要分级进行讨论（本例分两级讨论），在分级讨论时必须注意要逐级进行，不可越级讨论，否则条理不清，使讨论陷于混乱状态.

3. 根据相关限制条件分类讨论

有些数学定理或公式，其结论本身就是按分类讨论来进行表述的，如解一元二次方程或一元二次不等式，就需按判别式的各种情况来讨论；等比数列前 n 项和公式就是按 $q=1$ 与 $q\neq 1$ 来表述；无穷递缩等比数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，仅在 $|q|<1$ 时才成立.

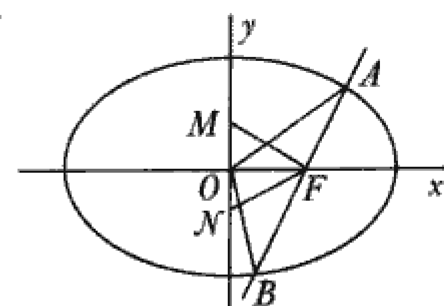
例 5 （2008 年福建高考理 · T21）如右图，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $F(1,0)$，O 为坐标原点.



(1)已知椭圆短轴的两个三等分点与一个焦点构成正三角形，求椭圆的方程；

(2)设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点. 若直线 l 绕点 F 任意转动，恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$，求 a 的取值范围.

【规范解析】 方法一：(1)设 M,N 为短轴的两个三等分点，因为 $\triangle MNF$ 为正三角形，所以 $|OF|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|MN|$，



即 $1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2b}{3}$，解得 $b=\sqrt{3}$.

$a^2=b^2+1=4$，

因此，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)(ⅰ)当直线 l 垂直于 x 轴时，

将 $x=1$ 代入 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$y_A^2=\dfrac{b^2(a^2-1)}{a^2}$.

因为恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$，

$2(1+y_A^2)<4y_A^2$，$y_A^2>1$，即 $\dfrac{a^2-1}{a}>1$，

解得 $a>1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $a<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去），即 $a>1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(ⅱ)当直线 l 不垂直于 x 轴时，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

得 $(b^2+a^2k^2)x^2-2a^2k^2x+a^2k^2-a^2b^2=0$，

故 $x_1+x_2=\frac{2a^2k^2}{b^2+a^2k^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2k^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$.

因为恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$，

所以 $x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2<(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，

得 $x_1x_2+y_1y_x<0$ 恒成立.

$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$=(1+k^2)x_1x_2-k^2(x_1+x_2)+k^2$

$=(1+k^2)\frac{a^2k^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}-k^2\ \frac{2a^2k^2}{b^2+a^2k^2}+k^2$

$=\frac{(a^2-a^2b^2+b^2)k^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$.

由题意得 $(a^2-a^2b^2+b^2)k^2-a^2b^2<0$ 对 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立.

①当 $a^2-a^2b^2+b^2>0$ 时，不合题意；

②当 $a^2-a^2b^2+b^2=0$ 时，$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；

③当 $a^2-a^2b^2+b^2<0$ 时，

$a^2-a^2(a^2-1)+(a^2-1)<0$，$a^4-3a^2+1>0$，

解得 $a^2>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a^2<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$（舍去），

即 $a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，因此 $a>1+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

综合(ⅰ)(ⅱ)，a 的取值范围为 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

例6 设首项为1，公比为 $q(q>0)$ 的等比数列的前 n 项和为 S_n，又设 $T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}$，其中 $n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

【解】 当 $q=1$ 时，$S_n=n$，$S_{n+1}=n+1$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}$，$S_{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$，

$\therefore T_n=\frac{1-q^n}{1-q^{n+1}}$



当 $0<q<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q^{n+1}}=1$

当 $q>1$ 时，有 $0<\dfrac{1}{q}<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{q}\right)^n=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n-q}=\dfrac{1}{q}$

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\begin{cases}1 & \text{当 } 0<q\leqslant 1 \text{ 时，}\\ \dfrac{1}{q} & \text{当 } q>1 \text{ 时.}\end{cases}$

【解后感言】 对分类讨论的结果，若能用公式的形式予以概括表出，给人一种清晰、简明的感觉. 对自我检查是否做到不重不漏也一目了解.

4. 根据函数的某些性质分类讨论

有些数学问题涉及函数的单调性、值域范围等，因此在解题时，常常要讨论参数的不同取值的情况.

例 7 求椭圆 $\dfrac{x^2}{\sin^2\alpha}+\dfrac{y^2}{\cos^2\alpha}=1\left(\alpha\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right)$ 的焦点坐标.

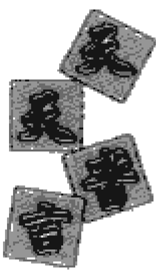
【思路探索】 椭圆焦点的坐标取决于长轴的位置，而长轴的位置又取决于 $\sin^2\alpha$ 与 $\cos^2\alpha$ 的大小，因而应对 α 的取值进行讨论.

【解】 $\because \alpha\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$，根据正弦函数与余弦函数的性质知：

当 $k\pi+\dfrac{\pi}{4}<\alpha<(k+1)\pi-\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sin^2\alpha>\cos^2\alpha$，且 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha<0$，此时 $c^2=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos2\alpha$，椭圆的两个焦点坐标分别为 $(\sqrt{-\cos2\alpha},0)$ 和 $(-\sqrt{-\cos2\alpha},0)$；

当 $k\pi-\dfrac{\pi}{4}<\alpha<k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sin^2\alpha<\cos^2\alpha$ 且 $\cos2\alpha>0$，此时 $c^2=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos2\alpha$，椭圆的两个焦点坐标分别为 $(0,\sqrt{\cos2\alpha})$ 和 $(0,-\sqrt{\cos2\alpha})$.

【解后感言】 题设中有 $\alpha\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ 的限制，因为此时方程中 $\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$，它表示圆的方程，若对 α 无限制，则勿忘这一特殊情况的讨论.



5. **根据图形的位置变化分类讨论**

有时涉及图形可能有多种位置的不同情况，因此需要进行分类讨论.

例 8 a,b,c,d 是空间中四条直线，如果 $a\perp c,b\perp c,a\perp d,b\perp d$，那么（　　）

A. $a/\!/b$ 或 $c/\!/d$

B. $a/\!/b$ 且 $c/\!/d$

C. a,b,c,d 中至多有一对直线互相平行

D. a,b,c,d 任何两条直线都不平行

【思路探索】 这里涉及四条直线，元素较多，关系复杂，可先按某两条直线的位置关系进行分类讨论.

【解】 (1)若 a,b 相交，必能确定一平面 α，由题设知 $c\perp\alpha,d\perp\alpha$，则 $c/\!/d$；

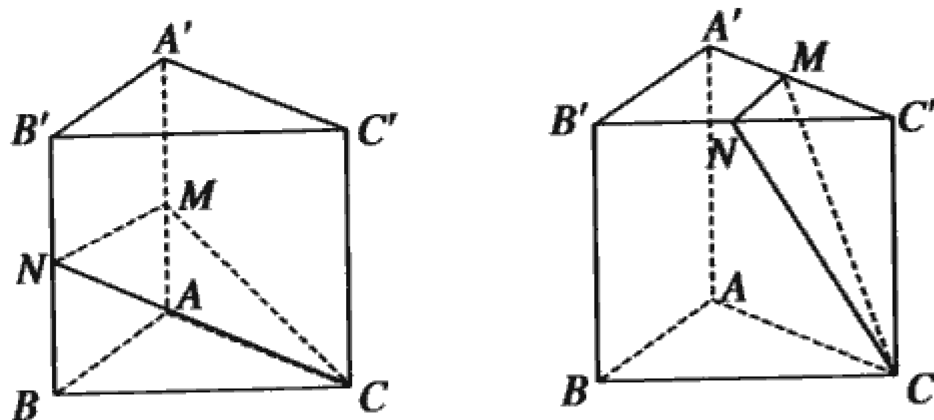
(2)若 $a/\!/b$，满足题设的直线 c,d 位置关系不定，可能平行、可能相交、也可能异面；

(3)若 a,b 异面，由 $c\perp a,c\perp b$，则 c 平行或重合于 a,b 的公垂线，同理 d 也平行或重合于 a,b 的公垂线，得 $c/\!/d$.

综上所述，四线之中必有一对相互平行，故选 A.

例 9 已知正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的底面积为 s，高为 h. 过点 C 作与三棱柱的底面成 α 角的截面 $\triangle MNC\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，使 $MN/\!/AB$，求截面的面积.

【思路探索】 就截面 $\triangle MNC$ 的边 MN 的位置分类讨论.



【解】 如下图，MN 的位置以 $A'B'$ 为界可分为侧面上和上底面上两种情况.

当 MN 与 $A'B'$ 重合时，可求得 $\alpha=\arctan\frac{h}{\sqrt{\sqrt{3}s}}$.

(1)当 $0<\alpha\leqslant\arctan\frac{h}{\sqrt{\sqrt{3}s}}$ 时，$S_{\triangle MNC}=\frac{s}{\cos\alpha}$；

(2)当 $\arctan\dfrac{h}{\sqrt{\sqrt{3}s}}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时,可求得 $S_{\triangle MNC}=\dfrac{\sqrt{3}h^2\cos\alpha}{3\sin^2\alpha}$.

小结 以上所述的几个方面既是引起分类讨论的原因,同时也是我们进行分类讨论的方法和策略,现就有关的几个问题概括和归纳如下:

(1)**分类讨论的一般步骤**:

①确定讨论的对象和讨论的范围(全域);
②确定分类的标准,进行合理的分类;
③逐步讨论(必要时还得进行多级分类);
④总结概括,得出结论.

(2)**分类的常用方法和策略**:

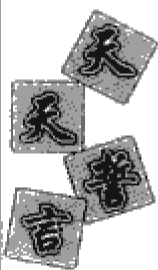
①概念和性质是分类的依据;
②按区域(定义域或值域)进行分类是基本方法;
③不定因素(条件或结论的不唯一,数值大小的不确定,图形位置的不确定)是分类的突破口;
④二分法是分类讨论的利器;
⑤层次分明是分类讨论的基本要求.

(3)**合理分类的三条标准**:

①对所讨论的全域分类要"既不重复,又不遗漏";
②在同一次讨论中只能按所确定的一个标准进行;
③对多级讨论,应逐级进行,不能越级.

实战秘修七

1. 2007 年海南、宁夏卷、理 22C(选修 4—5:不等式选讲)
设函数 $f(x)=|2x+1|-|x-4|$.
(1)解不等式 $f(x)>2$;
(2)求函数 $y=f(x)$ 的最小值.
2. 解不等式 $\sqrt{x-1}>2-x$.
3. 设 $p\in\mathbf{R}$,求关于 x 的不等式 $px^2+px+1-\dfrac{1}{2}p>0$ 的解集.
4. 解关于 x 的方程 $\sqrt{x-a}=x-b$.
5. (2008 年北京高考理·T18)已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-b}{(x-1)^2}$,求导函数 $f'(x)$,并确定 $f(x)$ 的单调区间.
6. 已知 $k\in\mathbf{R}$,求方程 $\sin 2x=k\cos x$ 在 $[0,\pi)$ 上的解.
7. 解关于 x 的方程 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)=b\left[1+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$.
8. 设 $a\in\mathbf{R}$,求函数
$$y=(a+1)^2\sin^2x+4a\sin x\cos x+(a-1)^2\cos^2x$$
的值域.



9. 求 $y=\sin^2 x+2a\sin x+1$ 的最小值 $g(a)$.

10. 已知集合 $A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}$, $B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$. 当实数 m 取何值时 $A\cap B=\varnothing$.

11. 已知线段 AB 在平面 α 内, $AC\perp\alpha$, $BD\perp AB$ 且与 α 成 30° 角. 又 $AB=a$, $AC=BD=b$, 求 C, D 两点间的距离.

12. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上求一点 P, 使 P 到椭圆短轴端点 $B(0,-b)$ 的距离最大, 并求此距离.

13. 已知二次方程 $ax^2+2(2a-1)x+4a-7=0$ 中的 a 为正整数, 问 a 取何值时此方程至少有一个整数根?

14. 若函数 $f(x)=(m-2)x^2-4mx+(2m-6)$ 的图象与 x 轴有两个交点, 其中至少有一个在 x 轴的负半轴上, 求实数 m 的取值范围.

15. 当 m 取什么实数值时, 不等式 $mx^2+mx+2>0$ 对于一切实数 x 成立.

16. 设 $a>0$, $a\neq 1$, $t>0$, 比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小, 并证明你的结论.

17. 设 $y=\log_{\frac{1}{2}}[a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1]$ $(a>0, b>0)$, 求使 y 为负值的 x 的取值范围.

18. (2008 年江苏高考·T22) 已知函数 $f_1(x)=3^{|x-P_1|}$, $f_2(x)=2\cdot 3^{|x-P_2|}$ ($x\in\mathbf{R}$, P_1, P_2 为常数), 函数 $f(x)$ 定义为: 对每个给定的实数 x,

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), f_1\leqslant f_2(x), \\ f_2(x), f_1(x)>f_2(x). \end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充分必要条件 (用 P_1, P_2 表示);

(Ⅱ) 设 a, b 是两个实数, 满足 $a<b$, 且 P_1, $P_2\in(a,b)$. 若 $f(a)=f(b)$, 求证: 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $\frac{b-a}{2}$ (闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$).

19. 设 $a>1$, 解关于 x 的不等式 $|\log_a ax^2|<|\log_a x|+2$.

20. (2005 年湖南卷, 9) 4 位同学参加某种形式的竞赛, 竞赛规则规定: 每位同学必须从甲乙两道题中任选一题作答, 选甲题答对得 100 分, 答错得 -100 分; 选乙题答对得 90 分, 答错得 -90 分. 若 4 位同学的总分为 0, 则这 4 位同学不同得分情况的种数是(　　).

A. 48　　B. 36　　C. 24　　D. 18

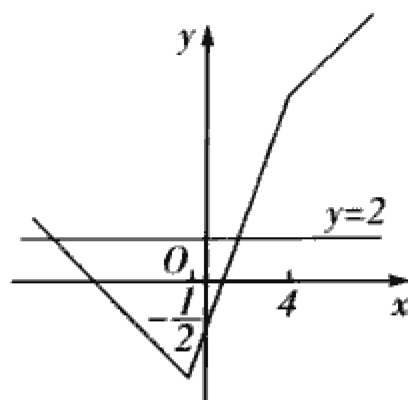
21. (2005 年福建卷, 9) 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市浏览. 要求每个城市有一人浏览, 每人只浏览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎浏览. 则不同的选择方案共有(　　).

A. 300 种　　B. 240 种　　C. 144 种　　D. 96 种

实战秘修七答案与提示

1.【解】 (1)令 $y=|2x+1|-|x-4|$，讨论去掉绝对值，得

$$y=\begin{cases}-x-5, x\leqslant -\frac{1}{2},\\ 3x-3, -\frac{1}{2}<x<4,\\ x+5, x\geqslant 4.\end{cases}$$



分段作出函数 $y=|2x+1|-|x-4|$ 的图象，它与直线 $y=2$ 的交点为 $(-7,2)$ 和 $(\frac{5}{3},2)$.

所以 $|2x+1|-|x-4|>2$ 的解集为 $(-\infty,-7)\cup(\frac{5}{3},+\infty)$.

(2)由函数 $y=|2x+1|-|x-4|$ 的图象可知，当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=|2x+1|-|x-4|$ 取得最小值 $-\frac{9}{2}$.

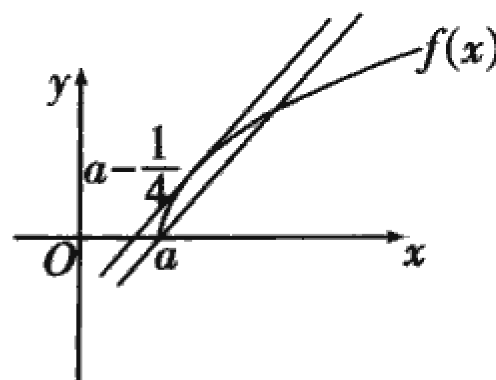
2. $x>\frac{5-\sqrt{5}}{2}$（分 $x<2$ 和 $x\geqslant 2$ 讨论，也可用换元法）.

3. 当 $p<0$ 时，解集为 $\left(\frac{-p+\sqrt{3p^2-4p}}{2p},\frac{-p-\sqrt{3p^2-4p}}{2p}\right)$；

当 $0\leqslant p<\frac{4}{3}$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；

当 $p\geqslant\frac{4}{3}$ 时，解集为 $\left(-\infty,\frac{-p-\sqrt{3p^2-4p}}{2p}\right)\cup\left(\frac{-p+\sqrt{3p^2-4p}}{2p},+\infty\right)$.

（当 $p\neq 0$ 时，注意按 Δ 分类）



4. 令 $f(x)=\sqrt{x-a}$，$g(x)=x-b$，则 $f(x)$ 是一条开口向右的抛物线的 x 轴上方部分，$g(x)$ 是一条斜率为 1 的直线. 利用函数图象，则可轻易看出解方程 $f(x)=g(x)$ 所需的分类情况. 这里只给出结果.

当 $b<a-\frac{1}{4}$ 时，无解.

当 $a-\frac{1}{4}\leqslant b\leqslant a$ 时，$x=\frac{1}{2}(2b+1\pm\sqrt{4b-4a+1})$.

当 $b>a$ 时，$x=\frac{1}{2}(2b+1+\sqrt{4b-4a+1})$.

5.【解析】 $f'(x)=\frac{2(x-1)^2-(2x-b)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\frac{-2x+2b-2}{(x-1)^3}=-\frac{2[x-(b-1)]}{(x-1)^3}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=b-1$.

当 $b-1<1$，即 $b<2$ 时，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,b-1)$	$b-1$	$(b-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$

当 $b-1>1$，即 $b>2$ 时，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	$1,b-1$	$b-1$	$(b-1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$

所以，当 $b<2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b-1)$ 上单调递减，在 $(b-1,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $b>2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,b-1)$ 上单调递增，在 $(b-1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $b-1=1$，即 $b=2$ 时，$f(x)=\frac{2}{x-1}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

6. 当 $k=0$ 时，$x_1=0$，$x_2=\frac{\pi}{2}$；

当 $0<k<2$ 时，$x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\arcsin\frac{k}{2}$，$x_3=\pi-\arcsin\frac{k}{2}$；

当 $k<0$ 或 $k\geqslant 2$ 时，$x=\frac{\pi}{2}$.

7. 原方程变形为 $(1-b)\cos(2x+\frac{\pi}{3})=b$.

当 $b=1$ 时，原方程无解.

当 $b\neq 1$ 时，注意 $-1\leqslant\frac{b}{1-b}\leqslant 1$，得结论：

$b\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{b}{1-b}-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$；

当 $b>\frac{1}{2}$ 时，原方程无解.



8. $y=2\sqrt{2}a\cdot\sin(2x-\frac{\pi}{4})+a^2+1$.

当 $a>0$ 时，$a^2+1-2\sqrt{2}a\leqslant y\leqslant a^2+1+2\sqrt{2}a$；

当 $a<0$ 时，$a^2+1+2\sqrt{2}a\leqslant y\leqslant a^2+1-2\sqrt{2}a$；

当 $a=0$ 时，$y=1$.

9. 令 $t=\sin x$，原题转化为求 $y=t^2+2at+1$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值，它取决于对称轴 $t=-a$ 在 $[-1,1]$ 上的相对位置关系.（参考例 13）

$$g(a)=\begin{cases}2+2a & a<-1\\ 1-a^2 & -1\leqslant a\leqslant 1\\ 2-2a & a>1\end{cases}$$

10. 当 $B=\varnothing$ 时，只要 $m+1>2m-1$，解得 $m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\ 2m-1<-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\ m+1>5\end{cases}$ 解得 $m>4$.

∴当 $m<2$ 或 $m>4$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

11. 当 AC,BD 在 α 同侧时 $CD=\sqrt{a^2+b^2}$；

当 AC,BD 在 α 的两侧时，$CD=\sqrt{a^2+3b^2}$.

12. 当 $b<c$ 时，点 P 坐标为 $(\pm\frac{a^2}{c}\sqrt{c^2-b^2},\frac{b^3}{c^2})$，$|PB|_{max}=\frac{a^2}{c}$；

当 $b\geqslant c$ 时，点 P 坐标为 $(0,b)$，有 $|PB|_{max}=2b$.

13. 视 a 为主元. 解得 $a=1$ 和 $a=5$ 时方程至少有一个整数根.

14. 假设两交点全不在 x 轴的负半轴上，则由

$$\begin{cases}\frac{4m}{m-2}>0\\ \frac{2m-6}{m-2}\geqslant 0\\ \Delta=16m^2-4(m-2)(2m-6)>0\end{cases}$$

解得 $A=\{m|m\geqslant 3$ 或 $m<-6\}$，注意由 Δ 解得

$m<-6$ 或 $m>1$ 且 $m\neq 2$

故 $\overline{A}=\{m|1<m<2$ 或 $2<m<3\}$ 为所求.

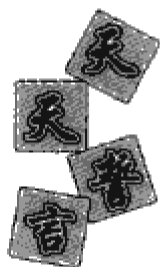
15. ①当 $m=0$ 时，不等式为绝对不等式，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

②当 $m\neq 0$ 时，原不等式为一元二次不等式.

若 $m<0$，则不等式的解不可能是全体实数；

若 $m>0$，则 $\begin{cases}m>0\\ \Delta=m^2-8m<0\end{cases}\Rightarrow 0<m<8$.

∴当 $0\leqslant m<8$ 时，不等式对一切实数 x 都能成立.



16. 因 $t>0$，由均值不等式知 $\frac{t+1}{2}\geqslant\sqrt{t}$，其中当 $t=1$ 时取等号.

∴当 $t=1$ 时，$\frac{1}{2}\log_a t=\log_a\frac{t+1}{2}$；

当 $t\neq1$ 时，$\frac{t+1}{2}>\sqrt{t}$，此时

当 $0<a<1$ 时，$\log_a\frac{t+1}{2}<\frac{1}{2}\log_a t$；

当 $a>1$ 时，$\log_a\frac{t+1}{2}>\frac{1}{2}\log_a t$.

17. 由 $y<0$ 知，

$b^{2x}[(\frac{a}{b})^{2x}+2(\frac{a}{b})^x-1]>0$

即 $b^{2x}[(\frac{a}{b})^x+1+\sqrt{2}][(\frac{a}{b})^x+1-\sqrt{2}]>0$

$\therefore(\frac{a}{b})^x+1-\sqrt{2}>0$

即 $(\frac{a}{b})^x>\sqrt{2}-1$

两边取对数得

$x\lg\frac{a}{b}>\lg(\sqrt{2}-1)$　　　　(＊)

当 $a>b>0$ 时，$\lg\frac{a}{b}>0$，$x>\frac{\lg(\sqrt{2}-1)}{\lg\frac{a}{b}}=\lg_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$；

当 $b>a>0$ 时，$\lg\frac{a}{b}<0$，$x<\lg_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1)$；

当 $a=b>0$ 时，(＊)式恒成立，x 为一切实数.

18. 由原不等式得 $|2\log_a x+1|<|\log_a x|+2$.

①当 $\log_a x<-\frac{1}{2}$ 时，原不等式同解于

$-2\log_a x-1<-\log_a x+2$

$\therefore\log_a x>-3$　　$\therefore-3<\log_a^x<-\frac{1}{2}$

$\because a>1$　　$\therefore x\in(\frac{1}{a^3},\frac{1}{\sqrt{a}})$.

②当 $-\frac{1}{2}\leqslant\log_a x<0$ 时，原不等式同解于

$2\log_a x+1<-\log_a x+2$

$\therefore \log_a x < \frac{1}{3}$　　$\therefore -\frac{1}{2} \leqslant \log_a x < 0$

$\because a > 1$　　$\therefore x \in [\frac{1}{\sqrt{a}}, 1)$.

③当 $\log_a x \geqslant 0$ 时，原不等式同解于

19.【解析】（Ⅰ）由 $f(x)$ 的定义可知，$f(x)=f_1(x)$（对所有实数 x）等价于 $f_1(x) \leqslant f_2(x)$（对所有实数 x），

这又等价于 $3^{|x-P_1|} \leqslant 2 \cdot 3^{|x-P_2|}$，

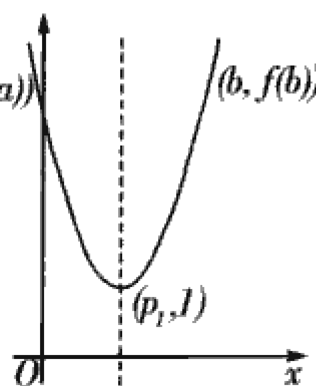
即 $3^{|x-P_1|-|x-P_2|} \leqslant 2$ 对所有实数 x 均成立.　　（＊）

易知函数 $|x-P_1|-|x-P_2|$（$x \in \mathbf{R}$）的最大值为 $|P_2-P_1|$，故（＊）等价于 $3^{|P_2-P_1|} \leqslant 2$，即 $|P_2-P_1| \leqslant \log_3 2$，这就是所求的充分必要条件.

（Ⅱ）分两种情形讨论.

（ⅰ）当 $|P_1-P_2| \leqslant \log_3 2$ 时，由

（Ⅰ）知 $f(x)=f_1(x)$（对所有实数 $x \in [a,b]$），则由 $f(a)=f(b)$ 及 $a<P_1<b$ 易知 $P_1=\frac{a+b}{2}$. 再由 $f_1(x) = \begin{cases} 3^{P_1-x}, x<P_1, \\ 3^{x-P_1}, x \geqslant P_1 \end{cases}$ 的单调性可知，



$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度为 $b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}$. 如图.

（ⅱ）当 $|P_1-P_2| > \log_3 2$ 时，不妨设 $P_1<P_2$，则 $P_2-P_1>\log_3 2$.

于是，当 $x \leqslant P_1$ 时，有 $f_1(x)=3^{P_1-x}<3^{P_2-x}<f_2(x)$，

从而 $f(x)=f_1(x)$.

当 $x \geqslant P_2$ 时，$f_1(x)=3^{x-P_1}=3^{P_2-P_1} \cdot 3^{x-P_2}>3^{\log_3 2} \cdot 3^{x-P_2}=f_2(x)$，从而 $f(x)=f_2(x)$.

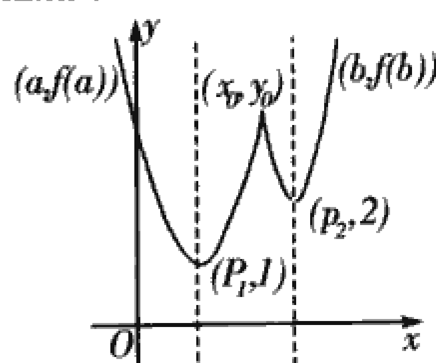
当 $P_1<x<P_2$ 时，$f_1(x)=3^{x-P_1}$ 及 $f_2(x)=2 \cdot 3^{P_2-x}$.

由方程 $3^{x_0-P_1}=2 \cdot 3^{P_2-x_0}$，解得 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 图象交点的横坐标为

$$x_0=\frac{P_1+P_2}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2. \qquad ①$$

显然 $P_1<x_0=P_2-\frac{1}{2}[(P_2-P_1)-\log_3 2]<P_2$，这表明 x_0 在 P_1 与 P_2 之间. 由

①易知 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), P_1 \leqslant x \leqslant x_0 \\ f_2(x), x_0<x \leqslant P_2. \end{cases}$



综上可知，在区间$[a,b]$上，

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x),a\leqslant x\leqslant x_0\\ f_2(x),x_0<x\leqslant b.\end{cases}$$ 如上图所示.

故由函数$f_1(x)$与$f_2(x)$的单调性可知，$f(x)$在区间$[a,b]$上的单调增区间的长度之和为$(x_0-P_1)+(b-P_2)$.

由于$f(a)=f(b)$，即$3^{P_1-a}=2\cdot 3^{b-P_2}$，得

$P_1+P_2=a+b+\log_3 2$. ②

故由①、②得

$$(x_0-P_1)+(b-P_2)=b-\frac{1}{2}[P_1+P_2-\log_3 2]=\frac{b-a}{2}.$$

综合(ⅰ)、(ⅱ)可知，$f(x)$在区间$[a,b]$上的单调增区间的长度之和为$\frac{b-a}{2}$.

20. 4 位同学选甲、乙题的人数有且只有三种可能：①甲 4 人，乙 0 人；②甲 2 人，乙 2 人；③甲 0 人，乙 4 人. 对于①需 2 人答对，2 人答错，共有$C_4^2=6$种；同理对于③亦有 6 种；对于②有$C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1=24$种. 故总数为$6+6+24=36$种. 应选(B).

21. 分三类情况：

①甲、乙两人中只有 1 人被选中，有$C_4^3\cdot C_2^1\cdot 3\cdot A_3^3=144$种；

②甲、乙两人均被选中，有$C_4^2C_2^2A_3^2A_2^2=72$种；

③甲、乙两人均未被选中，有$C_4^4\cdot A_4^4=24$种.

故共有$144+72+24=240$种，应选(B).

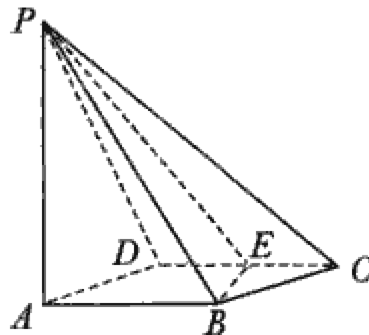
第八章 向量思想上天入地 随心所欲

向量是高中数学教材的新增内容，它具有数与形的双重性．一方面向量具有形(几何)的特征：方向、位置、长度和夹角等；另一方面它又具备了数(代数)的属性：大小、正负，可进行运算等．以向量为工具，改变了传统的平面三角、解析几何、立体几何等内容的学习体系，使几何问题彻底代数化了，使数形结合思想体现得更加深刻、更加完善．同时向量思想为我们解决数学问题提供了一种全新的思维方式和解题途径．

一、利用共线向量的充要条件

定理 向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是有且只有一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$．

例 1 (2008 年湖南高考文・T18)如右图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle BCD=60°$，E 是 CD 的中点，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=\sqrt{3}$．



(1)证明：平面 $PBE\perp$平面 PAB；

(2)求二面角 $A-BE-P$ 的大小．

【规范解析】 (1)因为 $\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，平面 PAB 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_0=(0,1,0)$，则 $\overrightarrow{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{n}_0$ 所以 $\overrightarrow{BE}$ 和 $\boldsymbol{n}_0$ 共线．从而 $BE\perp$平面 PAB．

又因为 $BE\subset$平面 BEP，所以平面 $PBE\perp$平面 PAB．

(2)易知 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 PBE 的一个法向量，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$，

得 $\begin{cases}x_1+0\times y_1-\sqrt{3}z_1=0\\ 0\times x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+0\times z_1=0\end{cases}$，

所以 $y_1=0$，$x_1=\sqrt{3}z_1$，

故可取 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},0,1)$．

而平面 ABE 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$.

于是, $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{2}$.

故二面角 $A-BE-P$ 的大小是 $60°$.

例 2 解不等式 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}<3$.

【解】 设数轴上三点 M、P、N 的坐标分别为 $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}$, $x_3=3$,则

$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}(\lambda>1)$

即 $\dfrac{5}{2}=\lambda\cdot\left(\dfrac{x^3+2x+3}{2x^3+x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow\lambda=\dfrac{5(2x^3+x+1)}{3x+5}>1$

$\Rightarrow\dfrac{5(2x^3+x+1)}{3x+5}-1=\dfrac{2x(5x^2+1)}{3x+5}>0$

$\Rightarrow\dfrac{x}{3x+5}>0$

$\Rightarrow x<-\dfrac{5}{3}$ 或 $x>0$

故原不等式的解集为 $\{x|x<-\dfrac{5}{3}$ 或 $x>0\}$.

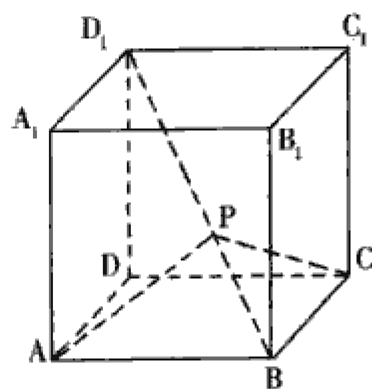
【解后感言】 对形如 $x_1<x<x_2$ 或可化为此类型的不等式,求解时可视 x_1, x, x_2 为数轴上的三点 M、P、N 所对应的坐标,则 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}$ ($\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{MP}$ 同向),依定理知 $\lambda>1$,便可得到原不等式的解集.

二、利用向量的夹角公式

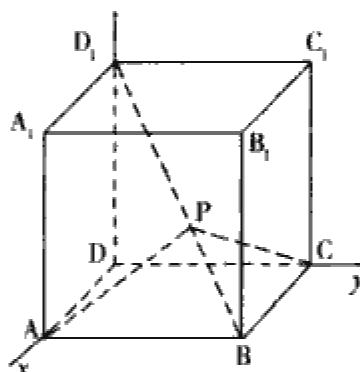
向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ (θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角). 若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

例 1 (2008 年江苏高考 · T22)如右图,设动点 P 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上,记 $\dfrac{D_1P}{D_1B}=\lambda$. 当 $\angle APC$ 为钝角时,求 λ 的取值范围.



【解析】 由题设可知,以 $\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DD_1}$ 为单位正交基底,建立如下图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,则有 $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,0)$, $D_1(0,0,1)$.



由$\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$得$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1B}=(\lambda,\lambda,-\lambda)$，

所以$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1A}=(-\lambda,-\lambda,\lambda)+(1,0,-1)=(1-\lambda,-\lambda,\lambda-1)$，

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD_1}+\overrightarrow{D_1C}=(-\lambda,-\lambda,\lambda)+(0,1,-1)=(-\lambda,1-\lambda,\lambda-1)$.

显然$\angle APC$不是平角，所以$\angle APC$为钝角等价于

$$\cos\angle APC=\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}\rangle=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}<0,$$

这等价于$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}<0$，

即$(1-\lambda)(-\lambda)+(-\lambda)(1-\lambda)+(\lambda-1)^2$

$=(\lambda-1)(3\lambda-1)<0$，得$\frac{1}{3}<\lambda<1$.

因此，λ的取值范围为$\left(\frac{1}{3},1\right)$.

【解后感言】 此题若用椭圆的定义、性质做，十分复杂. 但从条件“$\angle APC$为钝角”入手，利用向量的数量积使解答过程显得十分简单.

例 2 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右端点分别为$A$、$B$，若椭圆上存在一点$Q$使$\angle AQB=\frac{2\pi}{3}$，求椭圆离心率$e$的取值范围.

【解】 根据椭圆的对称性，不妨设$Q(x_0,y_0)(0<y_0\leqslant b)$，则$\overrightarrow{QA}=(-a-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{QB}=(a-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=x_0^2+y_0^2-a^2$. 从而有

$$\cos\angle AQB=\frac{\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}}{|\overrightarrow{QA}|\cdot|\overrightarrow{QB}|}$$

$$=\frac{x_0^2+y_0^2-a^2}{\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}}=-\frac{1}{2}$$

又 $x_0^2=a^2(1-\frac{y_0^2}{b^2})$代入整理得

$$y_0=\frac{2ab^2}{\sqrt{3}(a^2-b^2)}$$

则 $0<\frac{2ab^2}{\sqrt{3}(a^2-b^2)}\leqslant b$

$\Rightarrow 2a\sqrt{a^2-c^2}\leqslant\sqrt{3}c^2$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant e<1$.

三、利用向量的模

例1 已知 $a,b\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b=1$. 证明：

$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geqslant\frac{25}{2}$.

【证明】 构造向量：$\boldsymbol{m}=(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b})$，$\boldsymbol{n}=(1,1)$.

由 $|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|\geqslant\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$ 得

$\sqrt{(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}$

$\geqslant(a+\frac{1}{a})\cdot1+(b+\frac{1}{b})\cdot1$

$=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1+\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}$

$=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

$\geqslant3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=5$

$\therefore\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

例2 证明不等式 $||a|-b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

【证明】 设 a,b 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

$\because|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2$

当 $\cos\theta=1$ 时，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\max}=\sqrt{(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2}=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

当 $\cos\theta=-1$ 时，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|_{\min}=\sqrt{(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2}=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$.

故 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

等号成立的条件：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有一为 $\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同(反)向.

【解后感言】 此不等式对于 a,b 是向量、实数以及复数均成立，这里运用向量模的有关概念进行证明最为巧妙.

例3 (第五届美国数学奥林匹克试题)设一个三直角的四面体 $P-ABC$(即 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=\frac{\pi}{2}$)的六棱长度之和是 S，试求它的极大体积.

【解】 设 $PA=a,PB=b,PC=c$，如右下图，由已知得

$S=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+a+b+c$

又设 $\boldsymbol{m}=(a,b),\boldsymbol{n}=(b,c),\boldsymbol{t}=(c,a)$，则

$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}=(a+b+c,b+c+a)$.

由 $|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{n}|+|\boldsymbol{t}|\geqslant|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}|$ 得

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$

当且仅当 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}$ 同向，即 $a=b=c$ 时等号成立.

$\therefore S=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+a+b+c$

$\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)+(a+b+c)$

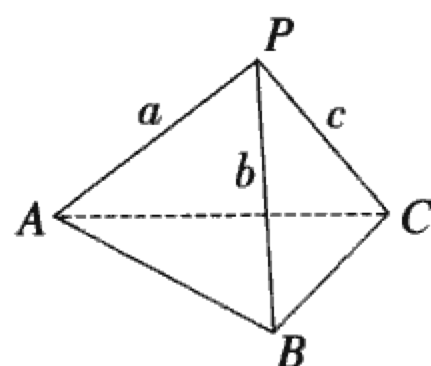
$=(\sqrt{2}+1)(a+b+c)$

$\geqslant(\sqrt{2}+1)\cdot 3\sqrt[3]{abc}$

$=3(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt[3]{6V}(V=V_{P\text{-}ABC})$

$\therefore V=\dfrac{5\sqrt{2}-7}{162}S^3$

即当 $a=b=c$ 时，$V_{\max}=\dfrac{5\sqrt{2}-7}{162}S^3$.



四、利用向量垂直的充要条件

定理 若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$（向量式）

或 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$（坐标式）.

例1 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，证明：当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$ 垂直时，$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的模取得最小值.

【证明】 $\because(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$

$\therefore\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=0$

$\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda|\boldsymbol{b}|^2=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}$

$\therefore|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})^2}$

$=\sqrt{\lambda^2|\boldsymbol{b}|^2+2\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|^2}$

其被开方式为关于 λ 的二次函数，则当 $\lambda=\dfrac{-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{b}|^2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$ 取得最小值.

故当 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$ 时，$|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|$ 取得最小值.

【解后感言】 本题从向量的垂直条件入手，将向量模转化为关于 λ 的二次函数关系，再应用二次函数最值条件使问题得证.

例2 P,Q,M,N 四点都在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上，F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知$\overrightarrow{PF}$与$\overrightarrow{FQ}$共线，$\overrightarrow{MF}$与$\overrightarrow{FN}$共线，且$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$，求四边形 $PMQN$ 面积 S 的最大值与最小值.

【思路探索】 把"$\overrightarrow{PF}$与$\overrightarrow{FQ}$共线，$\overrightarrow{MF}$与$\overrightarrow{FN}$共线，$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$"转化为"$P,F,Q$三点共线，$M,F,N$三点共线，$\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{MF}$". 这样一来该题变为一道常规的关于解析几何最值问题的题目. 需注意的是在解题过程中，应对直线斜率分类讨论.

【解】 由题意知 MN 和 PQ 是椭圆的两条相交于 $F(0,1)$ 的弦.

$\because\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0\quad\therefore\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{MN}$，即 $PQ\perp MN$.

由两条弦中至少有一条存在斜率，不妨设直线 PQ 的斜率为 k. 又 PQ 过点$(0,1)$，所以 l_{PQ} ：$y=kx+1$. 与椭圆方程联立，化简得

$(2+k^2)x^2+2kx-1=0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=\frac{-2k}{2+k^2}$，$x_1x_2=-\frac{1}{k^2+2}$

$\therefore|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$

又 $y_1=kx_1+1$，$y_2=kx_2+1$

$\therefore|PQ|^2=\frac{8(1+k^2)^2}{(2+k^2)^2}\Rightarrow|PQ|=\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}$

①当 $k=0$ 时，$|MN|=2\sqrt{2}$，$|PQ|=\sqrt{2}$，则 $S=2$；

②当 $k\neq0$ 时，直线 MN 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，同理可得

$$|MN|=\frac{2\sqrt{2}(1+\frac{1}{k^2})}{2+\frac{1}{k^2}}$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}|PQ||MN|=\frac{4(1+k^2)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{(2+k^2)\left(2+\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$=\frac{4(2+k^2+\frac{1}{k^2})}{5+2k^2+\frac{2}{k^2}}$$

令 $t=k^2+\frac{1}{k^2}(t\geqslant2)$，则 $S(t)=2\left(1-\frac{1}{5+2t}\right)$.

$\because t\geqslant2\quad\therefore0<\frac{1}{5+2t}\leqslant\frac{1}{9}$



$\therefore S\in[\frac{16}{9},2)$

由①、②可知 $S\in[\frac{16}{9},2]$.

故 $S_{max}=2, S_{min}=\frac{16}{9}$.

五、利用向量平行的充要条件

定理 若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

例1 已知常数 $a>0$，向量 $\boldsymbol{c}=(0,a)$，$\boldsymbol{i}=(1,0)$，经过原点以 $\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{i}$ 为方向向量的直线与过定点 $A(0,a)$，以 $\boldsymbol{i}-2\lambda\boldsymbol{c}$ 为方向向量的直线相交于点 P，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 试问：是否存在两个定点 E、F，使得 $|PE|+|PF|$ 为定值. 若存在，求出 E、F 的坐标；若不存在，说明理由.

【思路探索】 先求出 P 点坐标满足的轨迹方程，然后再判断是否存在两定点，使得 P 点到两定点的距离和为定值.

【解】 设 $P(x,y)$

$\because \boldsymbol{c}=(0,a)$，$\boldsymbol{i}=(1,0)$

$\therefore \boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{i}=(\lambda,a)$，$\boldsymbol{i}-2\lambda\boldsymbol{c}=(1,-2\lambda a)$

$\because \overrightarrow{OP}/\!/(\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{i})$，$\overrightarrow{AP}/\!/(\boldsymbol{i}-2\lambda\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\overrightarrow{AP}=(x,y-a)$

$\therefore a\cdot x-\lambda\cdot y=0$，$(y-a)\cdot 1-(-2\lambda a)\cdot x=0$

即 $\lambda y=ax$，$y-a=-2\lambda ax$，消去参数 λ 得

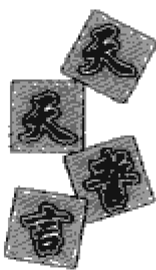
$y(y-a)=-2a^2x^2$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}a\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1 \qquad (*)$$

因为 $a>0$，故有

(ⅰ)当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程(*)表示圆，不存在符合条件的定点 E，F.

(ⅱ)当 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程(*)表示椭圆，焦点 $E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2}\right)$，$F\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2}\right)$ 为所求的符合条件的两定点.

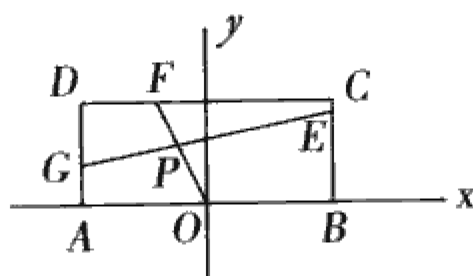


(ⅲ)当 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，方程(*)表示椭圆，焦点 $E\left(0,\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)\right)$ 为所求的符合条件的两定点.

例2 已知常数 $a>0$，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=4a$，O 为 AB 的中点，点 E,F,G 分别在 BC,CD,DA 上移动，且 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$，$P$ 为 GE 与 OF 的交点(如下图). 问是否存在两个定点，使 P 到这两点的距离的和为定值？若存在，求出这两点的坐标及定值；若不存在，请说明理由.

【解】 建立直角坐标系(如下图)，先将点 A,B,C,D 用向量表示：$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=(-2,0)$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}=(2,0)$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}=(2,4a)$.

设 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}=k(0\leqslant k\leqslant 1)$，则由 $\overrightarrow{BE}=k\overrightarrow{BC}$ 得



$\boldsymbol{e}-\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$

$\Rightarrow \boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}+k(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=(2,0)+k(0,4a)$

$=(2,4ak)$

同理 $\boldsymbol{f}=(2-4k,4a)$，$\boldsymbol{g}=(-2,4a-4ak)$.

设所求点 P 对应的向量为 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}=(x,y)$，则因 $\overrightarrow{OP}/\!/\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{GP}/\!/\overrightarrow{GE}$，故由上述向量的性质可得

$$4ax-y(2-4k)=0 \quad ①$$

又 $\overrightarrow{GP}=(x+2,y-4a+4ak)$，$\overrightarrow{GE}=(4,8ak-4a)$

$$\therefore (x+2)(8ak-4a)-4(y-4a+4ak)=0 \quad ②$$

由①、②消去 k，得 P 点坐标应满足方程

$$2a^2x^2+y^2-2ay=0$$

整理得 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1$

(ⅰ)当 $a^2=\frac{1}{2}$ 时，点 P 的轨迹是圆弧，不存在符合题意的两点；

(ⅱ)当 $a^2<\frac{1}{2}$ 时，点 P 的轨迹是椭圆弧，其焦点 $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a\right)$，$\left(\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a\right)$ 为符合题意的两定点，此时点 P 到它们的距离和为定值 $\sqrt{2}$；

（ⅲ）当 $a^2>\frac{1}{2}$ 时，点 P 的轨迹是椭圆弧，其焦点 $\left(0,a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)$、$\left(0,a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)$为符合题意的两定点，此时 P 点到它们的距离和为定值 $2a$.

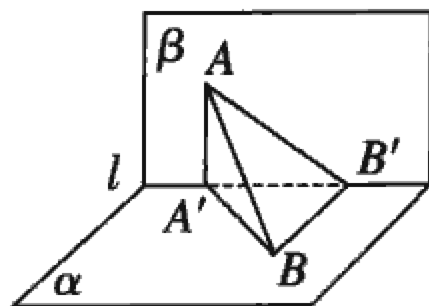
【解后感言】 此例为一道探索题，需要先大胆猜测给出答案，然后再证明结论，难度较大.但由于题目中向量间的平行关系容易发现，所以利用向量平行的充要条件来解答，思路清晰，过程简单.

六、利用向量的射影公式

解题秘言:对向量的数量积公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$进行变形，可得向量的射影公式(向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的射影)：$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$. 不论是平面向量，还是空间向量，其射影都具有明显的几何意义，向量射影的利用，对解决几何问题提供了一个方便实用的工具.

例1 一条直线夹在一个直二面角的两个面内，它和两个面所成的角都是30°，求这条直线与这个二面角的棱所成的角.

【解】 如右图，α-l-β 是直二面角. 作$AA'\perp l$ 于 A'，$BB'\perp l$ 于 B'，则$\angle ABA'=\angle BAB'=30°$，且 $A'B'$是向量$\overrightarrow{AB}$在棱 l 上的射影.



设$|\overrightarrow{AB}|=a$，则 $A'B=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$B'B=\frac{1}{2}a$.

$\therefore A'B'=\sqrt{A'B^2-B'B^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

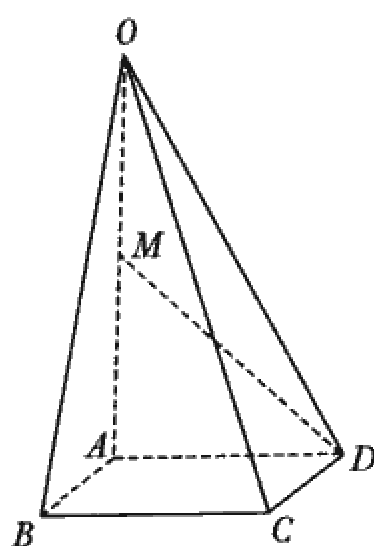
又$\because A'B'=|\overrightarrow{AB}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\rangle$

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\rangle=\frac{A'B'}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\rangle=45°$，即线段 AB 与棱 l 所成的角为 45°.

【解后感言】 求直线与直线所成的夹角，可转化为求与其中一直线共线的向量和该向量在另一直线上的射影所成的锐角.

例2 （2008年安徽高考文·T19）如右图，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$. $OA\perp$ 底面 $ABCD$，$OA=2$，M 为 OA 的中点.

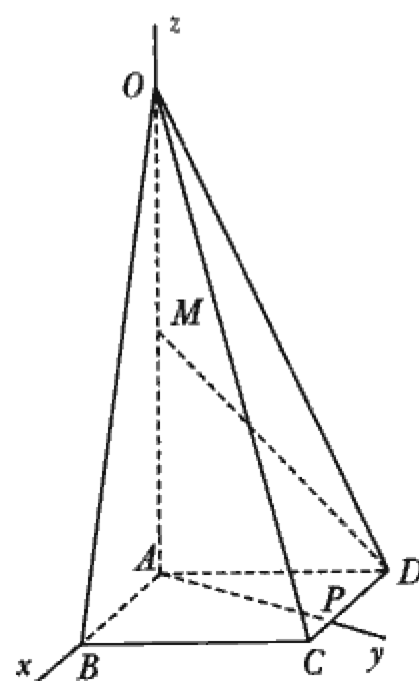


(1)求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小；

(2)求点 B 到平面 OCD 的距离.

【规范解析】 作 $AP\perp CD$ 于点 P. 如右下图，分别以 AB,AP,AO 所在直线为 x,y,z 轴建立直角坐标系.

$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$P\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$O(0,0,2)$，$M(0,0,1)$.



(1)设 AB 和 MD 所成角为 θ，

$\because \overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，

$\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，

$\therefore \cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{MD}|}=\frac{1}{2}$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore AB$ 与 MD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

(2) $\because \overrightarrow{OP}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$，

$\overrightarrow{OD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$，

$\therefore$ 设平面 OCD 的法向量 $\boldsymbol{n}-(x,y,z)$，则

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0$，

得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z=0\end{cases}$

取 $z=\sqrt{2}$，解得 $\boldsymbol{n}(0,4,\sqrt{2})$，设点 B 到平面 OCD 的距离为 d，则 d 为 $\overrightarrow{OB}$ 在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的绝对值.

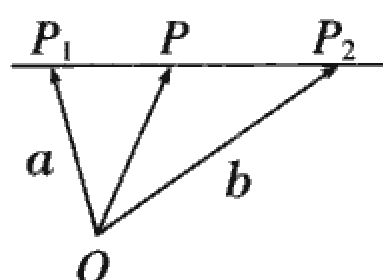
$\because \overrightarrow{OB}=(1,0,-2)$，$\therefore \left||\overrightarrow{OB}|\cos\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3}$，

所以，点 B 到平面 OCD 的距离为 $\frac{2}{3}$.

七、利用定比分点的向量公式

定理 设 $P(x,y)$ 分 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 两点的线段所成的比为 λ（即 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$），则有

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases} \qquad ①$$



公式①称之为线段定比分点的坐标式．下面来简要推导它的向量式．

如上图，在平面内任取一点 O，设 $\overrightarrow{OP_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OP_2}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PP_2}=\boldsymbol{b}-\overrightarrow{OP}$，代入 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 得 $\overrightarrow{OP}-\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}-\overrightarrow{OP})$，即

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{b} \qquad ②$$

解题秘言：公式②正是线段定比分点的向量公式．当 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ 时，由公式②可得到公式①．利用公式②，在解决一些涉及线段的几何问题时，很是方便．

例 1 （2008 年安徽高考理 · T22）设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(\sqrt{2},1)$，且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$．

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A，B 时，在线段 AB 上取点 Q，满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$．证明：点 Q 总在某定直线上．

【思路探索】 解答本题第(1)问可直接根据已知条件列方程组求解，注意 $a^2-b^2=c^2$ 的使用，第(2)问应充分运用 P、A、B、Q 四点共线这个隐含件，

由 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$，可得 $\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$ 进而得到 $\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$，由此可推知 Q 的坐标 (x,y) 满足的直线方程，即可获解．

【规范解析】 (1)由题意：$\begin{cases}c^2=2\\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$

解得 $a^2=4, b^2=2$.

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设点 $Q(x,y)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

由题设 $|\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$, $|\overrightarrow{AQ}|$, $|\overrightarrow{QB}|$ 均不为零,且 $\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{QB}|}$,

又 P,A,Q,B 四点共线,可设 $\overrightarrow{PA}=-\lambda\overrightarrow{AQ}$,
$\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{BQ}(\lambda\neq0,\pm1)$.

于是 $x_1=\frac{4-\lambda x}{1-\lambda}, y_1=\frac{1-\lambda y}{1-\lambda}$ ①

$x_2=\frac{4+\lambda x}{1+\lambda}, y_2=\frac{1+\lambda y}{1+\lambda}$ ②

由于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 在椭圆 C 上,将①、②分别代入 C 的方程 $x^2+2y^2=4$,

整理得 $(x^2+2y^2-4)\lambda^2-4(2x+y-2)\lambda+14=0$ ③

$(x^2+2y^2-4)\lambda^2+4(2x+y-2)\lambda+14=0$ ④

④-③得 $8(2x+y-2)\lambda=0$.

$\because \lambda\neq0$, $\therefore 2x+y-2=0$.

即点 $Q(x,y)$ 总在定直线 $2x+y-2=0$ 上.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, M 分 $\overrightarrow{AC}$ 的比为 $1:3$, N 分 $\overrightarrow{AB}$ 的比为 $2:3$, $\overrightarrow{BM}$ 与 $\overrightarrow{CN}$ 交于 P 点,试用 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 作为一组基底来表示向量 $\overrightarrow{AP}$.

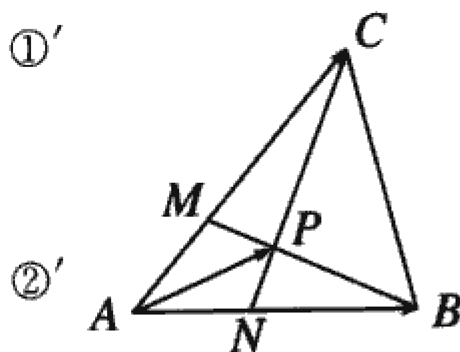
【解】 如右图,设 $\overrightarrow{NP}=\lambda\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{MP}=\lambda'\overrightarrow{PB}$,则由公式②得

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AN}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$ ①′

$=\frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{H\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{\lambda'}{1+\lambda'}\overrightarrow{AB}$ ②′

$=\frac{1}{1+\lambda'}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{\lambda'}{1+\lambda'}\overrightarrow{AB}$



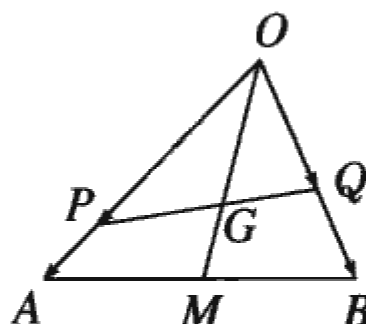
由平面向量的基本定理知

$$\begin{cases}\frac{2}{5(1+\lambda)}=\frac{\lambda'}{1+\lambda'}\\ \frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{1}{4(1+\lambda')}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{1}{5}\\ \lambda'=\frac{1}{2}\end{cases}$$

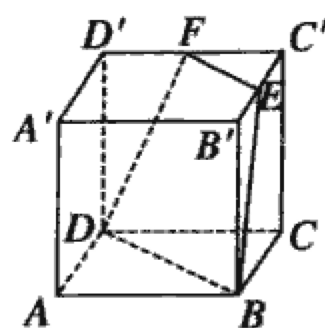
得 $\lambda=\frac{1}{5}$ 代入①′,得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

实战秘修八

1. 已知点 $A(2,-1)$、$B(5,3)$，若直线 $l:kx-y+1=0$ 与线段 AB 相交，求 k 的取值范围.
2. 椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的左右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 为其上一点，当$\angle F_1PF_2$为钝角时，点 P 的横坐标取值范围是________.
3. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.
4. 求函数 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$ 的最值.
5. 设 $P(x,y)$ 是椭圆$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$上的任一点，求 $2x-3y$ 的最大值.
6. 求函数 $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{4-x}$的最大值.
7. 已知 $a>b>0$，$\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，证明：不等式$\frac{a-b}{a+b}\leqslant\frac{a\sin\theta+b}{a\sin\theta-b}\leqslant\frac{a+b}{a-b}$的解集为$\varnothing$.
8. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，平面 $SAC\perp$平面 ABC，$SA\perp AC$，$BC\perp AC$，$SA=6$，$AC=\sqrt{21}$，$BC=8$，求 SB 的长.
9. 已知直线 AB 和 l 所成的角为 $30°$，分别过点 A 和点 B 作直线 l 的垂线，垂足分别为 A'、B'，设 $AB=a$，求 $A'B'$的长.
10. 如图所示，$\overrightarrow{PQ}$过$\triangle OAB$ 的重心 G，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OP}=m\boldsymbol{a}$，$OQ=n\boldsymbol{b}$，证明：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.



11. 如图所示，在棱长为 1 的正方体 $A'C$ 中，过 BD 及 $B'C'$的中点 E 作截面 $BEFD$ 交 $C'D'$ 于 F. 求点 A' 到平面 $BEFD$ 的距离.



12. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}_+$，证明：$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$.（第二届友谊杯国际数学邀请赛试题）.
13. 证明：$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.
14. 在$\triangle ABC$ 内求一点 P，使 $AP^2+BP^2+CP^2$ 的值最小.

15. 若△ABC的三边a、b、c成等差数列，且$a<b<c$，I为△ABC的内心，O是平面上任一点，证明：$OI=\dfrac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$.

16. 已知点$A(2,-1)$、$B(5,3)$，若直线$l:kx-y+1=0$与线段AB相交，求k的取值范围.

17. 证明：$\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\leqslant 3$.

18. 已知$|a|<1$，$|b|<1$，证明：$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

19. 已知a、b、$m\in\mathbf{N}^+$且$a<b$，证明：$\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$.

20. $a>b>0$，比较$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$与$\dfrac{a-b}{a+b}$的大小.

21. 证明：若$0<x<\pi$，则$\dfrac{2-\cos x}{\sin x}\geqslant\sqrt{3}$.

实战秘修八答案与提示

1.【解】 设l与线段AB的交点为$P(x,y)$.

当l过点A，即A、P重合时，$k=-1$；

当A、P不重合时，有$\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\overrightarrow{AP}(\lambda\geqslant 1)$

$\therefore(3,4)=\lambda(x-2,y+1)$

$\therefore x=\dfrac{3+2\lambda}{\lambda}$，$y=\dfrac{4-\lambda}{\lambda}$

$\because P\in l$

$\therefore k\cdot\dfrac{3+2\lambda}{\lambda}-\dfrac{4-\lambda}{\lambda}+1=0$

$\Rightarrow\lambda=\dfrac{4-3k}{2k+2}\geqslant 1\quad\Rightarrow\dfrac{5k-2}{k+1}\leqslant 0$

$\Rightarrow -1<k\leqslant\dfrac{2}{5}$

2.【解】 $F_1(-\sqrt{5},0)$、$F_2(\sqrt{5},0)$，设$P(x,y)$，则$y^2=4-\dfrac{4}{9}x^2$，$\overrightarrow{F_1P}=(x+\sqrt{5},y)\overrightarrow{F_2P}=(x-\sqrt{5},y)$.

$\because\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})+y^2}{\sqrt{(x+\sqrt{5})^2+y^2}\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}}<0$

$\therefore x^2-5+4-\dfrac{4}{9}x^2<0$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{5}\sqrt{5}<x<\dfrac{3}{5}\sqrt{5}$

$\therefore x_P\in\left(-\dfrac{3}{5}\sqrt{5},\dfrac{3}{5}\sqrt{5}\right)$.

3. $\because(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$

$\therefore 7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0$

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$,代入上式有$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$.

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为60°.

4. 由原函数得

$y=1+2\cos^2\alpha+\sin2x=2+(2\cos^2\alpha-1)+\sin2\alpha$

$=2+\sin2x+\cos2x$

因此只须对$\sin2x+\cos2x$的最值即可.

设$\boldsymbol{a}=(\sin2x,\cos2x)$,$\boldsymbol{b}=(1,1)$,由$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$,得

$|\sin2x+\cos2x|\leqslant\sqrt{\sin^22x+\cos^22x}\cdot\sqrt{1^2+1^2}$

即$|\sin2x+\cos2x|\leqslant\sqrt{2}$

故$y_{\max}=2+\sqrt{2}$,$y_{\min}=2-\sqrt{2}$.

5. 设$\boldsymbol{m}=(\frac{x-2}{5},\frac{y+1}{4})$.因为$2x-3y$中的$2x$可由$\frac{x-2}{5}\times10$得到,$-3y$可由$\frac{y+1}{4}\times(-12)$得到.因此设另一向量$\boldsymbol{n}=(10,-12)$.

由$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\leqslant|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|$及$|\boldsymbol{m}|=1$,$|\boldsymbol{n}|=2\sqrt{61}$,得

$2x-3y-7\leqslant2\sqrt{16}\Rightarrow2x-3y\leqslant7+2\sqrt{61}$

故$(2x-3y)_{\max}=7+2\sqrt{61}$.

6. 设$\boldsymbol{a}=(\sqrt{x+3},\sqrt{4-x})$,$\boldsymbol{b}=(1,1)$,由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$,得

$\sqrt{x+3}\cdot1+\sqrt{4-x}\cdot1\leqslant\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{14}$

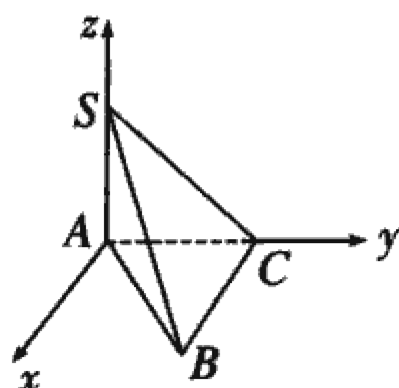
故$y_{\max}=\sqrt{14}$.

7. 设$\frac{a-b}{a+b},\frac{a\sin\theta+b}{a\sin\theta-b},\frac{a+b}{a-b}$对应于数轴上的三点$P_1,P,P_2$,$P$分$\overrightarrow{P_1P_2}$所成比为$\lambda$,则

$$\lambda=\frac{\frac{a\sin\theta+b}{a\sin\theta-b}-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a\sin\theta+b}{a\sin\theta-b}}=\frac{(1+\sin\theta)(a-b)}{(\sin\theta-1)(a+b)}<0$$

$\therefore$点P不在P_1,P_2之间.故命题获证.

8. 如图,建立以A为原点的空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(8,\sqrt{21},0)$,$S(0,0,6)$



$\therefore SB=|\overrightarrow{SB}|$

$=\sqrt{(0-8)^2+(0-\sqrt{21})^2+(6-0)^2}=11$.

9. 由向量射影的定义可得，$A'B'$的长度就是向量$\overrightarrow{AB}$在直线l上射影的长度，故

$|\overrightarrow{A'B'}|=||\overrightarrow{AB}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{l}\rangle|=|a\cdot\cos30^\circ|=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

10. 连PQ，连OG交AB于M，由线段定比分点向量公式得

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\therefore\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ①

设$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{GQ}$，则

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OQ}=\frac{m}{1+\lambda}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda n}{1+\lambda}\boldsymbol{b}$ ②

由①，②得

$$\begin{cases}\frac{m}{1+\lambda}=\frac{1}{3}\\ \frac{\lambda n}{1+\lambda}=\frac{1}{3}\end{cases}\quad(\lambda\neq-1)$$

消去λ得$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3.$

11. 以D为坐标原点，建立空间直角坐标系$D-xyz$，则

$D(0,0,0),B(1,1,0),E(\frac{1}{2},1,1),A'(1,0,1).$

从而有$\overrightarrow{DA'}=(1,0,1),\overrightarrow{BE}(-\frac{1}{2},0,1),\overrightarrow{DB}(1,1,0).$

设平面$BEFD$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$且$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DB},\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BE}$.则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot BE=-\frac{1}{2}x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\ z=\frac{1}{2}x\end{cases}$$

取$x=2$，则$\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

设向量$\overrightarrow{DA}$在法向量$\boldsymbol{n}$上的射影长为d，则d即为点A'到平面$BEFD$的距离

$d=||DA'|\cos\langle\overrightarrow{DA'}\cdot\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DA'}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

$=\frac{|1\times2+0\times(-2)+1\times1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}=\frac{3}{3}=1.$

12. 构造向量：

$\boldsymbol{m}=(\frac{a}{\sqrt{b+c}},\frac{b}{\sqrt{c+a}},\frac{c}{\sqrt{a+b}}),\boldsymbol{n}=(\sqrt{b+c},\sqrt{c+a},\sqrt{a+b}).$

由于$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\leqslant|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|$，则

$\sqrt{\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}}\cdot\sqrt{(b+c)+(a+c)+(a+b)}\geqslant a+b+c$

$\Rightarrow\sqrt{\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}}\geqslant\frac{a+b+c}{\sqrt{2(a+b+c)}}=\frac{\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$.

13. 设 $\overrightarrow{OA}=(a,b),\overrightarrow{OB}=(c,d)$.

当 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 至少有一个为零向量时,不等式为 $0\leqslant0$,原不等式成立.

当 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 均不是零向量时,设其夹角为 α,则有

$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$

$\because|\cos\alpha|\leqslant1$

$\therefore\left|\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}\right|\leqslant1$

即 $(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

14. 设 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{CP}=\boldsymbol{p}$,则 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a},\overrightarrow{BP}=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}$,于是

$AP^2+BP^2+CP^2=(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})^2+\boldsymbol{p}^2$

$=3\boldsymbol{p}^2-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$

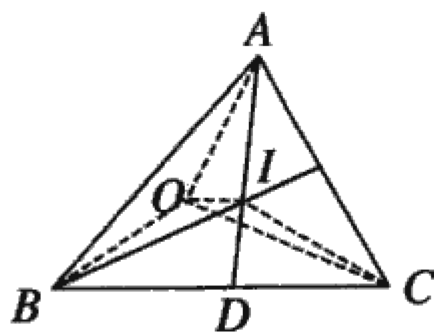
$=3[\boldsymbol{p}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]^2+\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$

$\therefore$ 当 $\boldsymbol{p}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 时,$\overrightarrow{AP^2}+\overrightarrow{BP^2}+\overrightarrow{CP^2}$ 取最小值.

设 D 为 AB 的中点,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{CD}$,于是 $\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

$\therefore C,P,D$ 三点共线且 P 点是△ABC 的重心时,$\overrightarrow{AP^2}+\overrightarrow{BP^2}+\overrightarrow{CP^2}$ 取最小值,即 $AP^2+BP^2+CP^2$ 取最小值.

15. $\because I$ 是△ABC 的内心 $\therefore\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD}\Rightarrow BD=\frac{c}{b}CD$



$\therefore\overrightarrow{BD}=\frac{c}{d}\overrightarrow{DC}$,即 $b\cdot\overrightarrow{BD}+c\cdot\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$.

又 $\because\frac{AI}{ID}=\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD}=\frac{b+c}{a}$

$\therefore a\cdot\overrightarrow{AI}=(b+c)\cdot\overrightarrow{ID}=b\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD})+c\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD})$

$=b\cdot\overrightarrow{IB}+c\cdot\overrightarrow{IC}$

$\therefore a\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI})=b\cdot(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB})+c\cdot(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC})$

$\therefore\overrightarrow{OI}(a+b+c)=a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}$

故 $\overrightarrow{OI}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$.

16. 设 l 与线段 AB 的交点为 $P(x,y)$. 当 l 过点 A，即 A,P 重合时，$k=-1$；当 A,P 不重合时，有 $\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\overrightarrow{AP}(\lambda\geqslant 1)$

$\therefore(3,4)=\lambda(x-2,y+1)\quad\therefore x=\dfrac{3+2\lambda}{\lambda},y=\dfrac{4-\lambda}{\lambda}.$

依 $P\in l$，得 $k\cdot\dfrac{3+2\lambda}{\lambda}-\dfrac{4-\lambda}{\lambda}+1=0$

$\therefore\lambda=\dfrac{4-3k}{2k+2}\geqslant 1\Rightarrow\dfrac{5k-2}{k+1}\leqslant 0\Rightarrow -1<k\leqslant\dfrac{2}{5}.$

其中，当 $k=\dfrac{2}{5}$，即 $\lambda=1$ 时，点 P,B 重合.

17. 设数轴上三点 M,P,N 的坐标为 $x_M=\dfrac{1}{3},x_P=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1},x_N=3$. 显然，

$\overrightarrow{MP}=\lambda\cdot\overrightarrow{PN}$，即

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{3}=\lambda\cdot(3-\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1})$$

$\Rightarrow(x-1)^2=\lambda(x+1)^2$

因此 $\lambda\geqslant 0$.（当 $\lambda=0$，即 $x=1$ 时，点 P 与点 M 重合，原不等式左边取“$=$”；当 λ 不存在，即 $x=-1$ 时，点 P 与点 N 重合，原不等式右边取“$=$”.）

18. 原不等式等价于 $-1<\dfrac{a+b}{1+ab}<1$.

设数轴上三点 M,P,N 的坐标分别为 $x_M=-1,x_P=\dfrac{a+b}{1+ab},x_N=1$，显然

$\overrightarrow{MP}=\lambda\cdot\overrightarrow{PN}$，即

$\dfrac{a+b}{1+ab}+1=\lambda\cdot(1-\dfrac{a+b}{1+ab})$，

$\Rightarrow 1+a+b+ab=\lambda(1-a-b+ab)$

$\Rightarrow(1+a)(1+b)=\lambda(1-a)(1-b)$

$\because|a|<1,|b|<1$

$\therefore\dfrac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}=\lambda>0$

$\therefore\dfrac{\dfrac{a+b}{1+ab}+1}{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}>0\Rightarrow -1<\dfrac{a+b}{1+ab}<1$

$\therefore|\dfrac{a+b}{1+ab}|<1.$

19. 因为$\frac{a}{b}>0$,设数轴上三点 M,P,N 的坐标为 $x_M=0,x_P=\frac{a}{b},x_N=\frac{a+m}{b+m}$,则 $\overrightarrow{MN}=\lambda\cdot\overrightarrow{MP}$,即

$\frac{a+m}{b+m}=\lambda\,\frac{a}{b}\Rightarrow\lambda=\frac{b(a+m)}{a(b+m)}$

$\Rightarrow\lambda-1=\frac{m(b-a)}{a(b+m)}>0$

$\Rightarrow\lambda>1$　故$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

20. 由已知$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>0,\frac{a-b}{a+b}>0$,可设数轴上的三点 M,P,N 的坐标为 $x_M=0$,

$x_P=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},x_N=\frac{a-b}{a+b}$,则 $\overrightarrow{MN}=\lambda\cdot\overrightarrow{MP}$,即

$\frac{a-b}{a+b}=\lambda\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Rightarrow\lambda=\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}<1$　$(a>b>0)$

故$\frac{a-b}{a+b}<\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

21. 设数轴上三点 M,P,N 的坐标为 $x_M=0,x_P=\sqrt{3},x_N=\frac{2-\cos x}{\sin x}$,则 $\overrightarrow{MN}=\lambda\cdot\overrightarrow{MP}$.

$\therefore\frac{2-\cos x}{\sin x}=\lambda\cdot\sqrt{3}\Rightarrow\lambda=\frac{2-\cos x}{\sqrt{3}\sin x}$

$\Rightarrow\lambda-1=\frac{2-2\sin(x+\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}\sin x}\geqslant0\Rightarrow\lambda\geqslant1$

$\Rightarrow\frac{2-\cos x}{\sqrt{3}\sin x}\geqslant1\Rightarrow\frac{2-\cos x}{\sin x}\geqslant\sqrt{3}$.



第九章 数形结合思想清晰直观 别有洞天

数与形是数学中的两个最古老的，也是最基本的问题，它们在一定的条件下可以相互转化. 如某些代数问题、三角问题，往往潜在着几何背景，而借助其背景图形的性质，可使那些抽象的概念、复杂的数量关系几何直观，以便于探求解题思路或找到问题的结论. 数形结合，不仅是一种重要的解题方法，而且也是一种重要的思维方法，因此它在中学数学中占有重要的地位. 为了使读者更系统地掌握数形结合的思想，我们按照运用代数式的几何意义构造几何图形和借助函数的图象构造图形来进行展开.

一、利用"两点间的距离"

例 1 已知 a,b,c,d 都是正数，证明：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

【思路探索】 联想两点间的距离公式，待证式可视为两线段之和不小于第三条线段，若能使三线段组成三角形即可.

【证明】 设 A 点坐标为$(a+c,0)$，B 点坐标为$(0,b+d)$，C 点坐标为(c,b).

由$|AC|+|BC|\geqslant|AB|$，即得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

当且仅当 A,C,B 三点共线，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$时等号成立.

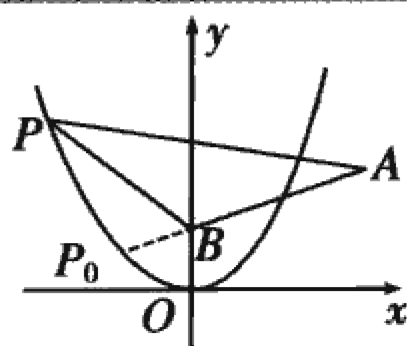
【解后感言】 如何选择点的坐标，使之满足题设和待证式的要求，通常要经过一番尝试.

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$的最大值.

【思路探索】 将函数式变形，得

$$f(x)=\sqrt{(x^2-2)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-1)^2+(x-0)^2}$$

上式可以看作"在抛物线 $y=x^2$ 上的点 $P(x,x^2)$到点 $A(3,2)$，$B(0,1)$距离之差何处取得最大值".



如图，由

$||PA|-|PB||\leqslant|AB|$

知，当 P 在 AB 的延长线上的 P_0 处时，$f(x)$ 取最大值 $|AB|$.

$\therefore f_{\max}(x)=\sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

【解后感言】 这里的"动点"(x,x^2)构成抛物线 $y=x^2$，这种参数方程的思想在数形结合中经常用到.

二、利用"点到直线的距离"

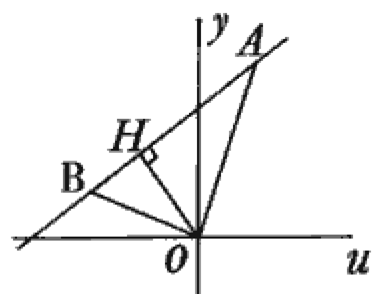
例1 若 $x,y\in\mathbf{R}$，且满足

$ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}(a,b,c\in\mathbf{R})$

证明：$c^2\leqslant x^2+y^2,c^2\leqslant a^2+b^2$.

【思路探索】 由已知条件中的 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 容易联想构造点 $(x,y),(a,b)$，并且条件等式与原点$(0,0)$到以上两点所在直线的距离极其相近.

【证明】 如图，设 $A(a,b),B(x,y)$，O 为原点，作 $OH\perp AB$ 于 H. 则在 uOv 坐标系中，直线 AB 的方程为



$(b-y)u-(a-x)v+ay-bx=0$ 依点 O 到 AB 的距离知

$$|OH|^2=\frac{(ay-bx)^2}{(b-y)^2+(a-x)^2}$$

得 $(ay-bx)^2=|OH|^2\cdot[(x-a)^2+(y-b)^2]$

与条件等式比较，则有 $|OH|^2=c^2$.

显然 $|OH|^2\leqslant|OB|^2,|OH|^2\leqslant|OA|^2$

$\therefore c^2\leqslant x^2+y^2,c^2\leqslant a^2+b^2$.

【解后感言】 这里探求出$|c|$的几何意义是 O 到直线 AB 的距离后使待证式轻而易举地获证.

例2 求函数 $u=|2t-2\sqrt{4-(t-2)^2}+7|$ 的最值.

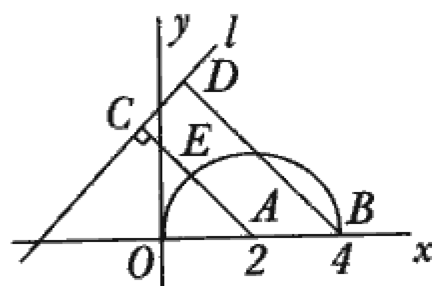
【解】 令 $\begin{cases}x=t\\y=\sqrt{4-(t-2)^2}\end{cases}$

消元整理得 $(x-2)^2+y^2=4(y\geqslant0)$

则 $u=|2x-2y+7|=\sqrt{2^2+(-2)^2}\cdot\dfrac{|2x-2y+7|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}$

其中 $\frac{|2x-2y+7|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}$ 是半圆：$(x-2)^2+y^2=4\ (y\geqslant 0)$ 上的点到直线 $l:2x-2y+7=0$ 的距离.

如图所示，从圆心 A 作 $AC\perp l$ 于 C 交半圆于 E，$BD\perp l$ 于 D，依平面几何知识知



$|CE|\leqslant\frac{|2x-2y+7|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}\leqslant|BD|$

$\because |CE|=|AC|-2=\frac{11}{2\sqrt{2}}-2$

$|BD|=\frac{15}{2\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{2^2+(-2)^2}|CE|\leqslant u\leqslant\sqrt{2^2+(-2)^2}|BD|$

$\therefore 11-4\sqrt{2}\leqslant u\leqslant 15$

故 $u_{\min}=11-4\sqrt{2}$，$u_{\max}=15$.

【解后感言】 应注意理解和掌握这里 u 的几何意义和探求的方法.

三、利用“平行线间的距离”

例 已知 $a,b,x,y\in\mathbf{R}$，且 $a+2b+4=0$，$x+2y=1$.

证明：$(a+x)^2+(b+y)^2\geqslant 5$.

【证明】 待证式的左边可视为点 (a,b) 与 $(-x,-y)$ 间的距离，已知条件说明点 (a,b) 在直线 $l_1:x+2y+4=0$ 上，点 $(-x,-y)$ 在直线 $l_2:x+2y-1=0$ 上，且有 $l_1/\!/l_2$.

显然，平行直线上任意两点间的距离不小于这两平行线间的距离.

$\because d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4+1|}{\sqrt{1+2^2}}=\sqrt{5}$

$\therefore (a+x)^2+(b+y)^2\geqslant 5$.

【解后感言】 对形如等式 $ab+cd=k$，可以视为点 (a,c) 在直线 $bx+dy=k$ 上，或根据证题需要视为点 (a,d) 在直线 $bx+cy=k$ 上等.

四、利用"直线的方程"

例　已知 α,β 为正锐角,且

$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1, 3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0.$

证明:$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

【解】　将 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$ 变形,得

$3\sin^2\alpha-\cos2\beta=0$

又 $3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$

易见点$(\sin^2\alpha,\cos2\beta)$,$(\sin2\alpha,2\sin2\beta)$在直线 $3x-y=0$ 上.

过这两点的直线方程为

$$\frac{y-\cos2\beta}{x-\sin^2\alpha}=\frac{\cos2\beta-2\sin2\beta}{\sin^2\alpha-\sin2\alpha}$$

即 $$\frac{x}{\sin^2\alpha-\sin2\alpha}-\frac{y}{\cos2\beta-2\sin2\beta}+\frac{\cos2\beta}{\cos2\beta-2\sin2\beta}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin2\alpha}=0$$

由于它与 $3x-y=0$ 表示同一直线的方程

$$\therefore \frac{\cos2\beta}{\cos2\beta-2\sin2\beta}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin2\alpha}=0$$

整理、化简,并注意 $\sin\alpha\neq0$,得 $\cos(\alpha+2\beta)=0$.

$\because 0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$　$\therefore \alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

【解后感言】　利用同一直线的两种不同的表示形式来证明有关等式,不失为一种有效的方法.

五、利用"直线的斜率"

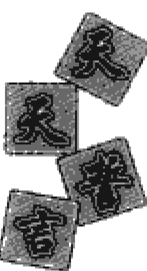
例　已知 $x^2+y^2\leqslant4$,且 $x\geqslant0$,证明:

$$\frac{-4+2\sqrt{13}}{3}\leqslant\frac{y+4}{x+1}\leqslant6.$$

【证明】　令 $\frac{y+4}{x+1}=k$,则

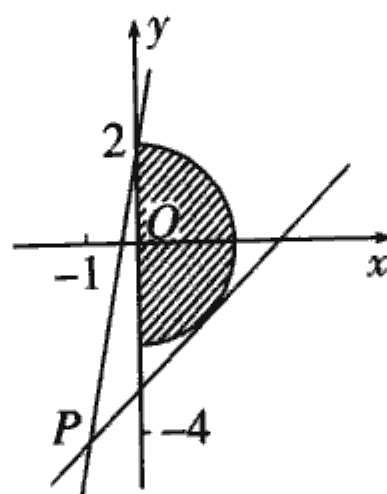
$y+4=k(x+1)$　　　　(*)

显然(*)式为过点 $P(-1,-4)$,斜率为 k 的直线方程.



又 $x^2+y^2\leqslant 4$ 且 $x\geqslant 0$ 表示右半圆.

我们来考查斜率 k 的变化范围：



当直线(*)过点(0,2)时，有

$k_{\max}=6$

当直线(*)与半圆相切时，原点到它的距离等于 2，得

$k_{\min}=\dfrac{-4+2\sqrt{13}}{3}$

$\therefore \dfrac{-4+2\sqrt{13}}{3}\leqslant\dfrac{y+4}{x+1}\leqslant 6.$

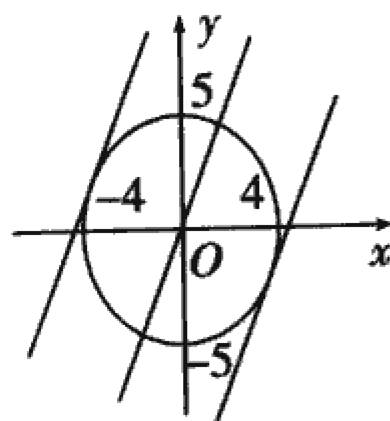
【解后感言】 对$\dfrac{y+b}{x+a}$通常可令其为 k，它表示过点$(-a,-b)$的直线方程的斜率，以此来探求问题的解答.

六、利用“直线的截距”

例 1 已知 x,y 满足条件$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}\leqslant 1$，求 $y-3x$ 的最大值与最小值.

【思路探索】 令 $y-3x=b$，则 $y=3x+b$.

原问题转化为在椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$上找一点，使过该点的直线斜率为 3，在 y 轴上有最大截距和最小截距. 显然此点为平行直线系 $y=3x+b$ 与椭圆的切点.



将 $y=3x+b$ 代入$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 得

$169x^2+96bx+16b^2-400=0$

由 $\Delta=0$，得 $b=\pm 13$.

故 $y-3x$ 的最大值为 13，最小值为 -13.

【解后感言】 对 $ax+by$ 的有关条件求值，我们常可以采用这种方法来构造成直线的截距.

例2 求函数 $y=\sqrt{3(x+2)}+\sqrt{8-x}$的值域.

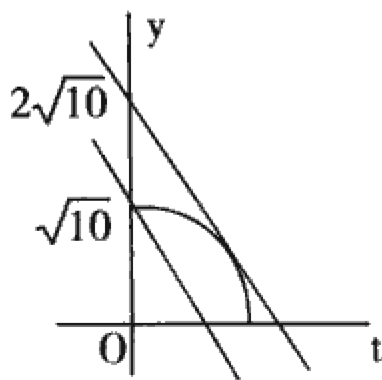
【解】 令 $x+2=t^2$,原函数变为

$$y=\sqrt{3}t+\sqrt{10-t^2}\ (t\geqslant 0) \qquad (*)$$

再引入变量 v,使 $v=y-\sqrt{3}t$,则

$$\begin{cases} v=-\sqrt{3}t+y & ① \\ v=\sqrt{10-t^2}\ (t\geqslant 0) & ② \end{cases}$$

方程①表示斜率为$-\sqrt{3}$的直线,②为四分之一圆.原问题转化为直线①过圆②上的点,求它的截距 y 的变化范围.



如图,显然当直线①过圆②上的点$(0,\ \sqrt{10})$时,有$y_{min}=\sqrt{10}$.

当直线①与半圆相切时,其截距最大,此时

$$\frac{|-\sqrt{3}\cdot 0+y|}{\sqrt{3+1}}=\sqrt{10}$$

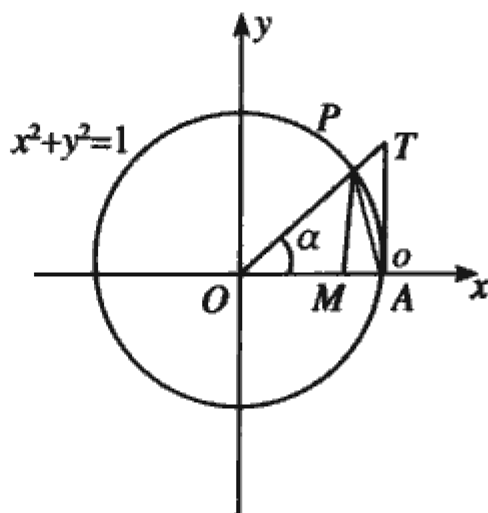
解得 $y=2\sqrt{10}$

$\therefore \sqrt{10}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{10}$.

【解后感言】 仿本例可解决形如 $y=\sqrt{ax+b}\pm\sqrt{c+dx}$或 $y=ax\pm\sqrt{c+bx\pm x^2}$ 的函数值域的问题.

七、利用"单位圆"

例1 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,比较 α,$\sin\alpha$,$\tan\alpha$ 的大小.



【解】 $S_{\triangle POA}<S_{扇形OPA}<S_{\triangle OAT}$

$\therefore \frac{1}{2}\sin\alpha<\frac{1}{2}\alpha<\frac{1}{2}\tan\alpha$

$\therefore \sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

例2 已知 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$，证明：

$2-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{2}$.

【证明】 $\because y=(\cos^2x-\sin^2x)+2\sin x\cos x+(2\sin^2x+2\cos^2x)$

$=\cos 2x+\sin 2x+2$

令 $u=\cos 2x, v=\sin 2x$

则 $y=u+v+2$

即 $u+v+(2-y)=0$ ①

又 $u^2+v^2=1$ ②

其中①为一条直线，②为单位圆，(u,v)同时满足两方程，即圆心$(0,0)$到直线的距离不超过圆的半径.

即 $\dfrac{|2-y|}{\sqrt{1+1}}\leqslant 1$

$\therefore 2-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2+\sqrt{2}$.

【解后感言】 将题设条件化归为一条直线与单位圆的关系来进行研究，是我们处理某些问题的常用手段.

八、利用勾股定理构图

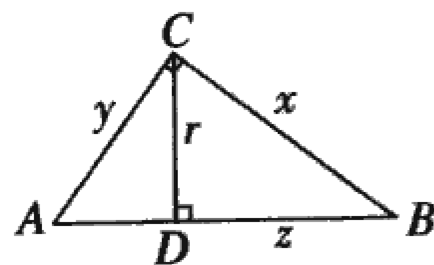
例1 已知 x,y,z,r 均为正数，且

$x^2+y^2=z^2, z\sqrt{x^2-r^2}=x^2$.

证明：$xy=rz$.

【思路探索】 依题设可用 x,y,z 为边构造 Rt△，又依 $\sqrt{x^2-r^2}$ 知，可依前一直角边 x 为斜边，r 为一直角边构造另一直角三角形，然后进行适当的调整.

【证明】 如右图，作 Rt△ABC，使 $AB=z$，$BC=x, AC=y$. 又作 $CD\perp AB$ 于 D，且令 $CD=r$，依射影定理，有



$x^2=BC^2=BD\cdot AB$

$=z\cdot\sqrt{x^2-r^2}$

即所构造出来的图形满足题设条件.

依面积法，显然有 $xy=rz$ 成立.

【解后感言】 依 $a^2+b^2=c^2$ 或 $\sqrt{z^2-x^2}$ 利用勾股定理构造直角三角形比较直观，但所构造出来的图形一应满足题设全部条件，二应能解决待求解的问题，这是构图的出发点.

例2 设 $f(x)=\sqrt{c^2+x^2}$,且 $c>0,a>b>0$,证明:

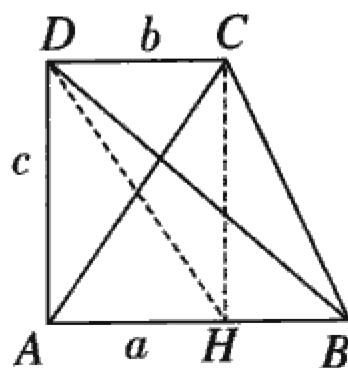
$f(a)-f(b)<a-b$.

【思路探索】 待证式实际上为

$\sqrt{c^2+a^2}-\sqrt{c^2+b^2}<a-b$

故应构造共直角边 c 的两个 Rt△,又应将 $a-b$ 包括进去,当然是直角梯形较合适.

【证明】 如右图构造直角梯形 $ABCD$,使 $AB=a,CD=b,AD=c$,作 $CH\perp AB$ 于 H,连 DH,则



$BD=\sqrt{c^2+a^2},AC=\sqrt{c^2+b^2}=DH,BH=a-b$

在△BDH 中,有 $BD-DH<BH$

即 $\sqrt{c^2+a^2}-\sqrt{c^2+b^2}<a-b$

$\therefore f(a)-f(b)<a-b$.

【解后感言】 这里通过构造出合适的图形,将复杂的函数不等式问题转化为极简单的平面几何问题,令人拍案叫绝.

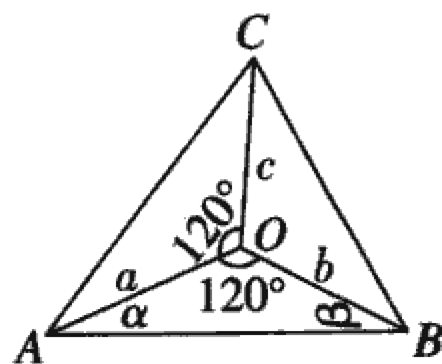
九、利用正余弦定理构图

例1 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,证明:

$$\sqrt{a^2+b^2+ab}+\sqrt{b^2+c^2+bc}+\sqrt{c^2+a^2+ca}\geqslant\sqrt{3}(a+b+c).$$

【思路探索】 a^2+b^2+ab 与余弦定理很相似,变形得 $\sqrt{a^2+b^2+ab}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos120^\circ}$,这样 $\sqrt{a^2+b^2+ab}$表示为 a,b 为边,夹角为 120°的三角形的第三边之长.如右图中的△AOB 的 AB.依此,原不等式的左边为如右图中的△ABC 的周长.

【证明】 作如图所示的三角形.



$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos120^\circ}$

$=\sqrt{a^2+b^2+ab}$

同理 $BC=\sqrt{b^2+c^2+bc}$

$CA=\sqrt{c^2+a^2+ca}$

在△AOB 中,依正弦定理有

$$\frac{AB}{\sin120^\circ}=\frac{a+b}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{a+b}{2\sin30^\circ\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\geqslant a+b$$

$\therefore AB \geqslant \sin 120° \cdot (a+b)$

即 $\sqrt{a^2+b^2+ab} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$

同理 $\sqrt{b^2+c^2+bc} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$

$\sqrt{c^2+a^2+ca} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a)$

三式相加,原不等式即得证.

例 2 正数 x,y,z 满足方程组

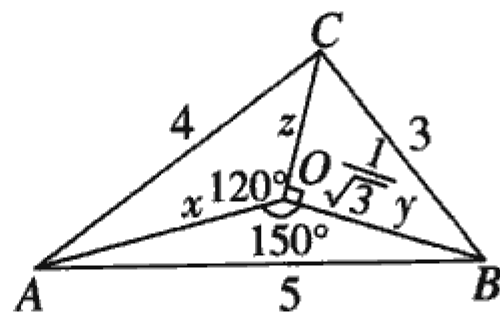
$$\begin{cases} x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=5^2 & ① \\ \frac{1}{3}y^2+z^2=3^2 & ② \\ x^2+xz+z^2=4^2 & ③ \end{cases}$$

试求 $xy+2yz+3xz$ 的值.

【解】 将 $\frac{1}{3}y^2$ 变形为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2$,依余弦定理原方程组可变形为

$$\begin{cases} x^2-2x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)\cos 150°+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2=5^2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2+z^2=3^2 \\ x^2-2xz\cos 120°+z^2=4^2 \end{cases}$$

如右图构造$\triangle ABC$,使 $AB=5,AC=4,BC=3,\angle AOB=150°,\angle AOC=120°,\angle BOC=90°$,则



$AO=x,BO=\frac{1}{\sqrt{3}}y,CO=z$

显然$\angle ACB=90°$.

依 $S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=S_{\triangle ABC}$ 有

$\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}y\sin 150°+\frac{1}{2}xz\sin 120°+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}yz$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 4$

化简即得 $xy+2yz+3xz=24\sqrt{3}$.

【解后感言】 从以上两例我们不难掌握运用正余弦定理构图来解有关问题的一般方法,亦可看到这种方法应用的广泛性和灵活性.

十、利用二次曲线的定义

例1 解方程

$\sqrt{x^2-10\sqrt{3}x+80}+\sqrt{x^2+10\sqrt{3}x+80}=20$

【解】 将方程变形为

$\sqrt{(x-5\sqrt{3})^2+5}+\sqrt{(x+5\sqrt{3})^2+5}=20$

令 $y^2=5$，则原方程转化为方程组

$$\begin{cases}\sqrt{(x-5\sqrt{3})^2+y^2}+\sqrt{(x+5\sqrt{3})^2+y^2}=20 & ①\\ y^2=5 & ②\end{cases}$$

此时方程①表示动点(x,y)到两定点$(5\sqrt{3},0)$，$(-5\sqrt{3},0)$的距离之和为常数20，显然由二次曲线的定义知，它表示椭圆，且 $a=10$，$b=5$，$c=5\sqrt{3}$，其标准方程为

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1 \qquad ③$$

方程②表示两条直线，它与③的交点的横坐标就是原方程的解，将②代入③得

$x=\pm4\sqrt{5}$

为原方程的解.

【解后感言】 对 $\sqrt{(z-a)^2+b}\pm\sqrt{(z+a)^2+b}=k$ 型的无理方程常可用二次曲线的定义来求解. 当两个二次根式间取"+"时为椭圆型，取"−"时为双曲线型，对双曲线型要特别注意原方程的定义域，否则容易出错.

例2 在$\triangle ABC$中，BC边固定，且$|BC|=a$，$\sin C-\sin B=\frac{1}{2}\sin A$. 求顶点 A 的轨迹方程.

【解】 依正弦定理，由 $\sin C-\sin B=\frac{1}{2}\sin A$，可得 $c-b=\frac{1}{2}a$.

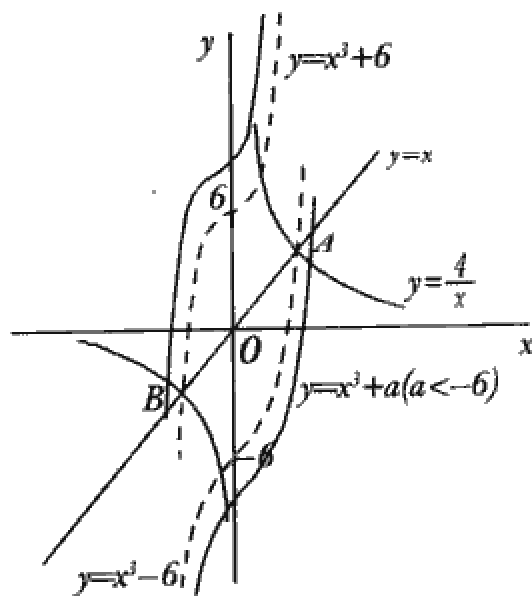
以 BC 边所在直线为 x 轴，BC 中点 O 为坐标原点建立直角坐标系，依双曲线的定义知，A 点的轨迹是以 $B(-\frac{a}{2},0)$，$C(\frac{a}{2},0)$为焦点，焦距为 a，实轴长为$\frac{a}{2}$，虚轴长为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 的双曲线的右半支，除去顶点$(\frac{a}{4},0)$，其轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{16}}-\frac{y^2}{\frac{3a^2}{16}}=1 \quad (x>\frac{a}{4}).$$

【解后感言】 在这里应注意$\triangle ABC$中边长 a,b,c 与双曲线中参数 a,b,c 不要混淆. 另外，对实际问题要依其实际意义保证轨迹方程的纯粹性和完备性.

十一、利用函数的图象

例1 (2008年上海高考理·T11)方程 $x^2+2x-1=0$ 的解可视为函数 $y=x+\sqrt{2}$的图象与函数 $y=\frac{1}{x}$的图象交点的横坐标.若方程$x^4+ax-4=0$的各个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_k(k\leqslant 4)$所对应的点$\left(x_i,\frac{4}{x_i}\right)(i=1,2,\cdots,k)$均在直线 $y=x$ 的同侧,则实数 a 的取值范围是________.



【解析】 方程 $x^4+ax-4=0$ 的各个实根可视为函数 $y=x^3+a$ 的图象与函数 $y=\frac{4}{x}$的图象交点的横坐标,在同一坐标系内,画出函数 $y=x,y=\frac{4}{x},y=x^3+a$ 的图象如图.$A(2,2)$,$B(-2,-2)$,当 $y=x^3+a$ 的图象经过 B、A 时,a 分别等于 6、-6,由图象上、下平移的知识可知,交点均在直线 $y=x$ 同侧时 $a<-6$ 或 $n>6$.

【答案】 $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$

例2 解不等式 $2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)\log_2\frac{1}{x}>0$.

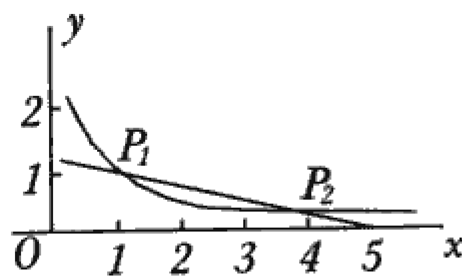
【解】 原不等式等价于 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}(5-x)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}$又等价于

$$\begin{cases}0<x<5\\ \frac{1}{4}(5-x)<\frac{1}{x}\end{cases}$$

在同一坐标系中作

$y=\frac{1}{4}(5-x)\quad(y>0)$

及 $y=\frac{1}{x}\quad(y>0)$的图象,如图所示,其交点的横坐标可由



$$\frac{1}{4}(5-x)=\frac{1}{x}$$

解得,即 $x_1=1,x_2=4$.

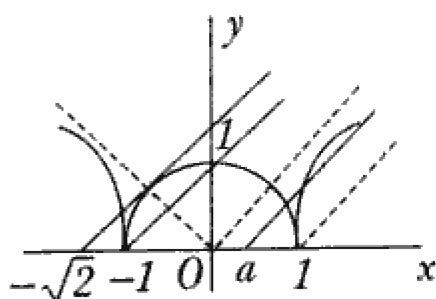
故原不等式的解集为$(0,1)\cup(4,5)$.



例 3 方程 $\sqrt{|1-x^2|}=x-a$ 有两个不相等的实数根，求 a 的范围.

【解】 原方程的解可视为函数 $y=x-a(y\geqslant0)$ 与函数 $y=\sqrt{|1-x^2|}$ 的图象交点的横坐标.

而函数 $y=\sqrt{|1-x^2|}$ 的图象是由半圆 $y^2=1-x^2(y\geqslant0)$ 和等轴双曲线 $x^2-y^2=1(y\geqslant0)$ 在 x 轴的上半部分的图象构成. 如图知，当 $0<a<1$ 或 $a=-\sqrt{2}$，$a=-1$ 时，平行直线系 $y=x-a(y\geqslant0)$ 与 $y=\sqrt{|1-x^2|}$ 的图象有两个不同的交点.



故，当 $0<a<1$ 或 $a=-\sqrt{2}$，$a=-1$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

【解后感言】 本例若用代数法解，其讨论过程将十分繁琐.

用数形结合的方法解函数、不等式及方程等问题时，应用十分广泛且非常灵活. 解题时应注意合理选取辅助函数，使函数的图象易作，变化趋势清晰. 同时应注意图象的草图应能真实地反映函数的变化规律，以免因图形的粗糙性而产生错误.

十二、利用线性规划

例 (2007 年山东卷)某公司计划 2008 年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 分钟的广告，广告总费用不超过 9 万元. 甲、乙电视台的广告收费分别为 500 元/分钟和 200 元/分钟. 假定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告，能给公司带来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元. 问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元?

【解】 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 x 分钟和 y 分钟，总收益为 z 元，由题意得

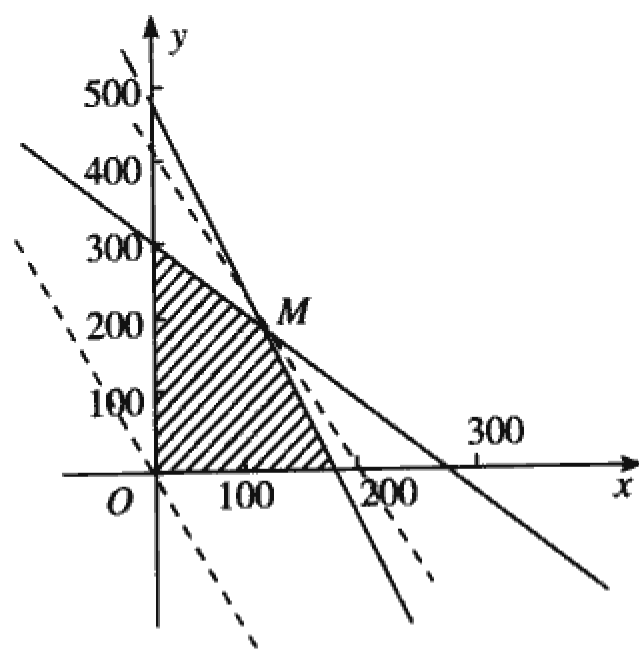
$$\begin{cases}x+y\leqslant300\\500x+200y\leqslant90\ 000\\x\geqslant0,y\geqslant0\end{cases}$$

目标函数为 $z=3\ 000x+2\ 000y$

二元一次不等式组等价于

$$\begin{cases}x+y\leqslant300\\5x+2y\leqslant900\\x\geqslant0,y\geqslant0\end{cases}$$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域,即可行域,如图.



作直线 l:$3\ 000x+2\ 000y=0$

即 $3x+2y=0$

平移直线 l,从图中可知,当直线 l 过 M 点时,目标函数取得最大值.

由方程$\begin{cases}x+y=300\\5x+2y=900\end{cases}$

解得 $x=100,y=200$

∴点 M 的坐标为(100,200)

∴$z_{max}=3\ 000x+2\ 000y=700\ 000$(元)

答:该公司在甲电视台做 100 分钟广告,在乙电视台做 200 分钟广告,公司的收益最大,最大收益是 70 万元.

实战秘修九

1. 求 $y=\sqrt{x^2-10x+29}+\sqrt{x^2-6x+13}$的最小值.
2. 对于 $a\in\mathbf{R}$,试确定 $\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$的所有可能的值.
3. (2008 年福建高考理 · T14)若直线 $3x+4y+m=0$ 与圆 $\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\y=-2+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)没有公共点,则实数 m 的取值范围是________.
4. 已知 x,y 满足 $x-2y+2=0$,求二元函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+2x-6y+10}+\sqrt{x^2+y^2-4x-18y+85}$的最小值.
5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$,且满足$(x-3)^2+(y-3)^2=6$,求$\frac{y}{x}$的最值.
6. 求函数 $y=\frac{2-\sin x}{2-\cos x}$的最值.

7. 证明：$0\leqslant \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2+x}\leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

8. $x,y\in\mathbf{R}$，且满足关系式 $x^2+y^2-2x+4y=0$，求 $x-2y$ 的最大值.

9. 已知 $0<\alpha,\beta<\pi$，且

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta-\frac{3}{2}=0$$

求 α,β 的值.

10. 已知关于 θ 的方程

$$(1-2m)\sin\theta\cos\theta=(m+1)\cos^2\theta+m$$

在 $[0,4\pi]$ 上有实数解. 求 m 的范围.

11. 设 m,n,p 为正实数，且 $m^2+n^2-p^2=0$，求 $\dfrac{p}{m+n}$ 的最小值.

12. 设 a,b,c 为正数，证明：

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\leqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

13. 证明：$\sqrt{x^2+y^2+\sqrt{2}xy}<\sqrt{x^2+z^2+\sqrt{2}xz}+\sqrt{y^2+z^2}$，其中 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$.

14. 解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$.

15. 方程 $\sin x=\lg x$ 实数解的个数为________.

16. 方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2-y=0 & ①\\ ax+bxy+x=0 & ②\end{cases}$$

恰有三组相异的实数解，试求 a,b 间的关系式.

17. 已知 $a\neq0$，$b\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. 证明：

$$(a-b)^2+\left(\sqrt{2-b^2}-\frac{9}{a}\right)^2\geqslant 8.$$

18. 已知 $A=\{(x,y)\mid x=m+2\cos\alpha,y=\sqrt{3}\sin\alpha,\alpha\in\mathbf{R}\}$

$$B=\{(x,y)\mid x=t^2+\frac{3}{2},y=\sqrt{6}t,t\in\mathbf{R}\}.$$

若 $A\cap B\neq\varnothing$，试求 m 的取值范围.

19. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，求 $\dfrac{b+1}{a+2}$ 的取值范围.

20. 甲、乙二人相约在 13 至 14 时在公园相见，早到者会在等待 20 分钟会离去，若二人到达的时刻相互独立，且在 13 至 14 时的任何时刻都等可能，求他们相见的概率.

21. 已知△ABC 的三条边长分别为 a,b,c，且 $b+c\leqslant 2a$，$a+c\leqslant 2b$，求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围.



实战秘修九答案与提示

1. 设点 $A(x,0)B(5,-2),C(3,2)$，由 $|AB|+|AC|\geqslant|BC|=2\sqrt{5}$ 知 $y_{\min}=2\sqrt{5}$.

2. 原式表示当点 $P(a,0)$ 在 x 轴上移动时，求 P 到两定点 $A(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的距离之差的变化范围.

   由 $|PA-PB|<|AB|=1$ 知原式的值在 $(-1,1)$ 内变化.

3. **【解析】** 把圆的参数方程化成普通方程为

   $(x-1)^2+(y+2)^2=1$,

   由已知直线与圆相离，$\therefore \frac{|3\times1+4\times(-2)+m|}{5}>1$,

   解得 $m<0$ 或 $m>10$，故填 $(-\infty,0)\cup(10,+\infty)$.

   【答案】 $(-\infty,0)\cup(10,+\infty)$

4. 由 $f(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-9)^2}$ 知，原题可视为"求直线 $l:x-2y+2=0$ 上的点 $P(x,y)$ 到点 $A(-1,3),B(2,9)$ 距离之和的最小值."

   易得 $f_{\min}(x,y)=\sqrt{101}$.(作 A 关于 l 的对称点 A'，$|BA'|$ 为所求)

5. 令 $\frac{y}{x}=k$，求直线与已知圆相切时的斜率，得

$$(\frac{y}{x})_{\max}=3+2\sqrt{2},(\frac{y}{x})_{\min}=3-2\sqrt{2}.$$

6. y 可视为点 $P(\cos x,\sin x)$ 与 $Q(2,2)$ 两点连线的斜率，且 P 在单位圆上，得 $y_{\max}=\frac{4+\sqrt{7}}{3},y_{\min}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$.

7. 令 $x=\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，从而 $y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+2}$. y 可视为过点 $A(-2,0),P(\cos\theta,\sin\theta)$ 连线的斜率，又 P 在半圆上，故可得证.

8. 令 $x-2y=m$，利用 m 为截距的几何意义，求得 $m_{\max}=10$.

9. 条件式变形为 $\cos\alpha\cos\beta+(1-\sin\alpha)\sin\beta+(\sin\alpha-\frac{3}{2})=0$.

   令 $\cos\beta=x,\sin\beta=y$，依

$$\begin{cases}x\cos\alpha+(1-\sin\alpha)y+(\sin\alpha-\frac{3}{2})=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

   有公共点，得 $\frac{|\sin\alpha-\frac{3}{2}|}{\sqrt{\cos^2\alpha+(1-\sin\alpha)^2}}\leqslant1$

   即 $(2\sin\alpha-1)^2\leqslant0$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$. 同理可得 $\beta=\frac{\pi}{6}$.

10. 原式变形为$(m+1)\cos2\theta+(2m-1)\sin2\theta+3m+1=0$.

令 $\cos2\theta=x,\sin2\theta=y$,依方程组

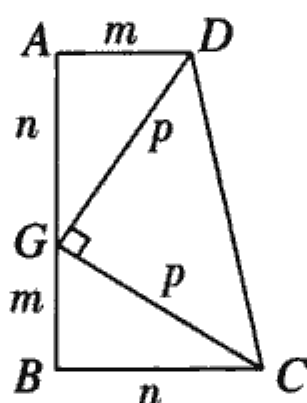
$$\begin{cases}(m+1)x+(2m-1)y+3m+1=0\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

有实数解条件得$\dfrac{|3m+1|}{\sqrt{(m+1)^2+(2m-1)^2}}\leqslant1$

解得$-1-\dfrac{\sqrt5}{2}\leqslant m\leqslant-1+\dfrac{\sqrt5}{2}$.

11. 如图构造直角梯形,易知 $AB\leqslant CD$,即 $m+n\leqslant\sqrt2p$,当且仅当 $m=n$ 时取等号.

$\therefore\dfrac{p}{m+n}\geqslant\dfrac{\sqrt2}{2}$,即$\left(\dfrac{p}{m+n}\right)_{\min}=\dfrac{\sqrt2}{2}$.

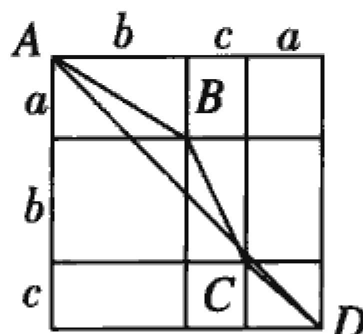


12. 如图所示构图,则

$AB=\sqrt{a^2+b^2},BC=\sqrt{b^2+c^2}$

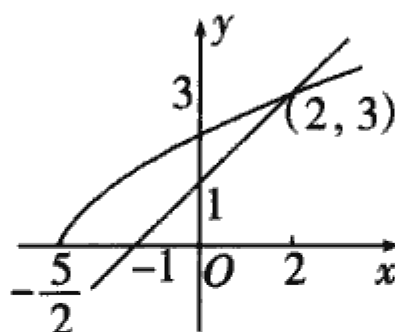
$CD=\sqrt{c^2+a^2},AD=\sqrt2(a+b+c)$

依折线段与直线段的关系即得.

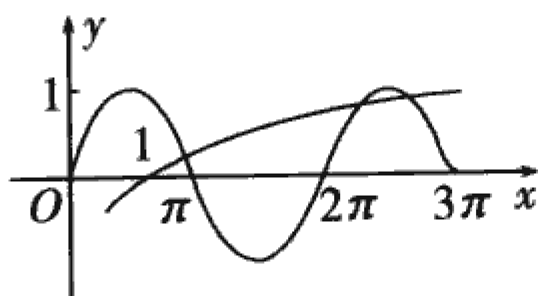


13. 依余弦定理构图,在$\triangle ABC$ 内取一点 O,使$\angle AOB=\angle AOC=135°$. $\angle BOC=90°$. 令 $OA=x,OB=y,OC=z$,依三角形两边之和大于第三边即得.

14. 函数 $y=\sqrt{2x+5}$与 $y=x+1$ 的位置关系如下图所示,不等式的解为$-\dfrac{5}{2}\leqslant x<2$.



15. 在同一坐标系中作 $y=\sin x$ 及 $y=\lg x$ 的图象，因为 $3\pi<10$，如图，两图象有 3 个交点，故原方程的实数解有 3 个.



16. 方程①表示圆 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，方程②表示两条直线 $x=0$ 与 $ax+by+1=0$.

$x=0$ 必与圆有两个交点 $O(0,0)$ 与 $A(0,1)$.

当直线 $ax+by+1=0$ 不过 A 点且与圆相切时，有

$b=\frac{1}{4}(a^2-4)(a\neq0)$；

当直线 $ax+by+1=0$ 过 A 且与圆相割时，$b=-1$ 且 $a\neq0$.

即原方程组恰有三组实解的条件为

$\begin{cases}a\neq0\\b=\frac{1}{4}(a^2-4)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\neq0\\b=-1\end{cases}$

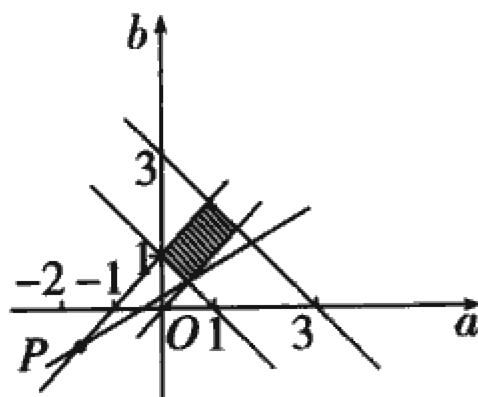
17. 证点 $A(b,\sqrt{2-b^2})$ 与点 $B\left(a,\frac{9}{a}\right)$ 间的距离平方大于或等于 8. 显然点 A 在圆 $x^2+y^2=2(y\geqslant0)$ 上，点 B 在双曲线 $xy=9$ 上. 两曲线的最近点为 $(1,1)(3,3)$，其距离平方为 8.

18. 消参后，集合 A 为椭圆 $\frac{(x-m)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，集合 B 为抛物线 $y^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$.

$A\cap B\neq\varnothing$，即两曲线有公共点，将 A 的参数式代入 $y^2=6\left(x-\frac{3}{2}\right)$ 中得 $m=-\frac{1}{2}(\cos\alpha+2)^2+4$.

当 $\cos\alpha=1$ 时，$m=-\frac{1}{2}$；当 $\cos\alpha=-1$ 时，$m=\frac{7}{2}$.

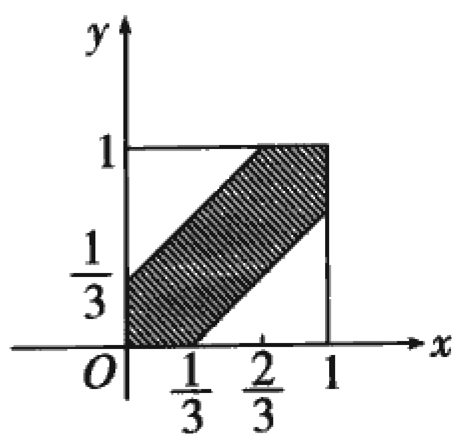
故 $m\in\left[-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$.



19. 由 $\begin{cases}1\leqslant b-a+1\leqslant2\\2\leqslant a+b+1\leqslant4\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\leqslant b-a\leqslant1\\1\leqslant a+b\leqslant3\end{cases}$

如右图，在直角坐标系 aOb 中，画出矩形区域. 将 $\frac{b+1}{a+2}=\frac{b-(-1)}{a-(-2)}$ 转化为动点 $M(a,b)$ 与定点

$P(-2,-1)$连线的斜率问题，易求出$\frac{b+1}{a+2}\in\left[\frac{3}{5},1\right]$.



20. 设二人到达的时刻分别为x,y，则x,y满足$|x-y|\leqslant\frac{20}{60}$才能相见. 如图，以二人到达的时刻分别作横坐标和纵坐标，那么二人到达的时刻分布在边长为1的正方形内，而相见发生在图中的规划区域内. 故相见的概率P为规划区域部分的面积与正方形面积之比. 即$P=\frac{S_{阴影}}{S_{正方形}}=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1}=\frac{5}{9}$.

21. 由线性规划知识，知a,b,c满足的约束条件是

$$\begin{cases}a<b+c\leqslant 2a\\ b<a+c\leqslant 2b\\ c<a+b\\ a,b,c>0\end{cases}$$

令$x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{a}$，则上式变为

$$\begin{cases}1<x+y\leqslant 2\\ x<y+1\leqslant 2x\\ y<x+1\\ x,y>0\end{cases}$$

作出平面区域，易知$\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$，则$\frac{b}{a}$的取值范围是$\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$.

十一类神奇的高考热点专题的方法技巧

第十章 三角恒等变换技巧大曝光

三角恒等变换不但在三角函数式的化简、求值和证明三角恒等式中经常用到，而且由于通过三角换元可将某些代数问题化归为三角问题；立体几何中的诸多位置关系以其交角来刻画，最后又以三角问题反映出来；由于参数方程的建立，又可将解析几何中的曲线问题归结为三角问题. 因此，三角恒等变换在整个高中数学中涉及面广，是常用的解题“工具”. 而且由于三角公式众多，方法灵活多变，若能熟练地掌握三角恒等变换，不但能增强对三角公式的记忆，加深对诸多公式内在联系的理解，而且对发展学生的逻辑思维能力，提高数学知识的综合运用能力都大有裨益.

一、切割化弦

解题秘言:“切割化弦”就是把三角函数中的正切、余切、正割、余割都化为正弦和余弦，以有利于问题的解决或发现解题途径. 其实质是“归一”思想.

例 1 (2008 年江西高考理・T17)在$\triangle ABC$中，a、b、c分别为角A、B、C所对的边长，$a=2\sqrt{3}$，$\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{C}{2}=4$，$\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$. 求$A$、$B$及$b$、$c$.

【解析】 由$\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{C}{2}=4$得$\cot\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}=4$，

化简得$\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=4$，

所以$\sin C=\frac{1}{2}$，又$C\in(0,\pi)$. 即$C=\frac{\pi}{6}$或$C=\frac{5\pi}{6}$.

由$\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$得

$\sin B\sin C=\frac{1}{2}[1-\cos(B+C)]$，

即$\cos(B-C)=1$，所以$B=C=\frac{\pi}{6}$，$A=\pi-(B+C)=\frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得

$b=c=a\dfrac{\sin B}{\sin A}=2\sqrt{3}\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$.

例2 已知θ同时满足$a\sec^2\theta-b\cos\theta=2a$和$b\cos^2\theta-a\sec\theta=2b$，且$a,b$均不为零，试求$a,b$的关系.

【解】 $\begin{cases} a\sec^2\theta-b\cos\theta=2a & ① \\ b\cos^2\theta-a\sec\theta=2b & ② \end{cases}$

显然$\cos\theta\neq0$

由①$\times\cos^2\theta+$②$\times\cos\theta$，得

$2a\cos^2\theta+2b\cos\theta=0$

即$a\cos\theta+b=0$

又$a\neq0$ $\therefore\cos\theta=-\dfrac{b}{a}$

代入①得

$a\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2-b\left(-\dfrac{b}{a}\right)=2a$

即 $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^2}{a}=2a$

得$a^4+b^4=2a^2b^2$

$\Leftrightarrow(a^2-b^2)^2=0$

$\therefore a^2=b^2$.

【解后感言】 本例是化弦在解有关问题时的具体运用，其中正割与余弦、余割与正弦之间的倒数关系是化弦的通径.

例3 已知$\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$，$\tan\alpha+\cot\alpha=-\dfrac{10}{3}$.

(1)求$\tan\alpha$的值；

(2)求$\dfrac{5\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+11\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})}$的值.

(注：$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$)

【解】 (1)$\because\tan\alpha+\cot\alpha=-\dfrac{10}{3}$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

$\therefore3\tan^2\alpha+10\tan\alpha+3=0$，

解得$\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$或$\tan\alpha=-3$.

$\because\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$，$\therefore-1<\tan\alpha<0$.

$\therefore\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$

(2) $\because \tan\alpha=-\frac{1}{3}$,

$\therefore \dfrac{5\sin^2\frac{\alpha}{2}+8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+11\cos^2\frac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}$

$=\dfrac{5(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2})+4\sin\alpha+6\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}-8}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$=\dfrac{5+4\sin\alpha+3+3\cos\alpha-8}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$=\dfrac{4\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$=\dfrac{4\tan\alpha+3}{\tan\alpha-1}=-\dfrac{5}{4}$.

例4 (2006年江苏高考·T14) $\cot20^\circ\cos10^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ\tan70^\circ-2\cos40^\circ=$ ________.

【规范解析】 原式 $=\dfrac{\cos20^\circ\cos10^\circ}{\sin20^\circ}+\dfrac{\sqrt{3}\sin10^\circ\sin70^\circ}{\cos70^\circ}-2\cos40^\circ$

$=\dfrac{\sin70^\circ(\cos10^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ)}{\cos70^\circ}-2\cos40^\circ$

$=\dfrac{\sin70^\circ\cdot\sin40^\circ}{\cos70^\circ}-2\cos40^\circ$

$=-2\cdot\dfrac{\cos40^\circ\cos70^\circ-\sin70^\circ\sin40^\circ}{\cos70^\circ}$

$=-2\cdot\dfrac{\cos110^\circ}{\cos70^\circ}=2$.

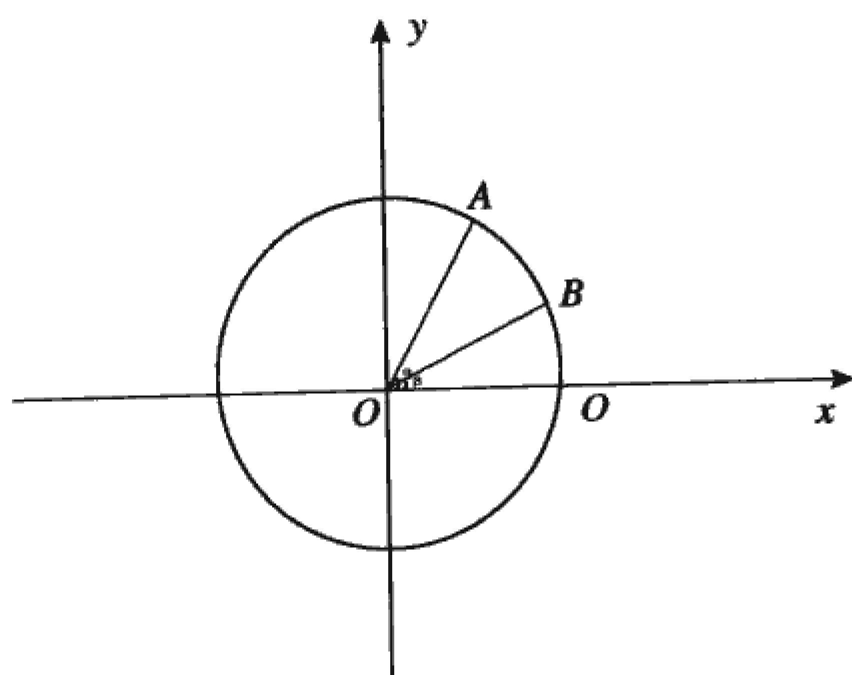
【答案】 2

二、角的拆变

解题秘言:在三角恒等变换中经常需要转化角的关系,在解题过程中必须认真观察和分析结论中是哪个角,条件中有没有这些角,哪些角发生了变化等等.因此角的拆变技巧,倍角与半角的相对性等都十分重要,应用也相当广泛且非常灵活.常见的拆变方法有:α 可变为 $(\alpha+\beta)-\beta$;2α 可变为 $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$;$2\alpha-\beta$ 可变为 $(\alpha-\beta)+\alpha$;α 可视为 $\frac{\alpha}{2}$ 的倍角;$(45^\circ\pm\alpha)$ 可视为 $(90^\circ\pm2\alpha)$ 的半角等等.

例1 (2008年江苏高考·T15)如图,在平面直角坐标系 xoy 中,以 ox 轴为始边做两个锐角 α,β,它们的终边分别与单位圆相交于 A,B 两点,已知 A,B 的横坐标分别为 $\frac{\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{5}}{5}$.





(Ⅰ)求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值；

(Ⅱ)求 $\alpha+2\beta$ 的值.

【解】 由条件的 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，因为 α,β 为锐角，所以 $\sin\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，因此 $\tan\alpha=7$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$

(Ⅰ)$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-3$

(Ⅱ)$\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{4}{3}$，所以 $\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan2\beta}{1-\tan\alpha\tan2\beta}=-1$

$\because\alpha,\beta$ 为锐角，$\therefore 0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$，$\therefore\alpha+2\beta=\frac{3\pi}{4}$.

【解后感言】 本小题考查三角函数的定义、两角和的正切、二倍角的正切公式.

例2 (2007年四川高考·理17、文18)已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$，且 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $\tan2\alpha$ 的值；

(2)求 β.

【解】 (1)由 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{7}{1}=4\sqrt{3}$.

于是 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times4\sqrt{3}}{1-(4\sqrt{3})^2}=-\frac{8\sqrt{3}}{47}$.

(2)由 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

又∵ $\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$，∴ $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

由 $\beta=\alpha-(\alpha-\beta)$，得 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{7}\times\frac{13}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}$

$=\frac{1}{2}$. ∴ $\beta=\frac{\pi}{3}$.

例 3 设 α 为第四象限角，若 $\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{13}{5}$，则 $\tan2\alpha=$ ________.

【解】 $\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin(2\alpha+\alpha)}{\sin(2\alpha-\alpha)}=\frac{\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha}{\sin2\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha\sin\alpha}$

$=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{\tan2\alpha-\tan\alpha}=\frac{3-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{13}{5}$

∴ $\tan^2\alpha=\frac{1}{9}$

又∵ α 为第四象限角 ∴ $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$

∴ $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{3}{4}$.

【解后感言】 这里将 3α 写成 $2\alpha+\alpha$，将 α 写成 $2\alpha-\alpha$ 是解题的切入点. 根据三角表达式的结构特征，寻求它与三角公式间的相互关系是解题的关键.

例 4 求 $\sin(\theta+75°)+\cos(\theta+45°)-\sqrt{3}\cos(\theta+15°)$ 的值.

【解】 设 $\theta+15°=\alpha$，则

$\sin(\theta+75°)+\cos(\theta+45°)-\sqrt{3}\cos(\theta+15°)$

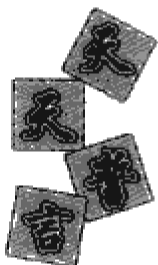
$=\sin(\alpha+60°)+\cos(\alpha+30°)-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=(\sin\alpha\cos60°+\cos\alpha\sin60°)+(\cos\alpha\cos30°-\sin\alpha\sin30°)-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=0$

【解后感言】 这里选择一个适当的角为"基本量"，将其余的角变成某特殊角与这个"基本量"的和差关系，这也是角的拆变技巧之一.



三、"1"的代换

解题秘言:在三角函数中,"1"可以变换为 $\sin^2x+\cos^2x$,$\sec^2x-\tan^2x$,$\csc^2x-\cot^2x$,$\tan x\cdot\cot x$,$\sec x\cdot\cos x$,$\csc x\cdot\sin x$,$\tan\frac{\pi}{4}$等等,根据解题的需要,适时地将"1"作某种变形,常能获得较理想的解题方法.

例1 (2008年辽宁高考文·T16)设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则函数 $y=\frac{2\sin^2x+1}{\sin2x}$ 的最小值为________.

【规范解析】 $y=\frac{2\sin^2x+1}{\sin2x}=\frac{3\sin^2x+\cos^2}{2\sin x\cos x}x$

$=\frac{3\tan^2x+1}{2\tan x}=\frac{1}{2}\left[3\tan x+\frac{1}{\tan x}\right]\geqslant\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}$.($\because x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\tan x>0$)

【答案】 $\sqrt{3}$

例2 求函数 $f(x)=\frac{\sin^4x+\cos^4x+\sin^2x\cos^2x}{2-\sin2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

【解】 $f(x)=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^2-\sin^2x\cos^2x}{2-2\sin x\cos x}=\frac{1-\sin^2x\cos^2x}{2(1-\sin x\cos x)}$

$=\frac{1}{2}(1+\sin x\cos x)=\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{2}$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π,最大值是 $\frac{3}{4}$,最小值是 $\frac{1}{4}$.

例3 化简 $\frac{1-\sin^6x-\cos^6x}{1-\sin^4x-\cos^4x}$.

【解】 原式 $=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^3-\sin^6x-\cos^6x}{(\sin^2x+\cos^2x)^2-\sin^4x-\cos^4x}$

$=\frac{3\sin^4x\cos^2x+3\sin^2x\cos^4x}{2\sin^2x\cos^2x}$

$=\frac{3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)}{2\sin^2x\cos^2x}$

$=\frac{3}{2}$

【解后感言】 "$1=\sin^2x+\cos^2x$"的正用、逆用在三角变换中应用十分广泛,要灵活掌握.除此以外,还经常用到:$1=\tan\alpha\cdot\cot\alpha$,$1=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha$,$1=\csc^2\alpha-\cot^2\alpha$,$1=\tan\frac{\pi}{4}$.灵活运用这些等式,可使许多三角函数问题得到简化.

例 4 已知$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=5+2\sqrt{6}$,求$\frac{1-\sin2\alpha}{\cos2\alpha}$的值.

【解】 $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{\tan45^\circ+\tan\alpha}{1-\tan45^\circ\tan\alpha}$

$=\tan(45^\circ+\alpha)=5+2\sqrt{6}$

$\because \frac{\cos2\alpha}{1-\sin2\alpha}=\frac{\sin(90^\circ+2\alpha)}{1+\cos(90^\circ+2\alpha)}=\tan(45^\circ+\alpha)$

$\therefore \frac{1-\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{1}{\tan(45^\circ+\alpha)}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=5-2\sqrt{6}.$

【解后感言】 这里是$1=\tan\frac{\pi}{4}$的运用.若直接从已知式中求出$\tan\alpha$,再用万能公式,虽然思路很直观,但却导致较复杂的运算.

四、变通公式

解题秘言:对于每一个三角公式,教材中仅给出其基本形式,但我们若熟悉其它变通形式常可以开拓解题思路.例如,由$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$可变通为$\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$与$\sin\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2\cos\alpha}$;由$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$可变通为$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$.

例 1 在△ABC中,已知三内角A、B、C成等差数列,求$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$的值.

【解】 ∵三内角A、B、C成等差数列,且$A+B+C=180^\circ$

$\therefore A+C=120^\circ \quad \therefore \tan\frac{A+C}{2}=\sqrt{3}$

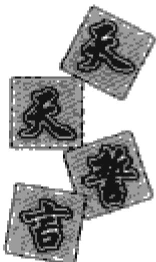
由两角和的正切公式得

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}.$

【解后感言】 本例是正切公式变形的运用,在历年高考题中,曾多次出现两角和与差的正切公式的变形运用,读者要仔细体会.



例 2 已知 $A+B=\frac{\pi}{4}$，求 $(1+\tan A)(1+\tan B)$ 的值.

【解】 $(1+\tan A)(1+\tan B)=\tan A+\tan B+(1+\tan A\cdot\tan B)$

$=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)+(1+\tan A\tan B)$

$=\tan\frac{\pi}{4}(1-\tan A\tan B)+(1+\tan A\tan B)$

$=2$

【解后感言】 若三角函数式中同时出现 $\tan\alpha\pm\tan\beta$ 与 $\tan\alpha\tan\beta$，常可用 $\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$.

例 3 证明：$\cot\alpha-8\cot8\alpha=\tan\alpha+2\tan2\alpha+4\tan4\alpha$.

【证明】 我们知道 $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot2\alpha$ ①

同理 $\cot2\alpha-\tan2\alpha=2\cot4\alpha$ ②

$\cot4\alpha-\tan4\alpha=2\cot8\alpha$ ③

①+2×②+4×③得

$\cot\alpha-\tan\alpha-2\tan2\alpha-4\tan4\alpha=8\cot8\alpha$

$\therefore\cot\alpha-8\cot8\alpha=\tan\alpha+2\tan2\alpha+4\tan4\alpha$.

【解后感言】 ①式为 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 的变通，用起来十分方便.

例 4 证明：$\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{4\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}=\frac{1}{2^5}$.

【证明】 左边 $=\frac{\sin\frac{2\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{11}}{2\sin\frac{2\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{6\pi}{11}}{2\sin\frac{3\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{11}}{2\sin\frac{4\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{5\pi}{11}}$

$=\frac{1}{2^5}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{11}}{\sin\frac{2\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{5\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{11}}{\sin\frac{4\pi}{11}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{\sin\frac{5\pi}{11}}=\frac{1}{2^5}$

=右边

【解后感言】 应用倍角公式的变形公式来处理三角函数式的积的问题常常是一种很巧妙的解题方法.

五、升幂与降次

解题秘言：分析题目的结构，掌握结构的特点，通过升幂、降次等手段，为使用公式创造条件，这也是三角变换的重要技巧. 利用余弦的倍角公式可知 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$，$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，这样可以用倍、半角公式来升幂（从右到左）和降次（从左到右）.

例 1 (2008年四川高考文·T17、理·T17)求函数 $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$ 的最大值与最小值.

【思路探索】 由于题目中出现四次幂,故首先要降幂化简,然后配方转化为二次函数在闭区间上的最值问题.

【规范解析】 $y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\cos^4 x$

$=7-2\sin 2x+4\cos^2 x(1-\cos^2 x)$

$=7-2\sin 2x+4\cos^2 x\sin^2 x$

$=7-2\sin 2x+\sin^2 2x=(1-\sin 2x)^2+6.$

由于函数 $z=(a-1)^2+6$ 在$[-1,1]$中的最大值为

$z_{\max}=(-1-1)^2+6=10,$

最小值为 $z_{\min}=(1-1)^2+6=6,$

故当 $\sin 2x=-1$ 时,y 取得最大值 10;当 $\sin 2x=1$ 时,y 取得最小值 6.

例 2 已知 $\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

【解】 由 $\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha=1$ 得

$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha-(1+\cos 2\alpha)=0$

$\therefore 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha=0$

$\therefore 2\cos^2\alpha(2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1)=0$

即 $2\cos^2\alpha(2\sin\alpha-1)(\sin\alpha+1)=0$

$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore \cos\alpha\neq 0,\sin\alpha\neq -1$

$\therefore 2\sin\alpha-1=0$,即 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$ $\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解后感言】 观察题设条件和待求的函数值,会发现题设条件中为倍角,而待求函数为单角,所以使用半角公式升幂,并通过因式分解使问题得以迅速解决.

例 3 $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)+\sin^3(240^\circ+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A$.

【证明】 左边$=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)+\frac{1}{4}[3\sin(120^\circ+A)-\sin(360^\circ+3A)]+\frac{1}{4}[3\sin(240^\circ+A)-\sin(720^\circ+3A)]$

$=\frac{3}{4}[\sin A+\sin(120^\circ+A)+\sin(240^\circ+A)]-\frac{3}{4}\sin 3A$

$=\frac{3}{4}\left[\sin A+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)\right]-\frac{3}{4}\sin 3A$

$=-\frac{3}{4}\sin 3A=$右边

【解后感言】 根据三倍角公式,有 $\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$,$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$,也常用来降次.有些数学题的解法中经常用此技巧方法.



六、引入辅助角

解题秘言：当 a,b 均不为零时，利用 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，$\left(\text{其中 }\varphi\text{ 为辅助角，且满足 }\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$来作变换也是常用方法.

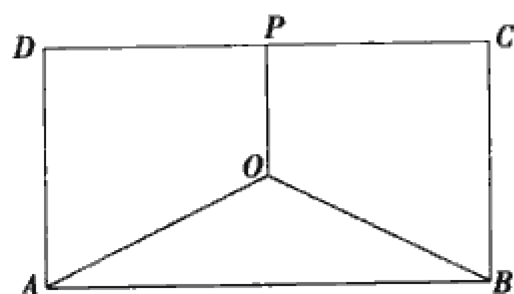
例1 (2008年江苏高考·T17)如图，某地有三家工厂，分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A,B 及 CD 的中点 P 处，$AB=20$ km，$BC=10$ km，为了处理三家工厂的污水，现要在该矩形 $ABCD$ 的区域上(含边界)，且与 A,B 等距离的一点 O 处，建造一个污水处理厂，并铺设三条排污管道 AO,BO,OP，设排污管道的总长度为 y km.

(Ⅰ)按下列要求建立函数关系：

①设$\angle BAO=\theta$(rad)，将 y 表示为 θ 的函数；

②设 $PO=x$(km)，将 y 表示为 x 的函数.

(Ⅱ)请你选用(Ⅰ)中的一个函数关系，确定污水处理厂的位置，使铺设的排污管道的总长度最短.



【解】 (Ⅰ)①延长 PO 交 AB 于 Q 点，由条件知 PQ 垂直平分 AB，若$\angle BAO=\theta$(rad)，则 $OA=\frac{AQ}{\cos\theta}=\frac{10}{\cos\theta}$，故 $OB=\frac{10}{\cos\theta}$，又 $OP=10-10\tan\theta$

所以 $y=OA+OB+OP=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\cos\theta}+10-10\tan\theta$，

所求函数关系式为 $y=\frac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}+10\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$

②若 $OP=x$(km)，则 $OQ=10-x$，所以 $OA=OB=\sqrt{(10-x)^2+10^2}=\sqrt{x^2-20x+200}$

所求函数关系式为 $y=x+2\sqrt{x^2-20x+200}(0\leqslant x\leqslant10)$

(Ⅱ)选择函数模型①，$y'=\frac{-10\cos\theta\cdot\cos\theta-(20-10\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{10(2\sin\theta-1)}{\cos^2\theta}$

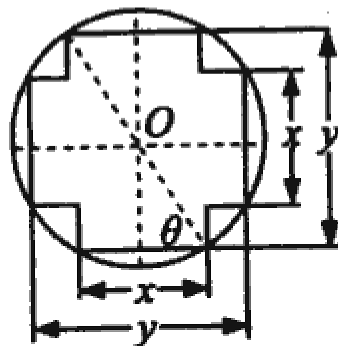
令 $y'=0$ 得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$，

当 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$时，$y'<0$，$y$ 是 θ 的减函数；当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$时，$y'>0$，$y$ 是 θ 的增函数，

所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时，$y_{\min}=10+10\sqrt{3}$. 这时点 P 位于线段 AB 的中垂线上，且距离 AB 边$\frac{10\sqrt{3}}{3}$ km 处.

【解后感言】 在求三角函数的极值时经常通过引入辅助角后利用三角函数的有界性求解.重点考查函数最值的应用.

例2 如图,在直径为1的圆 O 中,作一关于圆心对称,邻边互相垂直的十字形,其中 $y>x>0$.



(Ⅰ)将十字形的面积表示为 θ 的函数;

(Ⅱ)θ 为何值时,十字形的面积最大?最大面积是多少?

【解】 (Ⅰ)设 S 为十字形的面积,依题意有

$$S=2xy-x^2=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

(Ⅱ)化简 S 的表达式

$$S=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=\sin2\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta-\varphi)-\frac{1}{2}$$

其中 $\varphi=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$,当 $\sin(2\theta-\varphi)=1$,即 $2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时,S 最大.

所以,当 $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时,S 最大,最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【解后感言】 在求三角函数的极值时经常通过引入辅助角后利用三角函数的有界性求解.

七、平方消元

解题秘言:有时将某些式子平方后再相减(加)可消去一些项,使所求问题变得更简单明了.

例1 设 α、β 为锐角,且

$$\boldsymbol{a}=(\sin\alpha,-\cos\alpha),\boldsymbol{b}=(-\cos\beta,\sin\beta),\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

【解】 (1)由 $\boldsymbol{a}=(\sin\alpha,-\cos\alpha)$,$\boldsymbol{b}=(-\cos\beta,\sin\beta)$ 及 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 得

$$\sin\alpha-\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{6} \quad ①$$

$$\cos\alpha-\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ②$$

①^2+②^2 得 $2-2\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=-\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2}{3}$

又$\because \sin\alpha-\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{6}>0$

$\therefore \sin\alpha>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

$\because \alpha$、β 均为锐角

$\therefore \alpha>\frac{\pi}{2}-\beta \quad \therefore \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【证明】 本题中将①与②分别平方后再相加消去平方项从而求得 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值. 这是解决此类问题的常用方法,但很多情况下用平方消元并不一定很直观,大多数是以隐蔽的形式出现的,应注意发掘和利用.

例2 已知 $\sin\theta,\sin\alpha,\cos\theta$ 成等差数列,$\sin\theta,\sin\beta,\cos\theta$ 成等比数列. 证明:$2\cos2\alpha=\cos2\beta$.

【证明】 $\because \sin\theta,\sin\alpha,\cos\theta$ 成等差数列

$\therefore 2\sin\alpha=\sin\theta+\cos\theta$

平方,得

$4\sin^2\alpha=1+2\sin\theta\cos\theta$ ①

又 $\sin\theta,\sin\beta,\cos\theta$ 成等比数列

所以有

$\sin^2\beta=\sin\theta\cdot\cos\theta$ ②

①$-2\times$②得

$4\sin^2\alpha-2\sin^2\beta=1$

即 $2(1-\cos2\alpha)-(1-\cos2\beta)=1$

$\therefore 2\cos2\alpha=\cos2\beta$.

【解后感言】 这里是利用平方消去交叉项达到消元目的.

八、裂项添项

解题秘言:跟代数恒等变换一样,在三角变换中有时适当地应用“加一项再减去这一项”,“乘一项再除以同一项”的方法常能使某些问题巧妙简捷地得以解决.

例 1 求 $\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$的值.

【解】 原式$=\cos80^\circ\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos40^\circ\cdot\cos20^\circ$

$$=\frac{\sin20^\circ}{2\sin20^\circ}\cdot\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos80^\circ$$

$$=\frac{1}{4\sin20^\circ}\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ$$

$$=\frac{1}{8\sin20^\circ}\sin80^\circ\cos80^\circ$$

$$=\frac{1}{16\sin20^\circ}\sin160^\circ=\frac{1}{16}$$

【解后感言】 本题巧妙地运用“乘一项再除以同一项”的方法致使其发生“连锁反应”,迅速求解.

例 2 证明:

$$\frac{\sin2x}{(\sin x+\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)}=\frac{1+\cos x}{\sin x}.$$

【证明】 左边$=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{(\sin x+\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)}$

$$=\frac{(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)}{(\sin x+\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)}$$

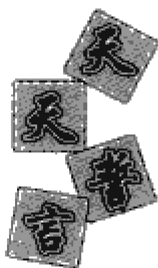
$$=\frac{(\sin x+\cos x+1)}{(\sin x-\cos x+1)}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}$$

$$=\frac{(1-\cos^2x)+\sin x(1+\cos x)}{(\sin x-\cos x+1)\sin x}$$

$$=\frac{(1+\cos x)(1-\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x+1)\sin x}$$

$$=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\text{右边}$$

【解后感言】 本例中采用“加一项再减去这一项”、“乘一项再除以同一项”的方法,其技巧性较强,其目的都是为了便于分解因式进行约分化简.



例3 求 $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}$的值.

【解】 原式$=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{11}\left(\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}\right)}{2\sin\frac{\pi}{11}}$

$=\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\left[\left(\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{\pi}{11}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{11}-\sin\frac{3\pi}{11}\right)\right.$

$\left.+\left(\sin\frac{7\pi}{11}-\sin\frac{5\pi}{11}\right)+\left(\sin\frac{9\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}\right)+\left(\sin\frac{11\pi}{11}-\sin\frac{9\pi}{11}\right)\right]$

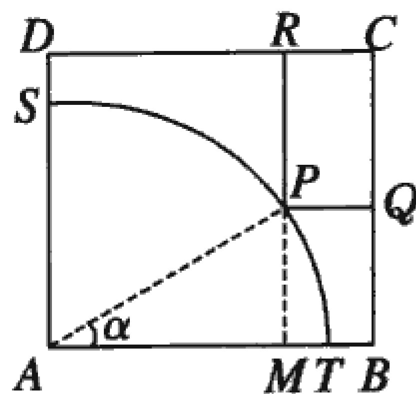
$=\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{11}}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{11}\right)=-\frac{1}{2}$

【解后感言】 这里根据题目的特点，各项乘以 $2\sin\frac{\pi}{11}$后，再用积化和差公式巧妙地进行裂项相消，这些技巧均颇具代表性.

九、设元转化

解题秘言:换元法作为一种数学思想，其应用广泛，我们第四章已作专题论述，这里仅就几种带典型性的三角恒等变换中的换元予以剖析.

例1 (2006年江苏卷)如图，$ABCD$是一块边长为100 m的正方形地皮，其中AST是一半径为90 m的扇形小山，其余部分都是平地. 一开发商想在平地上建一个矩形停车场，使矩形的一个顶点P在$\overset{\frown}{ST}$上，相邻两边CQ、CR落在正方形的边BC、CD上，求矩形停车场$PQCR$面积的最大值和最小值.



【解】 设$\angle PAB=\alpha(0°\leqslant\alpha\leqslant 90°)$，延长$RP$交$AB$于$M$，则$AM=90\cos\alpha$，$MP=90\sin\alpha$.

$\therefore S_{PQCR}=PQ\cdot PR$

$=(100-90\cos\alpha)(100-90\sin\alpha)$

$=10000-9000(\sin\alpha+\cos\alpha)+8100\sin\alpha\cos\alpha$

令 $t=\sin\alpha+\cos\alpha(1\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，则 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{t^2-1}{2}$.

$\therefore S_{PQCR}=10000-9000t+8100\cdot\frac{t^2-1}{2}=\frac{8100}{2}\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+950$

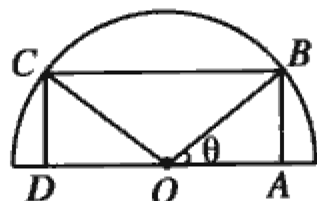
当 $t=\frac{10}{9}$ 时，S_{PQCR} 的最小值为 950 m^2；

当 $t=\sqrt{2}$ 时，S_{PQCR} 的最大值为 $(14050-9000\sqrt{2})m^2$.

【解后感言】 本题中令 $t=\sin\alpha+\cos\alpha$ 得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$ 是处理 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cos\alpha$ 这类问题的常用技巧.

关于 $\sin x$、$\cos x$ 的对称式，如 $\sin x+\cos x$，$\tan x+\cot x$，$\sin^3 x+\cos^3 x$，$\sin x-\cos x$ 都可以如本例设元表示，与其相关的三角函数式以此元的代数式表出. 如令 $\sin x+\cos x=m$，则 $\sin x\cos x=\frac{m^2-1}{2}$，$(\sin x+\cos x)^2=m^2$，$(\sin x-\cos x)^2=2-m^2$，$\tan x+\cot x=\frac{2}{m^2-1}$ 等等.

例 2 如图所示，有一块以点 O 为圆心的半圆形空地，要在这块空地上划出一个内接矩形 $ABCD$，辟为绿地，使其一边 AD 落在圆的直径上，另两点 B、C 落在半圆的圆周上. 已知半圆的半径长为 a，如何选择关于点 O 对称的点 A、D 的位置，可以使矩形 $ABCD$ 的面积最大？



【解】 令 $\angle AOB=\theta$ 则 $AB=a\sin\theta$，$OA=a\cos\theta$，则矩形 $ABCD$ 的面积为

$S=a\sin\theta\cdot 2\cdot a\cos\theta=a^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta=a^2\cdot\sin 2\theta\leqslant a^2$.

等号成立的充要条件是

$\sin 2\theta=1$.

即 $2\theta=90°$，于是 $\theta=45°$，S 为最大.

不难得到，这时 O、B 两点与 A 的距离都是 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

例 3 化简 $\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

【解】 令 $x=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$

$y=\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$

则 $x+y=2-2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ ①

$x-y=\cos 2\beta+\cos 2(\alpha+\beta)-2\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\cos 2\beta+2\cos^2(\alpha+\beta)-1-2\cos^2(\alpha+\beta)$

$=\cos 2\beta-1$ ②

①+②得

$2x=2-2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos2\beta-1$

$=1-\cos2\alpha-\cos2\beta+\cos2\beta$

$=1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$

$\therefore x=\sin^2\alpha$，即原式$=\sin^2\alpha$.

【解后感言】 根据题目的特点，总体设元，然后构造与其相应的对偶式，运用方程的思想来解决三角恒等变换，也是常用的方法. 本题也可以采用降次、和积互化等方法.

目前高考中，纯三角函数式的化简与证明已不多见，取而代之的题目经常是化简某一三角函数，并综合考查这一函数的其他性质. 但凡是与三角函数有关的问题，都以恒等变形、条件变形为解题的基石，因此本章内容的重要性不言而喻. 至于在三角条件恒等证明中如何用三内角和的性质、正余弦定理进行边角关系转换等，我们就不另加赘述了.

实战秘修十

1. 证明：$(1-\tan^2\alpha)^2=(\sec^2\alpha-2\tan\alpha)(\sec^2\alpha+2\tan\alpha)$.

2. 已知 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$ 且 $m\neq1,\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\alpha+\beta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

   证明：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$.

3. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6}),\cos\alpha=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$，且 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求 $\cos\beta$ 的值.

4. 设 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9},\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi,0<\beta<\frac{\pi}{2}$. 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

5. 证明：$\frac{2\cos^2x-1}{1-2\sin x\cos x}-\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2x}$.

6. 化简 $\frac{1-\cot15^\circ}{1+\tan15^\circ}$.

7. 证明：$(1+\tan\alpha)[1+\tan(45^\circ-\alpha)]=2$.

8. 证明：$\tan20^\circ+2\tan40^\circ+4\tan10^\circ=\tan70^\circ$.

9. 化简 $\sin^210^\circ+\cos^240^\circ+\sin10^\circ\cos40^\circ$.

10. 证明：$\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha=1$.

11. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\sin\gamma,\cos\alpha+\cos\beta=\cos\gamma$. 求 $\cos(\alpha-\beta)$的值.

12. 已知 $\sin\theta=a\sin\varphi,\tan\theta=b\tan\varphi,\theta$ 为锐角,证明:$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{a^2-1}{b^2-1}}$.

13. 当 $\sin\alpha\neq0$ 时,求和:

$\cos\alpha+\cos2\alpha+\cdots+\cos n\alpha \quad (n\in\mathbf{N})$.

14. 求 $\cos\dfrac{2\pi}{15}+\cos\dfrac{4\pi}{15}-\cos\dfrac{7\pi}{15}-\cos\dfrac{\pi}{15}$的值.

15. 在$\triangle ABC$ 中,证明:

$\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A$

$=\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C$

$=\sin^2A$.

16. 若 $x\in[0,\pi)$,求 $y=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$的值域.

17. 不查表求 $\tan9°+\cot117°-\tan243°-\cot351°$的值.

18. 已知$\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{1+\tan\alpha}=k\left(\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$,试用 k 表示 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

19. 证明:$\tan80°-\tan20°-\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan80°+\tan20°$.

20. 已知$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-1$,求 $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2$ 的值.

21. 求 $y=5\cos^2x-6\sin2x+20\sin x-30\cos x+7$ 的最大值与最小值.

实战秘修十答案与提示

1. 左边$=\left(1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2$

$=(\dfrac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha})$

$=\dfrac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\dfrac{1-4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$

$=\sec^4\alpha-4\tan^2\alpha=(\sec^2\alpha-2\tan\alpha)(\sec^2\alpha+2\tan\alpha)$

=右边.

2. 已知条件等式变为 $\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=m\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$,展开即得.

3. 先求出 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,则 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=0$.

4. 先求出 $\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{4}{9}\sqrt{5}$，$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 则

$$\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1$$

$$=2\left\{\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]\right\}^2-1=\cdots=-\frac{239}{729}.$$

5. 将 1 化为 $\sin^2 x+\cos^2 x$.

6. 原式 $=\frac{1-\tan45^\circ\tan75^\circ}{\tan45^\circ+\tan75^\circ}=\frac{1}{\tan(45^\circ+75^\circ)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 左边 $=1+\tan\alpha+\tan(45^\circ-\alpha)+\tan\alpha\tan(45^\circ-\alpha)$

$=1+\tan[\alpha+(45^\circ-\alpha)][1-\tan\alpha\tan(45^\circ-\alpha)]+\tan\alpha\tan(45^\circ-\alpha)$

$=2$.

8. $\tan70^\circ-\tan20^\circ=\cot20^\circ-\tan20^\circ=2\cot40^\circ$

又 $2(\cot40^\circ-\tan40^\circ)=2\cdot2\cot80^\circ=4\tan10^\circ$

两端分别相加，移项整理即得.

9. 原式 $=\frac{1-\cos20^\circ}{2}+\frac{1+\cos80^\circ}{2}+\sin10^\circ\cos40^\circ$

$$=1+\frac{1}{2}(\cos80^\circ-\cos20^\circ)+\frac{1}{2}(\sin50^\circ-\sin30^\circ)$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot(-2)\sin50^\circ\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\sin50^\circ-\frac{1}{4}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin50^\circ+\frac{1}{2}\sin50^\circ-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

10. 左边 $=\frac{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha$

$$=1+\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot2\cos2\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\alpha=1.$$

11. 将两已知式平方得 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\sin^2\gamma$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\cos^2\gamma$，相加即得 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$

12. $\because \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=b\tan\varphi=\frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi}$

$\therefore \cos\varphi=\frac{b\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}=\frac{b\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{a}=\frac{b}{a}\cos\theta$

$\therefore \sin^2\varphi+\cos^2\varphi=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\cos^2\theta}{a^2}=1$

得 $a^2=\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{a^2-1}{b^2-1}\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{\frac{a^2-1}{b^2-1}}$.



13. 原式$=\dfrac{2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\cos2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\cdots+2\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\because 2\cos k\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{(2k+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2k-1)\alpha}{2}$

令 $k=1,2,\cdots,n$,诸式相加得

原式$=\left[\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right]\div 2\sin\frac{\alpha}{2}$

$=\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}$.

14. 令 $x=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A-\sin^2A$

$y=\cos^2B+\cos^2C+2\cos B\cos C\cos A-\sin^2A$

则可知 $x+y=0,x-y=0$.　　$\therefore x=0,y=0$.

15. 将原式两次化积后得 $2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$,再乘以除以 $2\cos\frac{\pi}{10}$,最后得原式$=\frac{1}{2}$.

16. 令 $m=\sin x+\cos x$,则

$\sin x\cos x=\frac{m^2-1}{2},y=\dfrac{\frac{m^2-1}{2}}{1+m}=\frac{1}{2}(m-1)$.

又 $m=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,且 $x\in[0,\pi)$

$\therefore m\in(-1,\sqrt{2}],-1<\frac{1}{2}(m-1)\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

故 $y\in\left(-1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$.

17. 原式$=\tan9^\circ-\tan27^\circ-\cot27^\circ+\cot9^\circ$

$=\left(\frac{\sin9^\circ}{\cos9^\circ}+\frac{\cos9^\circ}{\sin9^\circ}\right)-\left(\frac{\sin27^\circ}{\cos27^\circ}+\frac{\cos27^\circ}{\sin27^\circ}\right)$

$=\frac{1}{\sin9^\circ\cos9^\circ}-\frac{1}{\sin27^\circ\cos27^\circ}=\frac{2}{\sin18^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}$

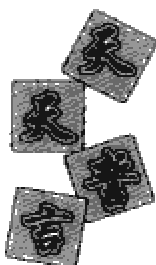
$=\frac{2(\sin54^\circ-\sin18^\circ)}{\sin54^\circ\sin18^\circ}=\frac{4\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\cos36^\circ}$

$=4$.

18. $\frac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=2\sin\alpha\cos\alpha=k$

$\because \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$　$\therefore \sin\alpha>\cos\alpha$

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1-k}$.



19. $\because \tan 80^\circ - \tan 20^\circ = \tan(80^\circ - 20^\circ)(1 + \tan 80^\circ \tan 20^\circ)$

$$= \tan 60^\circ (1 + \tan 80^\circ \tan 20^\circ)$$

$$= \sqrt{3}(1 + \tan 80^\circ \tan 20^\circ)$$

$\therefore \tan 80^\circ - \tan 20^\circ - \sqrt{3} = \sqrt{3}\tan 80^\circ \tan 20^\circ$.

20. 由已知得 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，则

$$\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + 2 = \frac{\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} + 2$$

$$= \frac{\tan^2\alpha + \tan\alpha}{\tan^2\alpha + 1} + 2$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2 + 1} + 2 = \frac{13}{5}.$$

21. 由已知得

$$y = (9\cos^2 x - 12\sin x\cos x + 4\sin^2 x) + 20\sin x - 30\cos x + 3$$

$$= (2\sin x - 3\cos x + 5)^2 - 22$$

$$= [\sqrt{13}\sin(x - \varphi) + 5]^2 - 22$$

其中 $\varphi = \arctan\frac{3}{2}$.

当 $\sin(x - \varphi) = 1$ 时，$y_{max} = (\sqrt{13} + 5)^2 - 22 = 16 + 10\sqrt{13}$；

当 $\sin(x - \varphi) = -1$ 时，$y_{min} = (5 - \sqrt{13})^2 - 22 = 16 - 10\sqrt{13}$.

第十一章 不等式证明的常用方法再演练

不等式是高中数学的重要内容，它几乎涉及整个高中数学的各个部分，因此，通过不等式这条纽带，可把中学数学的各部分内容有机地联系起来．而不等式的证明是高中数学的一个难点，加之题型广泛、方法灵活、涉及面广，常受各类考试命题者的青睐，亦成为历届高考中的热点问题．望同学们深思之，细研之，务求精熟！

本章通过一些实例，归纳一下不等式证明的常用方法和技巧．

一、比较法

解题秘言：证明不等式的比较法分为作差比较与作商比较两类，基本思想是把难于比较的式子变成其差再与 0 比较，或其商再与 1 比较．当欲证的不等式两端是乘积形式或幂指数形式时，常采用作商比较法．

例 1 （2008 年福建高考文 · T20）已知$\{a_n\}$是正数组成的数列，$a_1=1$，且点$(\sqrt{a_n},a_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$在函数 $y=x^2+1$ 的图象上．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1,b_{n+1}=b_n+2^a n$，

求证：$b_n\cdot b_{n+2}<b_{n+1}^2$．

【思路探索】 (1)将点$(\sqrt{a_n},a_{n+1})$代入 $y=x^2+1$

得 $a_{n+1}=a_n+1$，即数列$\{a_n\}$为等差数列，从而易求 a_n；

(2)方法一：由 $b_{n+1}=b_n+2_n^a$ 利用累加法求出 b_n，再证明 $b_n\cdot b_{n+2}-b_n^2+1<0$；

方法二：作差得 $b_n\cdot b_{n+2}-b_n^2+1$，由 $b_{n+1}=b_n+2_n^a$ 利用迭代法将差的结果用 $b_{n+1},b_n,\cdots,b_1$ 表示，

即得 $b_n\cdot b_{n+2}-b_{n+1}^2<0$．

【规范解析】 方法一：(1)由已知得 $a_{n+1}=a_n+1$，

即 $a_{n+1}-a_n=1$，又 $a_1=1$，

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，公差为 1 的等差数列．

故 $a_n=1+(n-1)\times1=n$．

(2)由(1)知：$a_n=n$，从而 $b_{n+1}-b_n=2^n$．

$$
\begin{aligned}
b_n&=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\\
&=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1\\
&=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1.
\end{aligned}
$$

因为 $b_n \cdot b_{n+2} - b_{n+1}^2 = (2^n-1)(2^{n+2}-1)-(2^{n+1}-1)^2$

$=(2^{2n+2}-2^{n+2}-2^n+1)-(2^{2n+2}-2\cdot 2^{n+1}+1)$

$=-5\cdot 2^n+4\cdot 2^n$

$=-2^n<0$，

所以 $b_n \cdot b_{n+2}<b_{n+1}^2$.

方法二：(1)同方法一.

(2)因为 $b_1=1$，

$b_n \cdot b_{n+2}-b_{n+1}^2=(b_{n+1}-2^n)(b_{n+1}+2^{n+1})-b_{n+1}^2$

$=2^{n+1}\cdot b_{n+1}-2^n\cdot b_{n+1}-2^n\cdot 2^{n+1}$

$=2^n(b_{n+1}-2^{n+1})$

$=2^n(b_n+2^n-2^{n+1})$

$=2^n(b_n-2^n)$

$=\cdots$

$=2^n(b_1-2)$

$=-2^n<0$，

所以 $b_n \cdot b_{n+2}<b_{n+1}^2$.

【解后感言】 用比较法证明不等式，一般要经历作差（或作商）、变形、判断三个步骤. 变形的主要手段是通分、因式分解或配方；用作差比较法变形的结果都应是因式之积或完全平方式，这样有利于判断符号.

例2 (2007年上海高考理・T13)设 a,b 是非零实数，若 $a<b$，则下列不等式成立的是 ( )

A. $a^2<b^2$　　B. $ab^2<a^2b$

C. $\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$　　D. $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

【解析】 高考中解答这类问题最好的方法是取特殊值，平时训练考虑直接法：

A错：由 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，符号不定；

B错，$ab^2-a^2b=ab(b-a)$，符号不定；

C对，$\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}=\frac{a^2b-ab^2}{a^3b^3}$

$=\frac{ab(a-b)}{a^3b^3}=\frac{a-b}{a^2b^2}<0$；

D错，$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{(b-a)(b+a)}{ab}$，符号不定.

故 $\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$.

【答案】 C

二、基本不等式法

解题秘言:常用的基本不等式有:

①若 $a,b\in\mathbf{R}$ 则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取等号);

②若 $a,b\in\mathbf{R}_+$,则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号);

③若 a,b 同号,则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$(当且仅当 $a=b$ 时取等号);

④若 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$(当且仅当 $a=b$ 时取等号);

⑤若 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号);

⑥若 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,则 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$;

⑦均值不等式 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(其中 $a_1,a_2\cdots a_n\in\mathbf{R}_+,n\in\mathbf{N}^*$)及它的变式 $a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqslant na_1a_2\cdots a_n$,$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}$,$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$.

例1 (2008年江苏高考·T21 选做 D)设 a,b,c 为正实数,求证:$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\geqslant 2\sqrt{3}$.

【规范解析】 因为 a,b,c 为正实数,由平均不等式可得

$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}\cdot\frac{1}{c^3}}$,

即 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant\frac{3}{abc}$.

所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+abc\geqslant\frac{3}{abc}+abc$.

而 $\frac{3}{abc}+abc\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{abc}\cdot abc}=2\sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geqslant 2\sqrt{3}$.

例2 设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 都是正数,证明:

$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$.

【证明】 因为 $x_1,x_2\in\mathbf{R}_+$,

$$\frac{x_1^2}{x_2}+x_2\geqslant 2\sqrt{\frac{x_1^2}{x_2}\cdot x_2}=2x_1 \qquad (*)$$

同理$\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geqslant 2x_2,\cdots,\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+x_n\geqslant 2x_{n-1},\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant 2x_n$

将这 n 个不等式两边分别相加,得

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}+(x_2+x_3+\cdots+x_n+x_1)$$

$$\geqslant 2(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\therefore \frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【解后感言】 (*)式的构造为全题的得证辟开了道路,这种根据待证式的特点巧妙构式以便应用基本不等式的方法也是常用技巧.证明本题时,分段应用了基本不等式,然后整体相加(乘)得出结论,这是证明不等式的基本技巧.

例3 若 $a>b>0$,证明:$a+\frac{1}{(a-b)b}\geqslant 3$.

【证明】 $\because a>b>0$ $\quad\therefore a-b>0,\frac{1}{(a-b)b}>0$

$$\therefore a+\frac{1}{(a-b)b}=(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)b}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{(a-b)\cdot b\cdot\frac{1}{(a-b)b}}=3$$

当且仅当 $b=a-b=\frac{1}{(a-b)b}$,即 $a=2,b=1$ 时等号成立.

【解后感言】 为应用基本不等式⑤,这里根据题目的特点,将 a 分析成两个正数 $a-b$ 与 b,恰到好处.在应用基本不等式时,一定要注意所要求的条件.对原形不具备基本不等式的条件的,只有作适当的恒等变形至符合条件后方可应用基本不等式.在应用基本不等式时要注意去套着公式用、凑着公式用、逆着公式用、变着公式用,逐步掌握运用公式的技巧.

例4 已知 m,n 是正整数,且 $1<m<n$,证明:$(1+m)^2>(1+n)^m$.

【证明】 由 n 元均值不等式可得

$$(1+n)^m=\underbrace{(1+n)(1+n)\cdot\cdots\cdot(1+n)}_{m\text{个括号相乘}}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdot1}_{(n-m)\text{个}1}<\left[\frac{m(1+n)+n-m}{n}\right]^n=(1+m)^n.$$

【解后感言】 此问题是二项式不等式,经过配凑$(n-m)$个1相乘后运用 n 元均值不等式,优化了解题过程.这就说明,学习数学要准确深刻地理解题意,随机应变,而不应将数学解题模式化.

三、综合法

解题秘言：利用题设条件和已知不等式作基础，再运用不等式的性质推导出所要证的不等式，这种方法称为综合法．综合法的证题思路是“由因导果”．

例1 已知 $a>b>c$，证明：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{4}{c-a}\geqslant 0$．

【证明】 $\because a>b>c\quad \therefore a-b>0, b-c>0$

$\therefore \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(a-b)(b-c)}}$

而 $(a-b)(b-c)\leqslant[\frac{(a-b)+(b-c)}{2}]^2=\frac{(a-c)^2}{4}$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{(a-b)(b-c)}}\geqslant\sqrt{\frac{4}{(a-c)^2}}=\frac{2}{a-c}$

$\therefore \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$

即 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{4}{c-a}\geqslant 0$．

【解后感言】 这里根据待证式的结构特点发现，将前两式的分母做和以抵消 b 是解题的切入点，再根据公式 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$ 即可得证．

例2 设 a,b 是不等的两正数，且 $a^3-b^3=a^2-b^2$．

证明：$1<a+b<\frac{4}{3}$．

【证明】 $\because a^3-b^3=a^2-b^2$

$\therefore (a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(a+b)$

则 $a^2+ab+b^2=a+b(a\neq b)$ （＊）

则 $(a+b)^2>a^2+ab+b^2=a+b\quad (ab>0)$

又 $\because a+b>0\quad \therefore a+b>1$

又 $a^2+b^2>2ab\Rightarrow(a+b)^2>4ab$

$\therefore (a+b)^2=a^2+2ab+b^2\overset{(*)}{=}a+b+ab<a+b+\frac{(a+b)^2}{4}$

即 $\frac{3}{4}(a+b)^2<a+b\quad \therefore a+b<\frac{4}{3}$

$\therefore 1<a+b<\frac{4}{3}$．

【解后感言】 用综合法证明不等式，要掌握拆项、配方等技巧，还要“由因导果”，揭示条件与结论之间的因果关系及不等式两端的差异与联系．

四、分析法

解题秘言：从待证的不等式出发，逐步分析使这个不等式成立的条件，直到这个条件是可以证明或已经证明的不等式时，便可断定原不等式成立，这种方法称为分析法. 分析法的证题思路是"执果索因".

例1 已知 $a>b>0$，证明：

$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

【思路探索】 本题用比较法和综合法均有一定的困难，不妨用分析法来"逆推".

【证明】 $\because a>b>0$ $\therefore a-b>0$

$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$

$\Leftarrow\frac{(a-b)^2}{4a}<a+b-2\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{4b}$

$\Leftarrow(\frac{a-b}{2\sqrt{a}})^2<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\frac{a-b}{2\sqrt{b}})^2$

$\Leftarrow 0<\frac{a-b}{2\sqrt{a}}<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\frac{a-b}{2\sqrt{b}}$

$\Leftarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$

$\Leftarrow 1+\sqrt{\frac{b}{a}}<2<1+\sqrt{\frac{a}{b}}$

$\Leftarrow\sqrt{\frac{b}{a}}<1<\sqrt{\frac{a}{b}}\Leftarrow\frac{b}{a}<1<\frac{a}{b}$

最后的一个不等式显然成立.

$\therefore\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

【解后感言】 分析法在表述时常用"$\Leftarrow$"，即不断地用充分条件来代替前面的不等式，直至找到已知的不等式为止.

例2 设实数 x,y 满足 $y+x^2=0$，$0<a<1$，证明：

$\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}$.

【证明】 要证 $\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}$，因为 $0<a<1$，只要证

$a^x+a^y\leqslant 2a^{\frac{1}{8}}$.

又 $a^x+a^y\geqslant 2\sqrt{a^{x+y}}$，故只需证 $a^{x+y}\geqslant a^{\frac{1}{4}}$，即 $x+y\leqslant\frac{1}{4}$，即证 $x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$.

而此式显然成立. 即原不等式成立.

【解后感言】 用分析法证明不等式时,"要证"、"只要证"、"即要证"这些词语是不可缺少的.综合法往往是分析法的逆过程,表述简单,条理清楚,所以在实际证题时,常常是用分析法分析,用综合法书写.

五、放缩法

解题秘言:在证明不等式时,有时把不等式的一边适当放大或缩小,利用不等式的传递性来证明,我们称这种方法为放缩法.

放缩时常采用的方法有:舍去一些正项或负项;在和或积中换大或换小某些项;扩大(或缩小)分式的分子(或分母).

放缩法是证明不等式的重要方法,而且技巧性较强,应用广泛.

例 1 (2008年辽宁高考理·T21)在数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$中,$a_1=2$,$b_1=4$,且a_n,b_n,a_{n+1}成等差数列,b_n,a_{n+1},b_{n+1}成等比数列($n\in\mathbf{N}^*$).

(Ⅰ)求a_2,a_3,a_4及b_2,b_3,b_4,由此猜测$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式,并证明你的结论;

(Ⅱ)证明:$\frac{1}{a_1+b_1}+\frac{1}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+b_n}<\frac{5}{12}$.

【规范解析】 (Ⅰ)由条件得$2b_n=a_n+a_{n+1}$,$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$.

由此可得$a_2=6$,$b_2=9$,$a_3=12$,$b_3=16$,$a_4=20$,$b_4=25$.

猜测$a_n=n(n+1)$,$b_n=(n+1)^2$.

用数学归纳法证明:

①当$n=1$时,由上可得结论成立.

②假设当$n=k$时,结论成立,即$a_k=k(k+1)$,

$b_k=(k+1)^2$,那么当$n=k+1$时,$a_{k+1}=2b_k-a_k$

$=2(k+1)^2-k(k+1)=(k+1)(k+1)$,$b_{k+1}=\frac{a_{k+1}^2}{b_k}=(k+2)^2$.

所以当$n=k+1$时,结论也成立.

由①②可知$a_n=n(n+1)$,$b_n=(n+1)^2$对一切正整数都成立.

(Ⅱ)$\frac{1}{a_1+b_1}=\frac{1}{6}<\frac{5}{12}$.

$n\geq2$时,由(Ⅰ)知$a_n+b_n=(n+1)(2n+1)>2(n+1)n$.

故$\frac{1}{a_1+b_1}+\frac{1}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{1}{a_n+b_n}<\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.

综上,原不等式成立.

例2 (2008年江西考理·T19)等差数列$\{a_n\}$各项均为正整数，$a_1=3$，前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$中，$b_1=1$，且$b_2S_2=64$，$\{b_{a_n}\}$是公比为64的等比数列.

(1)求a_n与b_n；

(2)证明：$\frac{1}{S}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{3}{4}$.

【规范解析】 (1)设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，

则d为正整数，$a_n=3+(n-1)d$，$b_n=q^{n-1}$，

依题意有$\begin{cases}\frac{ba_{n+1}}{b_{a_n}}=\frac{q^{3+nd-1}}{q^{+3(n-1)d-1}}=q^d=64=2^6\\ S_2b_2=(6+d)q=64\end{cases}$ ①

由$(6+d)q=64$知q为正有理数，

又由$q=2^{\frac{6}{d}}$知，d为6的因子1,2,3,6之一，

解①得$d=2$，$q=8$，

故$a_n=3+2(n-1)=2n+1$，$b_n=8^{n-1}$.

(2)$S_n=3+5+\cdots+(2n+1)=n(n+2)$，

所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots\frac{1}{S_n}$

$=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$.

例3 (2008年全国Ⅰ理·T22)设函数$f(x)=x-x\ln x$. 数列$\{a_n\}$满足$0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

(Ⅰ)证明：函数$f(x)$在区间(0,1)是增函数；

(Ⅱ)证明：$a_n<a_{n+1}<1$；

(Ⅲ)设$b\in(a_1,1)$，整数$k\geqslant\frac{a_1-b}{a_1\ln b}$. 证明：$a_{k+1}>b$.

【证明】 (1)$f'(x)=1-(1+\ln x)=-\ln x$，

因为$0<x<1$，$\ln x<0$，因此$f'(x)>0$，$f(x)$在(0,1)上为增函数.

(2)运用数学归纳法证明$0<a_n<1$，

当$n=1$时，由于$0<a_1<1$，则结论成立；

假设$0<a_k<1$，则当$n=k+1$时，$a_{k+1}=f(a_k)=a_k-a_k\ln a_k=a_k(1-\ln a_k)$，$\ln a_k<0$，因此$a_{k+1}>0$.

又考察函数$g(x)=f(x)-1=x-x\ln x-1$，当$x<1$时，由于$g(x)$与$f(x)$有相同的单调性，因此$g(x)<g(1)=0$，



即 $f(x)<1$. 因此,当 $0<a_k<1$ 时,$a_{k+1}<1$.

综合上述,有 $0<a_{k+1}<1$.

假设归纳成立,对于任意的 n,均有 $0<a_n<1$.

而 $a_{n+1}-a_n=-a_n\ln a_n$,

当 $0<a_n<1$,$a_{n+1}-a_n=-a_n\ln a_n>0$,

因此 $a_n<a_{n+1}<1$.

(3)$a_{k+1}=a_k(1-\ln a_k)=a_{k-1}(1-\ln a_k)(1-\ln a_{k-1})=a_{k-2}(1-\ln a_k)(1-\ln a_{k-1})(1-\ln a_{k-2})$

$=\cdots$

$=a_1(1-\ln a_k)(1-\ln a_{k-1})\cdots(1-\ln a_1)$

$>a_1(1-\ln a_1-\ln a_2-\ln a_3-\cdots-\ln a_k)$

$>a_1(1-k\ln a_k)$,

讨论:当 $a_k\geqslant b$ 时,$a_{k+1}>a_k\geqslant b$,

当 $a_k<b$ 时,$a_{k+1}>a_1(1-k\ln a_k)>a_1(1-k\ln b)$,

而 $ka_1\ln b\leqslant a_1-b$,$b\leqslant a_1(1-k\ln b)$,因此 $a_{k+1}>b$.

例 4 证明:$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$.

【证明】 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{\text{共}(n^2-n)\text{项}}$

$=\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=1$.

【解后感言】 这个问题的证明先要弄清楚"$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$"这个和式共有几项;其次,放缩的时候将第一项 $\frac{1}{n}$ 保留下来,这才得到了我们要证的结论.

六、导数法

解题秘言:新教材将导数与传统的不等式证明有机结合在一起设问,形成一种新颖的命题模式,它体现了导数在分析和解决一些函数性问题时的工具性作用.

例 1 (2008年山东)已知函数 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+a\ln(x-1)$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$,a 为常数.

(Ⅰ)当 $n=2$ 时,求函数 $f(x)$ 的极值;

(Ⅱ)当 $a=1$ 时,证明:对任意的正整数 n,当 $x\geqslant 2$ 时,有 $f(x)\leqslant x-1$.

【解】 (Ⅰ)由已知得函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>1\}$,

当 $n=2$ 时,$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+a\ln(x-1)$,



所以 $f'(x)=\dfrac{2-a(1-x)^2}{(1-x)^3}$.

(1)当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$ 得

$x_1=1+\sqrt{\dfrac{2}{a}}>1, x_2=1-\sqrt{\dfrac{2}{a}}<1$,

此时 $f'(x)=\dfrac{-a(x-x_1)(x-x_2)}{(1-x)^3}$.

当 $x\in(1,x_1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当 $x\in(x_1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

(2)当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,所以 $f(x)$无极值.

综上所述,$n=2$ 时,

当 $a>0$ 时,$f(x)$在 $x=1+\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ 处取得极小值,极小值为 $f\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{a}}\right)=\dfrac{a}{2}\left(1+\ln\dfrac{2}{a}\right)$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$无极值.

(Ⅱ)证法一:因为 $a=1$,所以 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)$.

当 n 为偶数时,

令 $g(x)=x-1-\dfrac{1}{(1-x)^n}-\ln(x-1)$,

则 $g'(x)=1+\dfrac{n}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{n}{(x-1)^{n+1}}>0(x\geqslant 2)$.

所以当 $x\in[2,+\infty]$时,$g(x)$单调递增,

又 $g(2)=0$

因此 $g(x)=x-1-\dfrac{1}{(x-1)^n}-\ln(x-1)\geqslant g(2)=0$ 恒成立,

所以 $f(x)\leqslant x-1$ 成立.

当 n 为奇数时,

要证 $f(x)\leqslant x-1$,由于$\dfrac{1}{(1-x)^n}<0$,所以只需证 $\ln(x-1)\leqslant x-1$,

令 $h(x)=x-1-\ln(x-1)$,

则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}\geqslant 0\quad(x\geqslant 2)$,

所以当 $x\in[2,+\infty]$时,$h(x)=x-1-\ln(x-1)$单调递增,又 $h(2)=1>0$,

所以当 $x\geqslant 2$ 时,恒有 $h(x)>0$,即 $\ln(x-1)<x-1$ 命题成立.

综上所述,结论成立.

证法二:当 $a=1$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)$,

当 $x\geqslant 2$ 时,对任意的正整数 n 恒有 $\frac{1}{(1-x)^n}\leqslant 1$,故只需证明 $1+\ln(x-1)\leqslant x-1$.

令 $h(x)=x-1-[1+\ln(x-1)]=x-2-\ln(x-1)$, $x\in[2,+\infty)$

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$,

当 $x\geqslant 2$ 时, $h'(x)\geqslant 0$,故 $h(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,

因此当 $x\geqslant 2$ 时, $h(x)\geqslant h(2)=0$,即 $1+\ln(x-1)\leqslant x-1$ 成立.

故当 $x\geqslant 2$ 时,有 $\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)\leqslant x-1$.

即 $f(x)\leqslant x-1$.

【解后感言】 由于考生对利用导数法证明不等式很不适应,以致丢分现象十分严重.实际上,导数法是不等式证明中的一种全新的、实用的好方法.

例2 (2008年陕西高考理·T22)已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{3}{5}$, $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$, $n=1,2,\cdots$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)证明:对任意的 $x>0$, $a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$, $n=1,2,\cdots$;

(Ⅲ)证明: $a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}$.

【解析】 解法一:(Ⅰ)∵ $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$,∴ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_n}$,

∴ $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$.

又 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}$,∴ $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

∴ $\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{2}{3^n}$,∴ $a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$.

(Ⅱ)设 $f(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$,

则 $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{-(1+x)^2-\left(\frac{2}{3^n}-x\right)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2\left(\frac{2}{3^n}-x\right)}{(1+x)^3}$.

∵ $x>0$,∴当 $x<\frac{2}{3^n}$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x>\frac{2}{3^n}$ 时, $f'(x)<0$.

∴当 $x=\frac{2}{3^n}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f\left(\frac{2}{3^n}\right)=\frac{1}{1+\frac{2}{3^n}}=a_n$.

∴原不等式成立.

(Ⅲ)由(Ⅱ)知,对任意的 $x>0$,有

$$a_1+a_2+\cdots a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3}-x\right)+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\times\left(\frac{2}{3^2}-x\right)+\cdots+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$$

$$=\frac{n}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}-nx\right).$$

∴取 $x=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}\right)$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),$$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\dfrac{n}{1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}=\dfrac{n^2}{n+1-\frac{1}{3^n}}>\dfrac{n^2}{n+1}$.

∴原不等式成立.

例3 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x,g(x)=x\ln x$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$的最大值;

(Ⅱ)设 $0<a<b$,证明

$0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln2$.

(Ⅰ)**【解】** 函数 $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$且 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$.

当$-1<x<0$ 时 $f'(x)>0$;当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$.

又 $f(0)=0$,故当且仅当 $x=0$ 时,$f(x)$取得最大值,且最大值为 0.

(Ⅱ)**【证明】** $g(x)=x\ln x,g'(x)=\ln x+1$

设 $F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)$,则

$F'(x)=g'(x)-2\left[g\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]'=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}$.

当 $0<x<a$ 时,$F'(x)<0$,故 $F(x)$在$(0,a)$上为减函数;

当 $x>a$ 时,$F'(x)>0$,故 $F(x)$在$(a,+\infty)$上为增函数.

∴当 $x=a$ 时,$F(x)$有极小值 $F(a)$.

∵$F(a)=0,b>a$ ∴$F(b)>0$

即 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)$

设 $G(x)=F(x)-(x-a)\ln2$,则

$G'(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}-\ln2=\ln x-\ln(a+x)$

当 $x>0$ 时，$G'(x)<0$ $\therefore G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

$\because G(a)=0, b>a$ $\therefore G(b)<0$

即 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

【解后感言】 这里结合函数的增减性，采用导数法，使解题过程表述简洁，条理清晰，要细细体会，掌握方法.

七、数学归纳法

解题秘言：对与自然数 n 有关的不等式，如果用其他方法比较困难时，可考虑用数学归纳法来证明.

用数学归纳法证明的步骤是：

(1)证明当 n 取第一个值 n_0（n_0 是满足命题的最小的自然数）时，命题成立；

(2)假设当 $n=k(k\geqslant n_0, k\in \mathbf{N})$ 时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

例1 （2008年浙江高考理·T22）已知数列 $\{a_n\}$，$a_n\geqslant 0$，$a_1=0$，$a_{n+1}^2+a_{n+1}-1=a_n^2(n\in \mathbf{N}^*)$. 记：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

$$T_n=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

求证：当 $n\in \mathbf{N}^*$ 时，

(Ⅰ) $a_n<a_{n+1}$；

(Ⅱ) $S_n>n-2$；

(Ⅲ) $T_n<3$.

【规范解析】 (Ⅰ)证明：用数学归纳法证明.

①当 $n=1$ 时，因为 a_2 是方程 $x^2+x-1=0$ 的正根，

所以 $a_1<a_2$.

②假设当 $n=k(k\in \mathbf{N}^*)$ 时，$a_k<a_{k+1}$，

因为 $a_{k+1}^2-a_k^2=(a_{k+2}^2+a_{k+2}-1)-(a_{k+1}^2+a_{k+1}-1)$

$=(a_{k+2}-a_{k+1})(a_{k+2}+a_{k+1}+1)$，

所以 $a_{k+1}<a_{k+2}$.

即当 $n=k+1$ 时，$a_n<a_{n+1}$ 也成立.

根据①和②，可知 $a_n<a_{n+1}$ 对任何 $n\in \mathbf{N}^*$ 都成立.

(Ⅱ)证明：由 $a_{k+1}^2+a_{k+1}-1=a_k^2$，$k=1,2,\cdots,n-1(n\geqslant 2)$，得 $a_n^2+(a_2+a_3+\cdots a_n)-(n-1)=a_1^2$，

因为 $a_1=0$，所以 $S_n=n-1-a_n^2$.

由 $a_n<a_{n+1}$ 及 $a_{n+1}=1+a_n^2-a_{n+1}^2<1$ 得 $a_n<1$，所以 $S_n>n-2$.

(Ⅲ)证明：由 $a_{k+1}^2+a_{k+1}=1+a_k^2\geqslant 2a_k$，得

$\frac{1}{1+a_{k+1}}\leqslant\frac{a_{k+1}}{2a_k}(k=2,3,\cdots,n-1,n\geqslant 3)$，

所以$\frac{1}{(1+a_3)(1+a_4)\cdots(1+a_n)}\leqslant\frac{a_n}{2^{n-2}a_2}(n\geqslant3)$，

于是$\frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)}\leqslant\frac{a_n}{2^{n-2}(a_2^2+a_2)}$

$=\frac{a_n}{2^{n-2}}<\frac{1}{2^{n-2}}(n\geqslant3)$，

故当 $n\geqslant3$ 时，$T_n<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}<3$，

又因为 $T_1<T_2<T_3$，所以 $T_n<3$.

【解后感言】 在用数学归纳法证题时，归纳假设一定要用，否则是错误的.

例2 （2008年湖南高考理·T18）数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\left(1+\cos^2\frac{n\pi}{2}\right)a_n+\sin^2\frac{n\pi}{2}$，$n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）求 a_3，a_4，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. 证明：当 $n\geqslant6$ 时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}$.

【规范解析】 （Ⅰ）因为 $a_1=1$，$a_2=2$，

所以 $a_3=\left(1+\cos^2\frac{\pi}{2}\right)a_1+\sin^2\frac{\pi}{2}=a_1+1=2$，

$a_4=(1+\cos^2\pi)a_2+\sin^2\pi=2a_2=4$.

一般地，当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，

$a_{2k+1}=\left[1+\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2}\right]a_{2k-1}+\sin^2\frac{2k-1}{2}\pi=a_{2k-1}+1$，

即 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=1$.

所以数列$\{a_{2k-1}\}$是首项为1、公差为1的等差数列，

因此 $a_{2k-1}=k$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$a_{2k+2}=\left(1+\cos^2\frac{2k\pi}{2}\right)a_{2k}+\sin^2\frac{2k\pi}{2}=2a_{2k}$.

所以数列$\{a_{2k}\}$是首项为2、公比为2的等比数列，因此 $a_{2k}=2^k$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2},n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*),\\2^{\frac{n}{2}},n=2k(k\in\mathbf{N}^*).\end{cases}$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}=\frac{n}{2^n}$，

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n},\qquad①$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}},\qquad②$$

①－②得，

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$$

所以 $S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.

要证明当 $n\geqslant 6$ 时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}$成立，只需证明

当 $n\geqslant 6$ 时，$\frac{n(n+2)}{2^n}<1$ 成立.

证法一

(1)当 $n=6$ 时，$\frac{6\times(6+2)}{2^6}=\frac{48}{64}-\frac{3}{4}<1$ 成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 6)$时不等式成立，即$\frac{k(k+2)}{2^k}<1$.

则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{(k+1)(k+3)}{2^{k+1}}=\frac{k(k+2)}{2^k}\times\frac{(k+1)(k+3)}{2k(k+2)}<\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)\cdot 2k}<1.$$

由(1)、(2)所述，当 $n\geqslant 6$ 时，$\frac{n(n+2)}{2^n}<1$，即当 $n\geqslant 6$ 时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}$.

证法二

令 $c_n=\frac{n(n+2)}{2^n}(n\geqslant 6)$，则 $c_{n+1}-c_n=\frac{(n+1)(n+3)}{2^{n+1}}-\frac{n(n+2)}{2^n}=\frac{3-n^2}{2^{n+1}}<0$.

所以当 $n\geqslant 6$ 时，$c_{n+1}<c_n$. 因此当 $n\geqslant 6$ 时，$c_n\leqslant c_6=\frac{6\times 8}{64}=\frac{3}{4}<1$.

于是当 $n\geqslant 6$ 时，$\frac{n(n+2)}{2^n}<1$.

综上所述，当 $n\geqslant 6$ 时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}$.

例3 已知函数 $f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于$\frac{1}{6}$，又当 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$时，$f(x)\geqslant\frac{1}{8}$.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)设 $0<a_1<\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$a_n<\frac{1}{n+1}$.

【解】 (Ⅰ)由题意知，$f(x)=ax-\frac{3}{2}x^2=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\frac{a^2}{6}$. 又 $f(x)_{\max}\leqslant\frac{1}{6}$

$\therefore f(\frac{a}{3})=\frac{a^2}{6}\leqslant\frac{1}{6}$ $\quad\therefore a^2\leqslant 1$.

又 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$时，$f(x)\geqslant\frac{1}{8}$

$$\therefore\begin{cases}f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant\frac{1}{8}\\ f\left(\frac{1}{4}\right)\geqslant\frac{1}{8}\end{cases}\text{即}\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{3}{8}\geqslant\frac{1}{8}\\ \frac{a}{4}-\frac{3}{32}\geqslant\frac{1}{8}\end{cases}$$

解之得 $a\geqslant1$.

又∵$a^2\leqslant1$　∴$a=1$.

(Ⅱ)用数学归纳法证明.

证法一　(1)当 $n=1$ 时 $0<a_1<\frac{1}{2}$，不等式 $0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立.

∵当 $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$时，$0<f(x)\leqslant\frac{1}{6}$

∴$0<a_2=f(a_1)\leqslant\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$

故 $n=2$ 时，原不等式也成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant2)$时，不等式 $0<a_k<\frac{1}{k+1}$成立.

∵$f(x)=x-\frac{3}{2}x^2$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{3}$

∴当 $x\in(0,\frac{1}{3}]$时，$f(x)$为增函数.

∴由 $0<a_k<\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{3}$得 $0<f(a_k)<f\left(\frac{1}{k+1}\right)$. 于是有

$$0<a_{k+1}=f(a_k)$$
$$<\frac{1}{k+1}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+2}$$
$$=\frac{1}{k+2}-\frac{k+4}{2(k+1)^2(k+2)}<\frac{1}{k+2}.$$

∴当 $n=k+1$ 时，原不等式也成立.

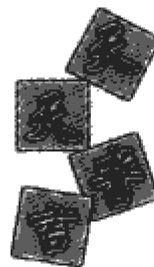
综合(1)(2)知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $a_n<\frac{1}{n+1}$成立.

证法二　(1)当 $n=1$ 时，$0<a_1<\frac{1}{2}$，不等式 $0<a_n<\frac{1}{n+1}$成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1)$时，原不等式成立，即 $0<a_k<\frac{1}{k+1}$.

则当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=f(a_k)=a_k\left(1-\frac{3}{2}a_k\right)=\frac{1}{k+2}(k+2)a_k\cdot\left(1-\frac{3}{2}a_k\right).$$



$\because (k+2)a_k>0, 1-\frac{3}{2}a_k>0$

$\therefore (k+2)a_k\cdot\left(1-\frac{3}{2}a_k\right)$

$\leqslant\left[\frac{1+(k+2-\frac{3}{2})a_k}{2}\right]^2=\left[\frac{1+(k+\frac{1}{2})a_k}{2}\right]^2<1.$

于是有 $0<a_{k+1}<\frac{1}{k+2}$.

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，原不等式也成立.

综合(1)(2)可知，对任何 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $a_n<\frac{1}{n+1}$ 成立.

【解后感言】 在由 $n=k$ 时的结论过渡到 $n=k+1$ 时的结论，通常要应用放缩法，有时甚至是多次放缩. 如何放缩得当，其中技巧性较强，应具体情况具体分析.

八、换元法

解题秘言：换元，是一种重要的数学思想，用换元法来证明不等式往往能达到以简驭繁的效果. 有些问题直接证明较为困难，但若引进适当的代换，不仅能使不等式的证明简化，而且比较容易找到证题思路.

换元法多用于条件不等式的证明，换元法中常见的是三角换元和代数换元两种.

例 1 已知 a,b,x,y 都是正数，且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，证明：

$x+y\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

证法一 令 $\frac{a}{x}=\cos^2\theta, \frac{b}{y}=\sin^2\theta\left(\theta\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right)$，则

$x+y=\frac{a}{\cos^2\theta}+\frac{b}{\sin^2\theta}$

$=a(1+\tan^2\theta)+b(1+\cot^2\theta)=a+b+(a\tan^2\theta+b\cot^2\theta)$

$\geqslant a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

证法二 $x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=a+\frac{xb}{y}+\frac{ya}{x}+b$

$\geqslant a+b+2\sqrt{\frac{xb}{y}\cdot\frac{ya}{x}}=a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

【解后感言】 证法一是三角换元，证法二是"1"的代换. 三角换元运用得当，往往可沟通三角与代数的联系，将复杂的代数问题转化为简单的三角问题. 另外，在使用换元法证明不等式时一定要注意新变量的取值范围.

例 2 已知 $a>0,b>0,c>0$，证明：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

【证明】 设 $x=b+c,y=a+c,z=a+b$，则

$x>0,y>0,z>0$，

$$a=\frac{y+z-x}{2},b=\frac{x+z-y}{2},c=\frac{x+y-z}{2}$$

这时原不等式

$$左边=\frac{1}{2}\left(\frac{z+y-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-3\right]$$

又∵当 $t>0$ 时，有 $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$

∴原不等式左边 $\geqslant\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$

从而原不等式成立.

【解后感言】 本题不等式的左边分母都是多项式，不能直接通分推证，又考虑到 a,b,c 的对称性，所以可引进代换，将分母化作单项，转化为易运用公式的不等式，这种引入代换的方法要注意掌握.

例 3 设 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为正实数，n 为自然数且 $n\geqslant 2$，

证明：$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n$

$$\geqslant\frac{x_1}{x_0}+\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_0}{x_n}.$$

【证明】 令 $\frac{x_{i-1}}{x_i}=a_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\frac{x_n}{x_0}=a_0$，原不等式变为

$$a_0^n+a_1^n+\cdots+a_n^n\geqslant\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \qquad (*)$$

∵$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为正数，且 $a_0a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$，依算术—几何平均不等式，有

$$\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}=a_0a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n+a_0a_2\cdot\cdots\cdot a_n+\cdots+a_0a_1\cdot\cdots\cdot a_{n-1}$$

$$\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}+\frac{a_0^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}+\cdots+\frac{a_0^n+a_1^n+\cdots+a_{n-1}^n}{n}$$



$=a_0^n+a_1^n+\cdots+a_n^n$.

∴(*)式得证，原不等式成立.

【解后感言】 这里令$\frac{x_{i-1}}{x_i}=a_i$作分段换元，依$a_0a_1\cdot\cdots\cdot a_n=1$的特性作恒等变形，以创造应用基本公式的条件，这类解题技巧应注意掌握.

九、函数法

解题秘言：根据所给不等式的特征，构造适当的函数，然后利用一元二次函数的判别式、函数的奇偶性、单调性、有界性等来证明不等式，我们统称为函数法. 这类问题内容相当丰富，我们在“函数思想”一章中已作过专门论述，这里仅就它在证明不等式中的应用略举几例.

例1 (2007年重庆高考理T21、文T22)已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_1>1$，且$6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{b_n\}$满足$a_n(2^{b_n}-1)=1$，并记T_n为$\{b_n\}$的前n项和，求证：$3T_n+1>\log_2(a_n+3)$，$n\in\mathbf{N}$.

(1)**【解】** 由$a_1=S_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$，

解得$a_1=1$或$a_1=2$.

由假设$a_1=S_1>1$，因此$a_1=2$.

又由$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{6}(a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2)-\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，

得$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$，

即$a_{n+1}-a_n-3=0$或$a_{n+1}=-a_n$. 因$a_n>0$，

故$a_{n+1}=-a_n$不成立，舍去. 因此$a_{n+1}-a_n=3$.

从而$\{a_n\}$是公差为3，首项为2的等差数列，故$\{a_n\}$的通项为$a_n=3n-1$.

(2)**【证明】** 由$a_n(2^{b_n}-1)=1$可解得

$b_n=\log_2\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\log_2\frac{3n}{3n-1}$；

从而$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}\right)$.

因此$3T_n+1-\log_2(a_n+3)=\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}\right)^3\cdot\frac{2}{3n+2}$.

令$f(n)=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}\right)^3\cdot\frac{2}{3n+2}$，



则$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{3n+2}{3n+5}\cdot\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^3=\frac{(3n+3)^3}{(3n+5)(3n+2)^2}$.

因$(3n+3)^3-(3n+5)(3n+2)^2=9n+7>0$,

故 $f(n+1)>f(n)$.

特别地 $f(n)\geqslant f(1)=\frac{27}{20}>1$,

从而 $3T_n+1-\log_2(a_n+3)=\log_2 f(n)>0$,

即 $3T_n+1>\log_2(a_n+3)$.

例2 证明不等式:$\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}(x\neq 0)$.

【证明】 设 $f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}(x\neq 0)$.

$\because f(-x)=\frac{-x}{1-2^{-x}}+\frac{x}{2}=\frac{-x\cdot 2^x}{2^x-1}+\frac{x}{2}$

$=\frac{x}{1-2^x}[1-(1-2^x)]+\frac{x}{2}$

$=\frac{x}{1-2^x}-x+\frac{x}{2}=f(x)$

$\therefore f(x)$的图象关于 y 轴对称.

$\because$当 $x>0$ 时,$1-2^x<0$,故 $f(x)<0$;

$\therefore$当 $x<0$ 时,依图象的对称性知 $f(x)<0$.

故当 $x\neq 0$ 时,恒有 $f(x)<0$,即$\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}(x\neq 0)$.

【解后感言】 这里实质上是根据函数的奇偶性来证明的,本例也可以用分析法作分类讨论证得.

例3 已知锐角三角形 ABC,证明:

$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.

【证明】 $\because A,B,C$ 均为锐角,则有 $A,90°-B,90°-C$ 均为锐角.

令 $y=\sin x,x\in(0°,90°)$.

$\because A=180°-B-C=(90°-B)+(90°-C)$

$\therefore A>90°-B$

依正弦函数在$(0°,90°)$的单调性知:$\sin A>\sin(90°-B)=\cos B$

同理 $\sin B>\cos C,\sin C>\cos A$

故 $\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$.

【解后感言】 这里是运用函数的单调性来进行证明,证明时应注意函数的单调区间,此法显然比常用的和化积形式简单.

十、反证法

解题秘言：反证法在不等式的证明中有着广泛的应用，正难则反是数学证题时行之有效的策略.

凡是含有“至多”、“至少”、“唯一”等或含有否定词的命题都适合用反证法.

例1 (2008年安徽高考文·T21)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=ca_n+1-c$，$n\in\mathbf{N}^*$，其中a，c为实数，且$c\neq0$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$a=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$，$b_n=n(1-a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n；

(3)若$0<a_n<1$对任意$n\in\mathbf{N}^*$成立，证明$0<c\leqslant1$.

【规范解析】 (1)方法一：

$\because a_{n+1}-1=c(a_n-1)$，

$\therefore$当$a\neq1$时，$\{a_n-1\}$是首项为$a-1$，公比为c的等比数列.

$\therefore a_n-1=(a-1)c^{n-1}$，即$a_n=(a-1)c^{n-1}+1$，

当$a=1$时，$a_n=1$仍满足上式，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为

$a_n=(a-1)c^{n-1}+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

方法二：由题设得：当$n\geqslant2$时，

$a_n-1=c(a_{n-1}-1)=c^2(a_{n-2}-1)$

$=\cdots=c^{n-1}(a_1-1)=(a-1)c^{n-1}$，

$\therefore a_n=(a-1)c^{n-1}+1$，

$n=1$时，$a_1=a$也满足上式，

所以$\{a_n\}$的通项公式为

$a_n=(a-1)c^{n-1}+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)得：$b_n=n(1-a)c^{n-1}=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

$\therefore\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$\therefore S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$\therefore S_n=2-(2+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(3)由(1)知 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1$.

若 $0<(a-1)c^{n-1}+1<1$,

则 $0<(1-a)c^{n-1}<1$,

$\because 0<a_1=a<1$, $\therefore 0<c^{n-1}<\frac{1}{1-a}(n\in\mathbf{N}^*)$.

由 $c^{n-1}>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，知 $c>0$，

下证 $c\leqslant 1$. 用反证法

方法一：假设 $c>1$. 由函数 $f(x)=c^x$ 的函数图象知，

当 n 趋于无穷大时，c^{n-1} 趋于无穷大.

$\therefore c^{n-1}<\frac{1}{1-a}$ 不能对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，导致矛盾.

$\therefore c\leqslant 1$, $\therefore 0<c\leqslant 1$.

方法二：假设 $c>1$, $\because c^{n-1}<\frac{1}{1-a}$,

$\therefore \log_c{}^{n-1}<\log_c\frac{1}{1-a}$,

即 $n-1<\log_c\frac{1}{1-a}(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立 (*)

$\because a,c$ 为常数，$\therefore$(*)式对 $n\in\mathbf{N}^*$ 不能恒成立，导致矛盾，

$\therefore c\leqslant 1$, $\therefore 0<c\leqslant 1$.

例2 已知 $a,b,c\in(0,1)$. 证明：$(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 不能都大于 $\frac{1}{4}$.

【证明】 假设 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 都大于 $\frac{1}{4}$.

$\because a,b,c$ 都是小于1的正数

$\therefore 1-a,1-b,1-c$ 都是正数

$\therefore \frac{(1-a)+b}{2}\geqslant\sqrt{(1-a)b}>\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

同理 $\frac{(1-b)+c}{2}>\frac{1}{2}$, $\frac{(1-c)+a}{2}>\frac{1}{2}$

三式两边相加，得

$\frac{(1-a)+b}{2}+\frac{(1-b)+c}{2}+\frac{(1-c)+a}{2}>\frac{3}{2}$

即 $\frac{3}{2}>\frac{3}{2}$，矛盾.

$\therefore (1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 不能都大于 $\frac{1}{4}$.

【解后感言】 反证法常用于那些直接证明比较困难的命题，如否定性命题，或结论中含有“至多”、“至少”类限制词时命题常采用反证法. 本题中运用均值不等式为导出矛盾起到了重要作用.

例3 设 $f(x)=x^2+ax+b$，证明：$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

【证明】 假设 $|f(1)|<\frac{1}{2},|f(2)|<\frac{1}{2},|f(3)|<\frac{1}{2}$ 则有

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}<1+a+b<\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}<4+2a+b<\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}<9+3a+b<\frac{1}{2}\end{cases}\text{于是有}\begin{cases}-\frac{3}{2}<a+b<-\frac{1}{2}\\-\frac{9}{2}<2a+b<-\frac{7}{2}\\-\frac{19}{2}<3a+b<-\frac{17}{2}\end{cases}$$

由前面两式得 $-4<a<-2$，由后面两式得 $-6<a<-4$，这两式显然相互矛盾，所以假设不成立. 原命题正确.

【解后感言】 本题的难点是从假设中找出矛盾，说明假设不成立，要细心体会这种推出矛盾的方法.

十一、数形结合法

解题秘言：在有些不等式的证明过程中，可以根据已知条件的结构特点，联想它所表示的几何图形的意义，通过图形启发思维，找到简捷的证题思路.

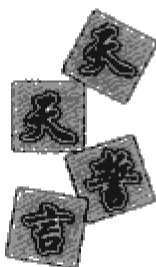
例1 已知 $a,b,x,y\in\mathbf{R}$，且 $a+2b+4=0,x+2y+1=0$. 证明：$(a+x)^2+(b+y)^2\geqslant 5$.

【证明】 由题设可知：点 (a,b) 在直线 $x+2y+4=0$ 上，点 $(-x,-y)$ 在直线 $x+2y-1=0$ 上，$(a+x)^2+(b+y)^2$ 就是平行直线 $x+2y+4=0,x+2y-1=0$ 上两点的距离的平方.

显然，平行直线上任意两点的距离的最小值是两平行线间的距离，故 $\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}\geqslant\frac{|4-(-1)|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

$\therefore (a+x)^2+(b+y)^2\geqslant 5$.

【解后感言】 本题从已知条件的结构特点出发，联想它的几何意义即可获证. 方法简捷，思路清晰. 也是证明不等式的一个好方法.



例2 已知 α,β,γ 均为锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 证明：$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\sqrt{2}$.

【证明】 由已知条件作长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，使 $\angle C_1AD=\alpha$，$\angle C_1AB=\beta$，$\angle C_1AA_1=\gamma$. 设 $AD=a$，$AB=b$，$AA_1=c$（如图）.

则 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}$，

$\tan\gamma=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

$\because \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\geqslant\dfrac{b+c}{\sqrt{2}a}$，$\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}\geqslant\dfrac{c+a}{\sqrt{2}b}$，$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\geqslant\dfrac{a+b}{\sqrt{2}c}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}+\dfrac{\sqrt{c^2+a^2}}{b}+\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

$\geqslant\dfrac{b+c}{\sqrt{2}a}+\dfrac{c+a}{\sqrt{2}b}+\dfrac{a+b}{\sqrt{2}c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{a}{b}\right)\right]$

$\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{a}{c}}+3\sqrt[3]{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{a}{b}}\right)=3\sqrt{2}$，

当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}$，且 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}$，即 $a=b=c$ 时等号成立.

$\therefore \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\sqrt{2}$.

【解后感言】 本题根据代数表达形式合理地构造几何图形是顺利求解的关键. 后面根据基本不等式进行两次适当的放缩，这些技巧都值得细细品味.

十二、向量法

解题秘言：向量作为高中教材的新增内容，大大丰富和发展了中学数学结构体系，进一步拓宽了解决中学数学问题的思维空间. 在不等式证明中，对于某些特殊结构的不等式，可以巧设向量将某些式子转化成向量的长度来表示，利用向量关系式：$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$ 证明，特别要注意等号成立的条件：当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线即 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\neq0)$ 时等号成立.

例1 设 a,b,c 为非负数，证明：

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

【证明】 以距离为背景，可构造向量.

$\boldsymbol{a}_1=(a,b)$，$\boldsymbol{a}_2=(b,c)$，$\boldsymbol{a}_3=(c,a)$.

则$|\boldsymbol{a}_1|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|\boldsymbol{a}_2|=\sqrt{b^2+c^2}$，$|\boldsymbol{a}_3|=\sqrt{c^2+a^2}$.

又 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=(a+b+c,a+b+c)$

$\therefore |\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3|=\sqrt{2}(a+b+c)$

$\because |\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+|\boldsymbol{a}_3|\geqslant|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3|$

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

【解后感言】 形如$\sqrt{x^2+y^2}$，$x_1x_2+y_1y_2$形式的式子可以通过构造向量，利用向量的性质求解.

例 2 已知$a>b>c>d$，证明：$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}\geqslant\dfrac{9}{a-d}$.

【证明】 由条件显然有$a-b>0$，$b-c>0$，$c-d>0$，$a-d>0$.

构造向量：$\boldsymbol{a}=(\sqrt{a-b},\sqrt{b-c},\sqrt{c-d})$，

$\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a-b}},\dfrac{1}{\sqrt{b-c}},\dfrac{1}{\sqrt{c-d}}\right)$.

$\therefore |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(a-b)+(b-c)+(c-d)}=\sqrt{a-d}$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}}$.

又$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|$，得 $\sqrt{a-d}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}}\geqslant3$，即

$(a-d)\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}\right)\geqslant9$.

$\therefore \dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-d}\geqslant\dfrac{9}{a-d}$.

例 3 证明：$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-8x+17}\geqslant5$.

【思路探索】 从欲证式子的结构特征看出，左边的形式类似于向量的模. 因此可考虑用向量法来证.

【证明】 $\because \sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-8x+17}=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(x-4)^2+1}$

$\therefore$可令$\boldsymbol{a}=(x,2)$，$\boldsymbol{b}=(-x+4,1)$

$\because |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

而$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|(x,2)+(-x+4,1)|=\sqrt{16+9}=5$

当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$同向共线即$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda>0)$时，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

此时$(x,2)=\lambda(4-x,1)$ $\therefore \lambda=2$，$x=\dfrac{8}{3}$.

故$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-8x+17}\geqslant5$（当$x=\dfrac{8}{3}$时取等号）.

【解后感言】 在用向量法求最值时，一定要调整好向量中坐标的符号，保证运算时只保留常数. 本题中若$\boldsymbol{b}=(x-4,1)$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{17}$. 但此时取等号的前提是$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda<0)$，可求$\lambda=2$，与$\lambda<0$矛盾，从而得不到正确的结果.

十三、柯西不等式法(不等式选讲内容)

解题秘言:设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意实数,则

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$,

当且仅当$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$时等号成立.

我们称此不等式为柯西不等式.

柯西不等式是很重要的一个基本不等式,在数学竞赛中应用极其广泛.将柯西不等式和其他数学思想方法结合起来,解决某些数学竞赛问题,可起事半功倍的效果.

柯西不等式的证明并不难,但其应用却十分广泛和灵活,故此特作介绍,先给出证明.

【证明】 若 $a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,显然柯西不等式等号成立,原不等式为真.

若 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为零,我们可构造二次函数

$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

$\because f(x)=(a_1^2x^2+2a_1b_1x+b_1^2)+(a_2^2x^2+2a_2b_2x+b_2^2)$

$+\cdots+(a_n^2x^2+2a_nb_nx+b_n^2)$

$=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2$

$\geqslant0$,

且其二次项系数 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$,

$\therefore$判别式 $\Delta\leqslant0$,即

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$,

仅当 $a_1x+b_1=a_2x+b_2=\cdots=a_nx+b_n=0$,即$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$时等号成立.

下面举例说明柯西不等式的应用.

例1 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}_+,n\in\mathbf{N}$.求证:

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2$.

【证明】 $\because x_i\in\mathbf{R}_+(i=1,2,\cdots,n)$可视 x_i 为$(\sqrt{x_i})^2$,依柯西不等式,有

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$

$\geqslant\left(\sqrt{x_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2$

$=\underbrace{(1+1+\cdots+1)^2}_{n个1}=n^2$.

【解后感言】 本例若用数学归纳法证将要复杂得多,由此可见柯西不等式的解题功效绝非一般.

例2 已知 a,b 为正实数，且有 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. 试证：对每一个 $n\in\mathbf{N}$，都有 $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

【证明】 $\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow a+b=ab\Rightarrow(a-1)(b-1)=1$

又 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\Rightarrow ab\geqslant 4$

于是

$(a+b)^n-a^n-b^n+1=(ab)^n-a^n-b^n+1$

$=(a^n-1)(b^n-1)$

$=(a-1)(b-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1)$

$=(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)(b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1)$

$\geqslant[(ab)^{\frac{n-1}{2}}+(ab)^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+(ab)^{\frac{1}{2}}+1]^2$

$\geqslant(4^{\frac{n-1}{2}}+4^{\frac{n-2}{2}}+\cdots+4^{\frac{1}{2}}+1)^2$

$=(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1)^2$

$=(2^n-1)^2=2^{2n}-2^{n+1}+1$

$\therefore(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$.

【解后感言】 本例中由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 挖掘出隐含条件 $a+b=ab$，$(a-1)(b-1)=1$，$ab\geqslant 4$，为解题提供了极有用的转化条件.

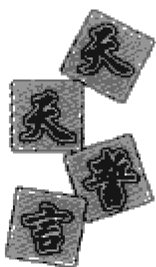
在应用柯西不等式时，因式的巧分，合理地添项、折项，灵活地变换结构等都是常用技巧.

根据不等式的几何意义，利用数形结合的思想，也是证明不等式的常用方法，第九章中已作介绍，在此就不赘述.

实战秘修十一

1. $a\in\mathbf{R}$，证明 $3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$.
2. 证明：$\sin x+\cos y\leqslant 1+\sin x\cos y$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$.
3. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b=c$. 证明：$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$.
4. 证明：$a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$，其中 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$.
5. 已知 $0<x<1,0<a\neq 1$. 证明：$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.
6. 证明：$\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
7. 设 a,b,c 为非负实数，证明：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.
8. (1)已知 $a+b=1$，证明：$a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$；

   (2)若 $a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$，且 $abcd=1$，
   证明：$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant 10$.



9. 已知 $a>2$,证明:$\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)<1$.

10. 若 $a,b\in\mathbf{R}_+$,$a+b=1$,证明:$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$.

11. 若 a,b,c 是不全相等的正数,证明:

$$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c.$$

12. 证明:$a^2+b^2+c^2+4\geqslant ab+3b+2c$.

13. 设 $a>b>c>0$,则 $a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

14. 设 a,b,c 为△ABC 的三边,证明:$(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$.

15. 设 $2x+5y=20$,证明:$\lg x+\lg y\leqslant 1$.

16. 设 a,b,c 为不相等的正数,且 $abc=1$. 证明:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

17. 已知 a,b 非负,$n\in\mathbf{N}$,证明:$(a+b)^n\leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)$.

18. 已知 n 是大于 1 的自然数,证明:$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

19. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$,对任意正数 a 都有 $x-a<y$,证明:$x\leqslant y$.

20. 用三角代换证明下列各题:

(1)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,且 $a^2+b^2=c^2$. 证明:$a^n+b^n<c^n$ $(n\in\mathbf{N},n>2)$;

(2)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a^2+b^2\leqslant 1$. 证明:$|a^2+2ab-b^2|\leqslant\sqrt{2}$;

(3)已知 x,y,a,b 均为实数,且 $x^2+y^2=1$,$a^2+b^2=1$. 证明:$|ax+by|\leqslant 1$.

21. 设数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=a_n^2-na_n+1$,$n=1,2,3,\cdots$

(1)当 $a_1=2$ 时,求 a_2,a_3,a_4,并由此猜想出 a_n 的一个通项公式;

(2)当 $a_1\geqslant 3$ 时,证明对所有的 $n\geqslant 1$ 有:

①$a_n\geqslant n+2$;②$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leqslant\frac{1}{2}$.

22. 设正数 x_1,x_2,x_3,x_4 满足$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\frac{1}{1+x_4}=1$,

证明:$x_1x_2x_3x_4\geqslant 81$.

23. 设 $x,t\in\mathbf{R}$,证明:$\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant\frac{x^2+x\sin t+1}{x^2+x\cos t+1}\leqslant\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$.

24. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,且 $a+b+c=1$. 证明:

$$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2+(c+\frac{1}{c})^2\geqslant\frac{100}{3}.$$

25. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}_+$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 证明:

$$\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\frac{1}{n-1}.$$

26. 对于一切大于 1 的自然数 n,证明:

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{2n-1})>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}.$$

27. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可导，导函数 $f'(x)$ 是减函数，且 $f'(x)>0$. 设 $x_0\in(0,+\infty)$，$y=kx+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程，并设函数 $g(x)=kx+m$.

(1)用 x_0、$f(x_0)$、$f'(x_0)$ 表示 m；

(2)证明：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)\geqslant f(x)$；

(3)若关于 x 的不等式 $x^2+1\geqslant ax+b\geqslant\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，其中 a,b 为实数，求 b 的取值范围及 a 与 b 所满足的关系.

实战秘修十一答案与提示

1. (作差) $3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2=2a^4-2a^3-2a+2$

$=2[a^3(a-1)-(a-1)]=2(a-1)(a^3-1)=2(a-1)^2(a^2+a+1)$

$=2(a-1)^2[(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]\geqslant0$.

2. (作差) $\sin x+\cos y-1-\sin x\cos y=\sin x(1-\cos y)-(1-\cos y)$

$=(1-\cos y)(\sin x-1)\leqslant0$.

3. $\frac{左}{右}=(\frac{a}{c})^{\frac{2}{3}}+(\frac{b}{c})^{\frac{2}{3}}>\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$. 注意：$\frac{a}{c},\frac{b}{c}\in(0,1)$.

4. $\frac{左}{右}=(\frac{a}{c})^{\frac{a-b}{2}}$，分 $a>b>0$ 与 $b>a>0$ 讨论.

5. 可用作差法分 $0<a<1$ 或 $a>1$ 两种情况进行讨论. 当 $0<a<1$ 时，

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$

$=\log_a(1-x^2)>0$；当 $a>1$ 时，

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$

$=-\log_a(1-x^2)>0$.

6. 左$-$右$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\geqslant0$.

7. $\because a^2+b^2\geqslant2ab$ $\quad\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$ $\quad\therefore\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$

同理 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$，三式相加即可.

8. (1) $\frac{a^4+b^4}{2}\geqslant(\frac{a^2+b^2}{2})^2\geqslant[(\frac{a+b}{2})^2]^2=\frac{1}{16}$.

(2) $(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\geqslant2(ab+cd)=2(ab+\frac{1}{ab})\geqslant2\cdot2=4$.

又 $ab+cd\geqslant2$，$ac+bd\geqslant2$，$ad+bc\geqslant2$，

诸式两边分别相加即得.（也可用其他方法证.）

9. $\because \log_a(a\pm1)>0$，且 $\log_a(a-1)\neq\log_a(a+1)$

$\therefore \sqrt{\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)}<\frac{1}{2}[\log_a(a-1)+\log_a(a+1)]$

$=\frac{1}{2}\log_a(a^2-1)<\frac{1}{2}\log_a a^2=1.$

10. 由基本不等式，

$\frac{1}{2}[(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2]\geqslant[\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})]^2$

$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{ab})^2$

又 $1=(a+b)^2\geqslant(2\sqrt{ab})^2=4ab\Rightarrow\frac{1}{ab}\geqslant4$，代入上式即得.

11. 原不等式$\Leftarrow\lg(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2})>\lg(abc)$

$\Leftarrow\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc.$

应用$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，注意 a,b,c 不全相等，可证.

12. 原不等式$\Leftarrow(a^2-ab+\frac{b^2}{4})+(\frac{3}{4}b^2-3b+3)+(c^2-2c+1)\geqslant0$

$\Leftarrow(a-\frac{b}{2})^2+3(\frac{b}{2}-1)^2+(c-1)^2\geqslant0.$

13. 原不等式$\Leftarrow a^{3a}b^{3b}c^{3c}>(abc)^{a+b+c}$

$\Leftarrow a^{2a-b-c}b^{2b-a-c}c^{2c-a-b}>1$

$\Leftarrow(\frac{a}{b})^{a-b}(\frac{b}{c})^{b-c}(\frac{a}{c})^{a-c}>1$，再证此式成立即可.

14. 原不等式$\Leftarrow a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca<0$

$\Leftarrow(a^2-ab-ac)+(b^2-ab-bc)+(c^2-bc-ca)<0$

$\Leftarrow a(a-b-c)+b(b-a-c)+c(c-b-a)<0$，

依两边之和大于第三边可证.

15. 依 $x,y\in\mathbf{R}_+$，有$\frac{2x+5y}{2}\geqslant\sqrt{10xy}$，即 $10\geqslant\sqrt{10xy}$，两边取常用对数得.

16. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$>\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ca}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}=\sqrt{\frac{abc}{bc}}+\sqrt{\frac{abc}{ca}}+\sqrt{\frac{abc}{ab}}$

$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$

17. $n=1$ 时命题成立.假设 $n=k$ 时命题成立.当 $n=k+1$ 时,

$(a+b)^{k+1}-2^k(a^{k+1}+b^{k+1})=(a+b)^k(a+b)-2^k(a^{k+1}+b^{k+1})$

$\leqslant 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)-2^k(a^{k+1}+b^{k+1})$

$=-2^{k-1}(a-b)(a^k-b^k)\leqslant 0.$

18. 设 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}=S_n$,易证当 $n=2$ 时命题成立.假设 $n=k$ 时命题正确,

即 $\frac{k}{2}<S_k<k$,则

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

$$\leqslant S_k+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^k\text{个}}$$

$$=S_k+2^k\cdot\frac{1}{2^k}=S_k+1<k+1$$

又 $$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

$$>S_k+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=S_k+2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=S_k+\frac{1}{2}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$$

$\therefore\frac{k+1}{2}<S_{k+1}<k+1$,即 $n=k+1$ 时命题也正确.

19. (反证法)假设 $x>y$,记 $x-y=2m>0$,于是 $x-m=y+m$.令 $a=m$,得 $x-a=y+a>y$,与条件 $x-a<y$ 相矛盾.

20. (1)令 $a=c\sin\alpha,b=c\cos\alpha$($\alpha$ 为锐角),

$\therefore a^n+b^n=c^n(\sin^n\alpha+\cos^n\alpha)<c^n(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=c^n$.

(2)令 $a=t\sin\theta,b=t\cos\theta$,其中 $|t|\leqslant 1$.

原不等式转化为 $\sqrt{2}t^2\left|\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})\right|\leqslant\sqrt{2}$.

(3)令 $a=\sin\alpha,b=\cos\alpha,x=\sin\beta,y=\cos\beta$

$\therefore|ax+by|=|\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta|=|\cos(\alpha-\beta)|\leqslant 1$.

21. (1)由 $a_1=2$ 得,$a_2={a_1}^2-a_1+1=3$,

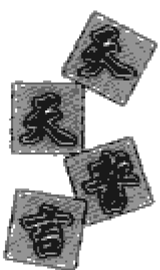
由 $a_2=3$ 得 $a_3={a_2}^2-2a_2+1=4$,

由 $a_3=4$ 得 $a_4={a_3}^2-3a_3+1=5$,

由此,猜想 a_n 的一个通项公式为 $a_n=n+1(n\geqslant 1)$.

(2)①用数学归纳法证明如下:

当 $n=1$ 时,$a_1\geqslant 3=1+2$ 不等式成立.



假设当 $n=k$ 时不等式成立，即 $a_k\geqslant k+2$，那么

$a_{k+1}=a_k(a_k-k)+1\geqslant(k+2)(k+2-k)+1\geqslant k+3$，

也就是说，当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}\geqslant(k+1)+2$.

综上述知对于所有 $n\geqslant1$，$a_n\geqslant n+2$ 总成立.

②由 $a_{n+1}=a_n(a_n-n)+1$ 及 $a_n\geqslant n+2$ 可知对 $k\geqslant2$ 有

$$a_k=a_{k-1}(a_{k-1}-k+1)+1\geqslant a_{k-1}(k-1+2-k+1)+1$$
$$=2a_{k-1}+1\geqslant\cdots$$

$\therefore a_k\geqslant2^{k-1}a_1+2^{k-2}+\cdots+2+1=2^{k-1}(a_1+1)-1$

$\therefore \dfrac{1}{1+a_k}\leqslant\dfrac{1}{1+a_1}\cdot\dfrac{1}{2^{k-1}}(k\geqslant2)$

$\therefore \dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\cdots+\dfrac{1}{1+a_n}$

$\leqslant\dfrac{1}{a+a_1}+\dfrac{1}{1+a_1}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=\dfrac{1}{1+a_1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=\dfrac{2}{1+a_1}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

$<\dfrac{2}{1+a_1}\leqslant\dfrac{2}{1+3}=\dfrac{1}{2}$.

∴原不等式成立.

22. 令 $a=\dfrac{1}{1+x_1}$，$b=\dfrac{1}{1+x_2}$，$c=\dfrac{1}{1+x_3}$，$d=\dfrac{1}{1+x_4}$，则 $a+b+c+d=1$.

$x_1=\dfrac{1-a}{a}=\dfrac{b+c+d}{a}\geqslant\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{bcd}}{a}$，

同理，$x_2\geqslant\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{acd}}{b}$，$x_3\geqslant\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{abd}}{c}$，$x_4\geqslant\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{d}$，

四式相乘即得.

23. 令 $y=\dfrac{x^2+x\sin t+1}{x^2+x\cos t+1}$，则有

$(y-1)x^2+(y\cos t-\sin t)x+(y-1)=0$ (*)

若 $y=1$，即 $t=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 或 $x=0$ 时，原不等式成立.

若 $y\neq1$，由(*)的判别式得 $(y\cos t-\sin t)^2\geqslant4(y-1)^2$.

又 $|y\cos t-\sin t|=|\sqrt{y^2+1}\cos(t+\varphi)|\geqslant\sqrt{y^2+1}$

$\therefore y^2+1\geqslant(y\cos t-\sin t)^2\geqslant4(y-1)^2$

解 $y^2+1\geqslant4(y-1)^2$，得 $\dfrac{1}{3}(4-\sqrt{7})\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{3}(4+\sqrt{7})$.

24. (用向量法)构造向量：$\boldsymbol{a}=(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b},c+\frac{1}{c})$，$\boldsymbol{b}=(1,1,1)$

$$\therefore|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}^2=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right]\cdot(1+1+1)$$

$$=3\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right]$$

$$\therefore|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\right]^2$$

$$=\left[1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]^2$$

$$\because\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant3\ \sqrt[3]{abc}\cdot3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$$

$\therefore|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2\geqslant(1+9)^2=100$

又$|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\leqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2$

$$\therefore3\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right]\geqslant100$$

即$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant\frac{100}{3}$.

25. $\left(\frac{x_1^{\ 2}}{1-x_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^{\ 2}}{1-x_n}\right)\cdot(n-1)$

$$=\left(\frac{x_1^{\ 2}}{1-x_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^{\ 2}}{1-x_n}\right)[(1-x_1)+(1-x_2)+\cdots+(1-x_n)]$$

$$\geqslant\left[\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}\cdot\sqrt{1-x_1}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}\cdot\sqrt{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\cdot\sqrt{1-x_n}\right]^2$$

$=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2=1$.

26. (用数学归纳法证明)其中当 $n=k+1$ 时，则

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{2k+2}{2\ \sqrt{2k+1}}$$

$\because4k^2+8k+4>4k^2+8k+3$

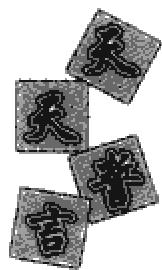
$\therefore(2k+2)^2>(2k+1)(2k+3)$

即得$\frac{2k+2}{2\ \sqrt{2k+1}}>\frac{\sqrt{2k+3}}{2}=\frac{\sqrt{2(k+1)+1}}{2}$.

27. (1)$m=f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

(2)令 $h(x)=g(x)-f(x)$，则 $h'(x)=f'(x_0)-f'(x)$，故 $h'(x_0)=0$.

因为 $f'(x)$递减，所以 $h'(x)$递增. 因此，当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$；当$x<x_0$时，$h'(x)<0$. 所以 x_0 是 $h(x)$唯一的极值点，且是极小值点，可知 $h(x)$的最小值为 0，



因此 $h(x)\geqslant 0$ 即 $g(x)\geqslant f(x)$.

(3)由 $x^2+1\geqslant ax+b\geqslant \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 可看出 $0\leqslant b\leqslant 1$. $a>0$ 是不等式成立的必要条件.

讨论以此条件为前提.

$x^2+1\geqslant ax+b$ 即 $x^2-ax+(1-b)\geqslant 0$,对任意 $x\in[0,+\infty)$ 成立的充要条件是 $\Delta\leqslant 0$ 即 $a\leqslant 2(1-b)^{\frac{1}{2}}$.

另一方面,由于 $f(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 满足前述题设中关于函数 $y=f(x)$ 的条件,利用(2)的结果可知,$ax+b\geqslant\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的充要条件是:过点 $(0,b)$ 与曲线 $y=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 相切的直线的斜率不大于 a.

设过点 $(0,b)$ 的直线与曲线 $y=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 切于点 $P(x_0,y_0)$,则 $y_0=\frac{3}{2}x_0^{\frac{2}{3}}$. 即点 P 坐标为 $(x_0,\frac{3}{2}x_0^{\frac{2}{3}})$.

因为点 P 处切线的斜率为 $k=\left(\frac{3}{2}x_0^{\frac{2}{3}}\right)'=x_0^{-\frac{1}{3}}$,则有

$$\frac{\frac{3}{2}x_0^{\frac{2}{3}}-b}{x_0-0}=x_0^{-\frac{1}{3}}$$

$\therefore x_0=(2b)^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore k=x_0^{-\frac{1}{3}}=(2b)^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore$ 该切线的方程为 $y=(2b)^{-\frac{1}{2}}x+b$.

于是 $ax+b\geqslant\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的充要条件是 $a\geqslant(2b)^{-\frac{1}{2}}$.

综上,不等式 $x^2+1\geqslant ax+b\geqslant\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 成立的充要条件是

$$(2b)^{-\frac{1}{2}}\leqslant a\leqslant 2(1-b)^{\frac{1}{2}} \qquad ①$$

显然存在 a,b 使①成立的充要条件是:不等式

$$(2b)^{-\frac{1}{2}}\leqslant 2(1-b)^{\frac{1}{2}} \qquad ②$$

有解,解不等式②得

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4}\leqslant b\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{4} \qquad ③$$

因此,③式即为 b 的取值范围,①式即为实数 a 与 b 所满足的关系.

第十二章 归纳与递推　良谋揭开看

归纳与递推是论证与自然数 n 有关的命题的一种常用的数学方法，应用范围极广，在高考和各级竞赛中都占有重要的地位.

本章主要论述数学归纳法的常用技巧及其应注意的问题、不完全归纳法与完全归纳法、递推数列及递推方法的应用.

一、数学归纳法的常用技巧

解题秘言：中学阶段我们主要应掌握第一数学归纳法.完成数学归纳法，两个基本步骤缺一不可，而其中容易陷入困境的多是由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的递推，走出此困境的常用技巧和方法有：

1. **注意"跨度"式**

例 1　证明：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1\quad(n\in\mathbf{N}^*)$.

【证明】　(1)当 $n=1$ 时，

左边$=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}=\frac{6+4+3}{12}=\frac{13}{12}>1$，

不等式成立.

(2)假设 $n=k$ 时，原不等式成立，即$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\frac{1}{3k+1}>1$.

则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)+1}$$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}\right)+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3(k+1)}$$

$$+\frac{1}{3(k+1)+1}-\frac{1}{k+1}$$

$$>1+\left[\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3(k+1)}\right]$$

$$=1+\frac{6k+6}{9k^2+18k+8}-\frac{6(k+1)}{3^2(k+1)^2}$$

$$=1+\frac{6(k+1)}{9k^2+18k+8}-\frac{6(k+1)}{9k^2+18k+9}>1$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

根据(1)(2)可知原不等式成立.

【解后感言】 这里从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，不是只添了一项，而是增添了 $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3(k+1)}+\frac{1}{3(k+1)+1}$ 三项，我们称其为"跨度式"，在证明过程的第一步就应注意这个"跨度式"，否则极易出错.

例2 当 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$ 时，证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

【证明】 (1)当 $n=2$ 时，左边 $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}<2$，不等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时不等式成立，即

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}<k$.

则 $n=k+1$ 时

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

$$<k+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}}_{2^k\text{项}}$$

$$<k+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^k\text{项}}=k+1$$

故当 $n=k+1$ 时不等式也成立.

所以对 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$，原不等式成立.

【解后感言】 这里从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时增加了 2^k 项，而不是简单地两边加 $\frac{1}{2^{k+1}-1}$. 此外，适当的放缩也是关键的一步.

2. 正确运用"假设"步

递推结论是建立在归纳假设的基础上的，因此不用归纳假设而证明第二步的方法，实际上不是数学归纳法.

值得强调的是，在应用数学归纳法时，要防止出现一种似是而非的"形式伪证"，如下面的例子.

例3 用数学归纳法证明：

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$　($n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$).

有人是这样证明的：

(1)当 $n=2$ 时，$1+\frac{1}{2^2}<2-\frac{1}{2}$，不等式成立.

(2)假设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k} \quad (*)$$

则当 $n=k+1$ 时，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$<1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2-\frac{1}{k+1}$$

即，此时原不等式也成立.

故，当 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant2$ 时，原不等式成立.

【思路探索】 上面的证明第一步是正确的，对 $n=k+1$ 使用放缩法证明命题成立也无错可言. 问题在于使用数学归纳法证明问题时，在推证 $n=k+1$ 命题成立时，一定要使用 $n=k$ 时的归纳假设的条件. 上面的证明根本没有使用归纳假设的(*)式，其实质并不是数学归纳法，所以其证法是错误的.

正确的证明应为：

【证明】 (1)当 $n=2$ 时，$1+\frac{1}{2^2}<2-\frac{1}{2}$，不等式成立.

(2)假设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k} \quad (*)$$

当 $n=k+1$ 时，将(*)式两端同加上 $\frac{1}{(k+1)^2}$，得

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$$

$$<2-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=2-\frac{1}{k+1}$$

即，当 $n=k+1$ 时，原不等式也成立.

此时方能称原不等式成立.

3. **添项减项**

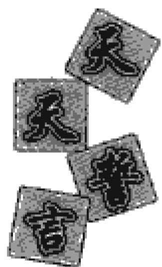
例 4 设 $a\in\mathbf{N}^*$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$a^{n+2}+(a+1)^{2n+1}$ 能被 a^2+a+1 整除.

【证明】 (1)当 $n=1$ 时，

$a^3+(a+1)^3=[a+(a+1)][a^2-a(a+1)+(a+1)^2]$

$=(2a+1)(a^2+a+1)$，

∴结论成立.



(2)假设当 $n=k$ 时,结论成立,即 $a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}$ 能被 a^2+a+1 整除,那么,当 $n=k+1$ 时

$$a^{(k+1)+2}+(a+1)^{2(k+1)+1}=a\cdot a^{k+2}+(a+1)^2(a+1)^{2k+1}$$

$$=a[a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}]+(a+1)^2(a+1)^{2k+1}-a(a+1)^{2k+1}$$

$$=a[a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}]+(a^2+a+1)(a+1)^{2k+1}$$

因为 $a^{k+2}+(a+1)^{2k+1}$,a^2+a+1 均能被 a^2+a+1 整除,又 $a\in\mathbf{N}^*$,

故 $a^{(k+1)+2}+(a+1)^{2(k+1)+1}$ 能被 a^2+a+1 整除;即当 $n=k+1$ 时结论成立.

由(1)(2)知,原结论成立.

【解后感言】 涉及整除问题,常利用提取公因式凑成假设、凑出整除式等方法,其中等价变换技巧性很强.这里通过"添项减项"来完成第二步的证明.

4. **裂项凑项**

例5 设 $n\in\mathbf{N}$,证明:$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

【证明】 (1)当 $n=1$ 时,显然等式成立.

(2)设 $n=k$ 时等式成立,即有

$$C_k^1+2C_k^2+3C_k^3+\cdots+kC_k^k=k\cdot 2^{k-1}$$

当 $n=k+1$ 时,应用组合数性质公式,有

$$C_{k+1}^1+2C_{k+1}^2+\cdots+kC_{k+1}^k+(k+1)C_{k+1}^{k+1}$$

$$=(C_k^0+C_k^1)+2(C_k^1+C_k^2)+\cdots+k(C_k^{k-1}+C_k^k)+(k+1)C_k^k$$

$$=(C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^k)+2(C_k^1+2C_k^2+3C_k^3+\cdots+kC_k^k)$$

$$=2^k+2\cdot k\cdot 2^{k-1}=(k+1)2^{(k+1)-1}$$

即当 $n=k+1$ 时,等式成立.

故由(1)(2)知,$n\in\mathbf{N}$ 时原等式成立.

【解后感言】 这里是利用组合公式 $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$ 来裂项,在整理书写过程中又瞄准 $n=k+1$ 时的目标式来"凑项",注意体会这种变形方法.

5. **增多起点**

例6 证明:当 $n\geqslant 1(n\in\mathbf{N}^*)$时,

$$(1+2+\cdots+n)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geqslant n^2.$$

【证明】 (1)当 $n=1$ 时,左边=右边,命题成立.

当 $n=2$ 时,左边$=(1+2)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}>2^2$ 命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 2)$时,命题成立,即

$$(1+2+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\geqslant k^2.$$

则当 $n=k+1$ 时有

$$\text{左边}=[(1+2+\cdots+k)+(k+1)]\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}\right]$$

$$=(1+2+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+(1+2+\cdots+k)\frac{1}{k+1}+$$

$$(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+1$$

$$\geqslant k^2+\frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{1}{k+1}+1+(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

$$=k^2+\frac{k}{2}+1+(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

∵当 $k\geqslant 2$ 时，$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\geqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (＊)

∴左边 $\geqslant k^2+\frac{k}{2}+1+(k+1)\times\frac{3}{2}=k^2+2k+1+\frac{3}{2}>(k+1)^2$

这就是说当 $n=k+1$ 时，命题成立.

由(1)(2)知：当 $n\geqslant 1$ 时，原命题成立.

【解后感言】 因为(＊)式当 $k\geqslant 2$ 时才成立，故起点只证 $n=1$ 时还不够. 因此我们需注意命题的递推关系式中起点位置的推移.

有时为了书写的简略或证明的需要，而适当对最初命题的验证增加起点，以适应第二步归纳证明的过渡，这也是一种重要手段.

6. **适时作差**

例 7 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，且满足：$a_0=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n)$，$n\in\mathbf{N}$. 证明：$a_n<a_{n+1}<2, n\in\mathbf{N}$.

【证明】 (1)当 $n=1$ 时，$a_0=1, a_1=\frac{1}{2}a_0(4-a_0)=\frac{3}{2}$.

∴$a_0<a_1<2$，命题正确.

(2)假设 $n=k$ 时有 $a_{k-1}<a_k<2$，则 $n=k+1$ 时

$$a_k-a_{k+1}=\frac{1}{2}a_{k-1}(4-a_{k-1})-\frac{1}{2}a_k(4-a_k)$$

$$=2(a_{k-1}-a_k)-\frac{1}{2}(a_{k-1}-a_k)(a_{k-1}+a_k)$$

$$=\frac{1}{2}(a_{k-1}-a_k)(4-a_{k-1}-a_k)$$

而 $a_{k-1}-a_k<0, 4-a_{k-1}-a_k>0$ ∴$a_k-a_{k-1}<0$

又 $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k(4-a_k)=\frac{1}{2}[4-(a_k-2)^2]<2$

$\therefore n=k+1$ 时命题正确.

由(1)(2)可知,$n\in \mathbf{N}$ 时有 $a_n<a_{n+1}<2$.

例 8 证明:当 $n\in \mathbf{N}$ 时,$(3n+1)\cdot 7^n-1$ 能被 9 整除.

【证明】 (1)当 $n=1$ 时,$(3+1)\cdot 7-1=27$ 命题成立.

(2)令 $f(n)=(3n+1)7^n-1$.

设 $n=k$ 时命题成立,即 $f(k)=(3k+1)7^k-1$ 能被 9 整除.

当 $n=k+1$ 时,

$\because f(k+1)-f(k)=(3k+4)7^{k+1}-(3k+1)7^k$

$=7^k(21k+28-3k-1)=7^k\cdot 9(2k+3)$

$\therefore 9\mid[f(k+1)-f(k)]$

$\because 9\mid f(k)$

$\therefore 9\mid f(k+1)$,即当 $n=k+1$ 时命题成立.

故对 $n\in \mathbf{N}$,$(3n+1)\cdot 7^n-1$ 都能被 9 整除.

【解后感言】 对某些命题的第二步证明不易得手时,有时可以考虑将 $f(k+1)$ 与 $f(k)$ 作差.这种方法在证明不等式或整除问题中用得较多.

7. 以退求进

例 9 有 $2n+1(n\in \mathbf{N})$ 个飞机场,每个机场都有一架飞机,各个机场之间的距离互不相等.现让所有的飞机一齐起飞,飞向最近的机场降落.证明必存在一个机场没有飞机降落.

【证明】 当 $n=1$ 时,设 3 个机场为 A,B,C,其中 $BC<AB,BC<AC$,则 B,C 机场的飞机必定对飞,不管 A 机飞向 B 还是飞向 C,A 机场均没有飞机降落,即 $n=1$ 时命题成立.

现假设 $n=k$ 时命题成立,当 $n=k+1$ 时,由于机场之间的距离互不相等,这 $2(k+1)+1$ 个机场中,必有两个机场之间的距离最小,这两处的飞机必然互相对飞,不会影响其他机场.我们将这两个机场"退出",由归纳假设知,剩下的 $2k+1$ 个机场中,存在一个机场没有飞机降落.再把"退出"的两个机场"放进",可知 $2(k+1)+1$ 个机场中,存在一个机场没有飞机降落,即当 $n=k+1$ 时命题成立.

故对于 $n\in \mathbf{N}$,原命题成立.

【解后感言】 这是当直接由 $P(k)$ 进到 $P(k+1)$ 有困难时,根据题设的条件,可由 $P(k+1)$ 退到 $P(k)$,再由归纳假设 $P(k)$ 为真进到 $P(k+1)$.这就是"以退求进"的一种技巧.

二、不完全归纳法与完全归纳法

解题秘言:不完全归纳法是以有限数量的事实为基础而得出一般性的结论的归纳推理.如

引例1 考察自然数集中前n个奇数的和:

$1=1^2$

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

……

由此可归纳得出前n个奇数之和为n^2.

引例2 考察$f(n)=n^2+n+11$的值:

$f(1)=1^2+1+11=13$

$f(2)=2^2+2+11=17$

$f(3)=3^2+3+11=23$

$f(4)=4^2+4+11=31$

$f(5)=5^2+5+11=41$

……

由此归纳出$f(n)$的值一定是质数.

由于不完全归纳法是将局部的结论推广于全体,所得出的结论不一定是正确的,如引例2中$f(10)=10^2+10+11=121=11^2$就不是质数,因此其结论是错误的.

虽然不完全归纳法的结论有时不一定可靠,但它仍不失为一种重要的推理方法.为弥补其不足,应对所得出的结论予以严密的论证,这即我们通常所说的:归纳——猜想——证明.

例1 (2008年重庆高考理·T22)设各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{2}}a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)若$a_2=\dfrac{1}{4}$,求a_3,a_4,并猜想a_{2008}的值(不需证明);

(2)记$b_n=a_1a_2\cdots a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,若$b_n\geqslant2\sqrt{2}$对$n\geqslant2$恒成立.求$a_2$的值及数列$\{b_n\}$的通项公式.

【规范解析】 (1)因 $a_1=2,a_2=2^{-2}$，

故 $a_3=a_1a_2^{-\frac{3}{2}}=2^4$，$a_4=a_2a_3^{-\frac{3}{2}}=2^{-8}$，

由此有 $a_1=2^{(-2)0}$，$a_2=2^{(-2)1}$，

$a_3=2^{(-2)2}$，$a_4=2(-2)^3$，

故猜想 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2^{(-2)n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

从而 $a_{2008}=2^{(-2)2007}$.

(2)令 $x_n=\log_2 a_n$，S_n 表示 x_n 的前 n 项和，

则 $b_n=2_n^S$，

由题设知 $x_1=1$，且 $x_n=\frac{3}{2}x_{n+1}+x_{n+2}(x\in\mathbf{N}^*)$ ①

$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant\frac{3}{2}(x\geqslant 2)$ ②

因②式对 $n=2$ 成立，有 $\frac{3}{2}\leqslant x_1+x_2$，

又 $x_1=1$ 得 $x_2\geqslant\frac{1}{2}$ ③

下面反证法明：$x_2\leqslant\frac{1}{2}$，假设 $x_2>\frac{1}{2}$，

由①得 $x_{n+2}+2x_{n+1}=\left(x_{n+2}+\frac{3}{2}x_{n+1}\right)+\frac{1}{2}x_{n+1}$

$$=\frac{1}{2}(x_{n+1}+2x_n).$$

因此数列 $\{x_{n+1}+2x_n\}$ 是首项为 x_2+2，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，故 $x_{n+1}+2x_n=(x_2+2)\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$ ④

又由①知 $x_{n+2}-\frac{1}{2}x_{n+1}=\left(x_n-\frac{3}{2}x_{n+1}\right)-\frac{1}{2}x_{n+1}$

$$=-2\left(x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n\right).$$

因此 $\{x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n\}$ 是首项为 $x_2-\frac{1}{2}$，公比为 -2 的等比数列，所以

$x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n=\left(x_2-\frac{1}{2}\right)(-2)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$ ⑤

由④－⑤得

$\frac{5}{2}x_n=(x_2+2)\frac{1}{2^{n-1}}-\left(x_2-\frac{1}{2}\right)(-2)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$ ⑥

对 n 求和得

$$\frac{5}{2}S_n=(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\frac{1-(-2)^n}{3}(n\in\mathbf{N}^*) \quad ⑦$$

由题设知 $S_{2k+1}\geqslant\frac{3}{2}$，且由反证假设 $x_2>\frac{1}{2}$ 有

$$(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{2k}}\right)-\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\frac{2^{2k+1}+1}{3}\geqslant\frac{15}{4}(k\in\mathbf{N}^*).$$

从而 $\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2^{2k+1}+1}{3}\leqslant(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{2k}}\right)-\frac{15}{4}<2x_2+\frac{1}{4}(k\in\mathbf{N}^*)$.

即不等式 $2^{2k+1}<\dfrac{6x_2+\frac{3}{4}}{x_2-\frac{1}{2}}-1$.

对 $k\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，但这是不可能的，矛盾.

因此 $x_2\leqslant\frac{1}{2}$，结合③式知 $x_2=\frac{1}{2}$，因此 $a_2=2^{x_2}=\sqrt{2}$.

将 $x_2=\frac{1}{2}$ 代入⑦式得 $S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $b_n=2^{S_n}=2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

例2 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，是否存在 n 的整式 $g(n)$，使得等式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=g(n)(a_n-1)$ 对大于1的一切自然数 n 都成立？证明你的结论.

【解】 假设 $g(n)$ 存在.

当 $n=2$ 时，由 $a_1=g(2)(a_2-1)$ 即

$$1=g(2)\left(1+\frac{1}{2}-1\right),$$

解得 $g(2)=2$.

当 $n=3$ 时，由 $a_1+a_2=g(3)(a_3-1)$ 即

$$1+1+\frac{1}{2}=g(3)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1\right),$$

解得 $g(3)=3$.

当 $n=4$ 时，由 $a_1+a_2+a_3=g(4)(a_4-1)$，即

$$1+1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=g(4)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-1\right),$$

解得 $g(4)=4$.

由此猜想 $g(n)=n(n\geqslant2)$. 下面用数学归纳法证明：

(1)当 $n=2$ 时，$a_1=1, g(2)(a_2-1)=2\times\frac{1}{2}=1$，结论成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时结论成立，即

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}=k(a_k-1)$

则当 $n=k+1$ 时

$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k=k(a_k-1)+a_k$

$=(k+1)a_k-k=(k+1)a_k-(k+1)+1$

$=(k+1)\left(a_k+\frac{1}{k+1}-1\right)=(k+1)(a_{k+1}-1)$

这说明当 $n=k+1$ 时，结论也成立.

由(1)(2)知对一切大于1的自然数 n，存在 $g(n)=n$ 使等式 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=g(n)(a_n-1)$ 恒成立.

【解后感言】 例1属归纳型问题，例2属存在型问题，我们常用"归纳、猜想、证明"的方法来解决与自然数有关的归纳型和存在型问题. 对于这类问题，由于结论未正面给出，故需经过一番仔细观察、分析、归纳，猜测出合理的结论然后予以证明.

例3 自然状态下的鱼类是一种可再生的资源，为持续利用这一资源，需从宏观上考察其再生能力及捕捞强度对鱼群总量的影响. 用 x_n 表示某鱼群在第 n 年年初的总量，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $x_1>0$. 不考虑其他因素，设在第 n 年内鱼群的繁殖量及被捕捞量都与 x_n 成正比，死亡量与 x_n^2 成正比，这些比例系数依次为正常数 a,b,c.

(Ⅰ)求 x_{n+1} 与 x_n 的关系式；

(Ⅱ)猜测：当且仅当 x_1,a,b,c 满足什么条件时，每年年初鱼群的总量保持不变？(不要求证明)

(Ⅲ)设 $a=2,c=1$，为保证对任意 $x_1\in(0,2)$，都有 $x_n>0,n\in\mathbf{N}^*$，则捕捞强度 b 的最大允许值是多少？证明你的结论.

【解】 (Ⅰ)从第 n 年初到第 $n+1$ 年初，鱼群的繁殖量为 ax_n，被捕捞量为 bx_n，死亡量为 cx_n^2，因此

$$x_{n+1}-x_n=ax_n-bx_n-cx_n^2, n\in\mathbf{N}^* \quad (*)$$

$$\text{即 } x_{n+1}=x_n(a-b+1-cx_n), n\in\mathbf{N}^* \quad (**)$$

(Ⅱ)若每年年初鱼群总量保持不变，则 x_n 恒等于 $x_1(n\in\mathbf{N}^*)$，从而(*)式 $x_n(a-b-cx_n)$ 恒等于0，所以 $a-b-cx_1=0$，即 $x_1=\frac{a-b}{c}$.

因为 $x_1>0$，所以 $a>b$.

猜测：当且仅当 $a>b$ 且 $x_1=\frac{a-b}{c}$ 时，每年年初鱼群的总量保持不变.

(Ⅲ)若b的值使得$x_n>0,n\in\mathbf{N}^*$,由$x_{n+1}=x_n(3-b-x_n),n\in\mathbf{N}^*$,知$0<x_n<3-b$.特别地有$0<x_1<3-b$,即$0<b<3-x_1$.而$x_1\in(0,2)$,所以$b\in(0,1]$.由此猜测$b$的最大允许值是1.

下面证明当$x_1\in(0,2),b=1$时都有$x_n\in(0,2),n\in\mathbf{N}^*$:

(1)当$n=1$时,结论显然成立.

(2)假设当$n=k$时结论成立,即$x_k\in(0,2)$.

则当$n=k+1$时,$x_{k+1}=x_k(2-x_k)>0$.

又因为$x_{k+1}=x_k(2-x_k)=-(x_k-1)^2+1\leqslant1<2$,

所以$x_{k+1}\in(0,2)$.

故当$n=k+1$时结论也成立.

由(1)(2)可知,对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,都有$x_n\in(0,2)$.

综上所述,为保证对任意$x_1\in(0,2)$都有$x_n>0,n\in\mathbf{N}^*$,则捕捞强度b的最大允许值是1.

【解后感言】 本题充分体现了前面所说的“归纳——猜想——证明”的解题思想方法.

三、递推数列

解题秘言:一般地,若数列$\{a_n\}$的连续若干项之间满足递推关系

$a_n=f(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k})$,

由这个递推关系及k个初始值确定的数列,叫做递推数列.

等差数列满足$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$,是二阶线性递推数列;等比数列满足$a_{n+1}=qa_n$,是一阶线性递推数列.

递推数列的热点问题首先是求通项.求递推数列通项的方法较多,也比较灵活,但就高考而言,我们主要应掌握其最常见的方法,将所给数列转化为等差数列或等比数列来解决问题.

例1 (2008年广东高考理·T21)设p,q为实数,α,β是方程$x^2-px+q=0$的两个实根.数列$\{x_n\}$满足$x_1=p,x_2=p^2-q,x_n=px_{n-1}-q^x_{n-2}(n=3,4,\cdots)$.

(1)证明:$\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$;

(2)求数列$\{x_n\}$的通项公式;

(3)若$p=1,q=\frac{1}{4}$,求$\{x_n\}$的前n项和S_n.

【解析】（Ⅰ）由于 α,β 为方程 $x^2-px+q=0$ 的根，则 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-px+q\Rightarrow\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）有 $\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$.

从而 $x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$ 可写成

$x_n=(\alpha+\beta)x_{n-1}-\alpha\beta x_{n-2}(n=3,4\cdots)$.

$\therefore x_n-ax_{n-1}=\beta(x_{n-1}-ax_{n-2})(n=3,4\cdots)$.

令 $y_n=x_n-ax_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，则有

$y_2=x_2-\alpha x_1=p^2-q-\alpha\beta=\beta^2$,

$y_n=\beta y_{n-1}=\beta^2y_{n-2}=\cdots=\beta^{n-2}y_2=\beta^n(n\geqslant3)$.

故当 $n\geqslant3$ 时，$x_n=\alpha x_{n-1}+y_n=\alpha x_{n-1}+\beta^n$

$=\alpha(\alpha x_{n-2}+\beta^{n-1})+\beta^n=\beta^n=a^2x_{n-2}+(\alpha\beta^{n-1}+\beta^n)$

$=\cdots\cdots$

$=\alpha^{n-2}x_2+(\alpha^{n-3}\beta^3+\alpha^{n-4}\beta^4+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n)$.

而 $x_1=\alpha+\beta,x_2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$,

所以当 $n\geqslant3$ 时，$x_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-1}\beta^2+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$.

故对 $n\geqslant1$ 都有 $x_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$.

故 $x_n=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}，当 \alpha\neq\beta 时，\\(n+1)\beta^n，当 \alpha=\beta 时，\end{cases}$

（Ⅲ）若 $p=1,q=\dfrac{1}{4}$，则 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$,

这时 $x_n=(n+1)\beta^n=\dfrac{n+1}{2^n}$.

其前 n 项和为

$S_n=2\beta^1+3\beta^2+\cdots+(n+1)\beta^n$

$=1\cdot\beta^0+2\beta^1+3\beta^2+\cdots+(n+1)\beta^n-1\cdot\beta^0$,

且 $S_n-\beta S_n=\beta^0+\beta^1+\beta^2+\cdots+\beta^n-(n+1)\beta^{n+1}-\beta^0(1-\beta)$

$=\dfrac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}-(n+1)\beta^{n+1}-\beta^0(1-\beta)$.

$\because\beta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow1-\beta=\dfrac{1}{2}$,

故 $S_n=2\left[\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{2}}-(n+1)\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{2}\right]=3-\dfrac{n+3}{2^n}$

【解后感言】 一般地，若递推关系式 $aa_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=0$ 可等价地改写成 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 或 $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ 两种形式，则 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 以及 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ 都成等比数列，分别求出通项后再联立解出 a_n 即可. 这里 α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个不等实根.

也可用下法求 a_n：

设 α,β 是递归关系 $aa_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=0$ 的特征方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根.

(1) 当 $\alpha\neq\beta$ 时，$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$；

(2) 当 $\alpha=\beta$ 时，$a_n=(An+B)\alpha^n$.

其中常数 A,B 由初始值用待定系数法决定.

例2 (2008年安徽高考文·T21)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a,a_{n+1}=ca_n+1-c$，$n\in\mathbf{N}^*$，其中 a,c 实数，且 $c\neq0$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $a=\frac{1}{2},c=\frac{1}{2},b_n=n(1-a_n),n\in\mathbf{N}^*$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(3)若 $0<a_n<1$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，证明 $0<c\leqslant1$.

【解】 (1)方法一：$\because a_{n+1}-1=c(a_n-1)$，

$\therefore$ 当 $a\neq1$ 时，$\{a_n-1\}$ 是首项为 $a-1$，公比为 c 的等比数列.

$\therefore a_n-1=(a-1)c^{n-1}$，即 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1$.

当 $a=1$ 时，$a_n=1$ 仍满足上式.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

方法二：由题设得：$n\geqslant2$ 时，$a_n-1=c(a_{n-1}-1)=c^2(a_{n-2}-1)=\cdots=c^{n-1}(a_1-1)=(a-1)c^{n-1}$.

$\therefore a_n=(a-1)c^{n-1}+1$.

$n=1$ 时，$a_1=a$ 也满足上式.

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)得 $b_n=n(1-a)c^{n-1}=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\therefore\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

天天箴言

$\therefore S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\therefore S=2-(2+n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(3)证明：由(1)知 $a_n=(a-1)c^{n-1}+1$.

若 $0<(a-1)c^{n-1}+1<1$，则 $0<(1-a)c^{n-1}<1$.

$\because 0<a_1=a<1$，$\therefore 0<c^{n-1}<\frac{1}{1-a}(n\in\mathbf{N}^*)$.

由 $c^{n-1}>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，知 $c>0$.

下证 $c\leqslant1$. 用反证法.

方法一：假设 $c>1$. 由函数 $f(x)=c^x$ 的函数图象知，当 n 趋于无穷大时，c^{n-1} 趋于无穷大.

$\therefore c^{n-1}<\frac{1}{1-a}$不能对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，导致矛盾.

$\therefore c\leqslant1$，$\therefore 0<c\leqslant1$.

方法二：假设 $c>1$，$\because c^{n-1}<\frac{1}{1-a}$，$\log_c c^{n-1}<\log_c\frac{1}{1-a}$，

即 $n-1<\log_c\frac{1}{1-a}(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立.　　(＊)

$\because a,c$ 为常数，$\therefore$(＊)式对 $n\in\mathbf{N}^*$ 不能恒成立，导致矛盾.

$\therefore c\leqslant1$. $\therefore 0<c\leqslant1$.

【解后感言】 一般地，若递推关系式 $a_{n+1}=ca_n+d$(其中 c,d 为常数，且 $c\neq0$，$c\neq1$)可等价地改写成

$$a_{n+1}-\frac{d}{1-c}=c\left(a_n-\frac{d}{1-c}\right)\qquad(*)$$

则 $\left\{a_n-\frac{d}{1-c}\right\}$成等比数列. 实际上，这里的$\frac{d}{1-c}$是方程 $x=cx+d$ 的根.

例3 (2008 年陕西高考理 · T22)已知数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=\frac{3}{5}$，$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，$n=1,2,\cdots$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：对任意的 $x>0$，$a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$，$n=1,2,\cdots$；

(3)证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{n^2}{n+1}$.

【规范解析】 (1)$\because a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$,

$\therefore \frac{1}{a_n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_n}$，$\therefore \frac{1}{a_n+1}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$.

又$\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}$,

$\therefore \{\frac{1}{a_n}-1\}$是以$\frac{2}{3}$为首项，$\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

$\therefore \frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{2}{3^n}$，$\therefore a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$.

(2)由(1)知 $a_n=\frac{3^n}{3^n+2}>0$,

$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$

$=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3n}+1-1-x\right)$

$=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{1}{a_n}-(1+x)\right]$

$=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$

$=-\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{1+x}=-\frac{1}{a_n}\left(\frac{1}{1+x}-a_n\right)^2+a_n\leqslant a_n$,

$\therefore$原不等式成立.

(3)由(2)知，对任意的 $x>0$，有

$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3}-x\right)+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^2}-x\right)+\cdots+$

$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3^n}-x\right)$

$=\frac{n}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}-nx\right)$.

$\therefore$取 $x=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{3}\right)}$

$=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$,

则 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant\dfrac{n}{1+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)}$

$=\dfrac{n^2}{n+1-\frac{1}{3^n}}>\dfrac{n^2}{n+1}$. ∴原不等式成立.

小结：上述几种是常见的题型，有其固定解法. 下面是可化为上述三种题型的特殊数列问题：

(1)$a_{n+1}=ba_n^a(b>0,a_n>0)$

取对数有 $\lg a_{n+1}=a\lg a_n+\lg b$，可化为例 2 点评中的(＊)式；

(2)$a_{n+1}=\dfrac{aa_n}{ba_n+c}(a\neq0)$

取倒数有$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{b}{a}$，可化为例 3 点评中的(＊)式；

(3)$a_{n+1}=aa_n+b^n(b\neq0)$

两边同除以 b^{n+1}，有$\dfrac{a_{n+1}}{b^{n+1}}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a_n}{b^n}+\dfrac{1}{b}$.

令 $x_n=\dfrac{a_n}{b^n}$，则有 $x_{n+1}=\dfrac{a}{b}x_n+\dfrac{1}{b}$，从而可化为例 2 点评中的(＊)式.

四、递推方法的应用

解题秘言：通过建立递推关系来解决问题的方法，我们称之为递推方法，它也是解决与自然数 n 有关的问题的利器.

例 1 已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有实根 x_1,x_2，设 $p=x_1^{2007}+x_2^{2007}$，$q=x_1^{2008}+x_2^{2008}$，$r=x_1^{2009}+x_1^{2009}$.

试求 $ar+bq+cp$ 的值.

【思路探索】 这里的 p,q,r 与自然数 n 相关，不妨设 $a_n=x_1^n+x_2^n$，探求出其递推关系式再看.

【解】 设 $a_n=x_1^n+x_2^n$ (＊)

依 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根 x_1,x_2 知

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

则$-\dfrac{b}{a}a_n=(x_1+x_2)(x_1^n+x_2^n)$

$=x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+x_1x_2(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})$

$=a_{n+1}+\dfrac{c}{a}a_{n-1}$.

即 $a\cdot a_{n+1}+b\cdot a_n+c\cdot a_{n-1}=0$.

在(*)式中取 $n=2008$,则 $a\cdot a_{2009}+b\cdot a_{2008}+c\cdot a_{2007}=0$.

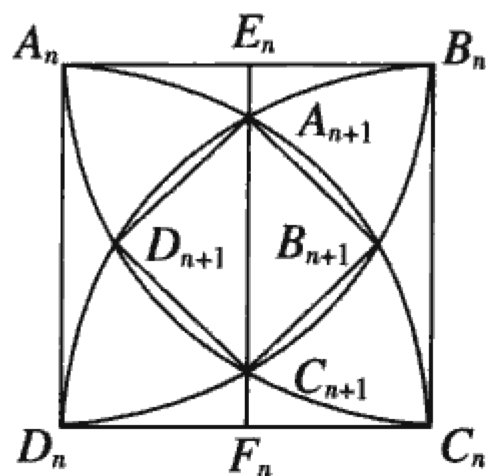
即 $ar+bq+cp=0$.

【解后感言】 这里设出通项后,实际是回构递归关系式.同时也可以看出前述例2点评中的特征方程的来历.

例2 设正方形 $ABCD$ 边长为 a,以各顶点为圆心、边长为半径在正方形内画弧,得四边形 $A_1B_1C_1D_1$.仿此作图得四边形 $A_2B_2C_2D_2$,$A_3B_3C_3D_3$,…,求所有这些四边形面积的和.

【解】 由作图可知,所有四边形 $A_iB_iC_iD_i(i=1,2,3,\cdots)$ 均系正方形,其面积分别为 $S_i(i=1,2,3,\cdots)$.

如右图所示,设第 n 个正方形 $A_nB_nC_nD_n$ 的边长为 a_n,E_n,F_n 分别为边 A_nB_n 和 C_nD_n 的中点.



易证$\triangle D_nA_{n+1}C_n$ 为等边三角形,且 A_{n+1},C_{n+1} 在 E_nF_n 上.

$\therefore |A_{n+1}F_n|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n$.

又 $|A_{n+1}C_{n+1}|=\sqrt{2}a_{n+1}$

依 $|A_{n+1}F_n|+|C_{n+1}E_n|-|A_{n+1}C_{n+1}|=|E_nF_n|=a_n$

得 $\sqrt{3}a_n-\sqrt{2}a_{n+1}=a_n$

即得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2=2-\sqrt{3}$

故 $\{S_i\}$ 是以 a^2 为首项,$2-\sqrt{3}$ 为公比的无穷递缩等比数列,所有这些正方形的面积之和

$$S=\frac{a^2}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2.$$

【解后感言】 对代数、几何等实际问题一种方法是直接剖析 a_n 与 a_{n+1} 之间的关系导出递推关系式,若用这种方法不能得手时,则采用从 $a_1\to a_2\to a_3\to\cdots\to a_n$ 探求出递推关系式.

实战秘修十二

1. 证明：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}$.

2. 证明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

3. 证明：当 n 为正奇数时 x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除.

4. 若 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$1^2+2^2+\cdots+n^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{n(2n^2+1)}{3}$.

5. 证明：$6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ 是 11 的倍数.

6. 设数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=a_n^2-na_n+1$，$n=1,2,3,\cdots$

(1)当 $a_1=2$ 时，求 a_2,a_3,a_4，并由此猜想出 a_n 的一个通项公式；

(2)当 $a_1\geqslant 3$ 时，证明对所有的 $n\geqslant 1$ 有：

①$a_n\geqslant n+2$；②$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leqslant\frac{1}{2}$.

7. 设 a_0 为常数，且 $a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}$(n 为正整数).

(1)证明对任意 $n\geqslant 1$，$a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\times 2^n]+(-1)^n\times 2^n a_0$；

(2)假设对任意 $n\geqslant 1$，有 $a_n>a_{n-1}$，求 a_0 的取值范围.

8. 证明对任意 n 个复数，都有：

$\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot\cdots\cdot\gamma_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$

$=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$

9. 探求，具有形如 $N=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}1}\underbrace{222\cdots2}_{n\text{个}2}5$($n\in\mathbf{N}^*$)的数是否为完全平方数？你能证明吗？

10. 问平面上 n 个圆最多能将平面分成多少个区域.

11. 已知 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，记 $f_n(x)=\underbrace{f[f\cdots f(x)]}_{n\text{个}f}$，求 $f_n(x)$.

12. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且 $3a_{n+1}=2a_n-3$. 求通项 a_n.

13. 设 m 为非零实常数，数列$\{a_n\}$满足$(n+1)a_{n+1}-(m+n)a_n+ma_{n-1}=0$($n\in\mathbf{N}^*$)，且 $a_0=1$，$a_1=m$，求 a_n.

14. 正四面体棱长为 a，以各个面的中心为顶点作内接正四面体，如此连续下去，求所有正四面体表面积之和.

15. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$，求 a_n

16. 某城市 2007 年末汽车保有量为 30 万辆，预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%，并且每年新增汽车数量相同. 为了保护城市环境，要求该城市汽车保有量不超过 60 万辆，那么每年新增汽车数量不应超过多少万辆？

实战秘修十二答案与提示

1. (1)当 $n=1$ 时,左边$=1$,右边$=\frac{1}{2}$,左边>右边,不等式成立.

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时不等式成立,即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}>\frac{k}{2}$.

当 $n=k+1$ 时,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{项}}>\frac{k}{2}+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{k+1}{2}.$$

$\therefore n=k+1$ 时,不等式也成立.

由(1)(2)可知:$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$

2. (1)当 $n=1$ 时,左边$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,右边$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$,等式成立.

(2)假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}$$

$$=\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

$$=\frac{1}{(k+1)+1}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

根据(1),(2)知,对于 $n\in\mathbf{N}$,等式成立.

3. (1)显然,当 $n=1$ 时,命题成立.

(2)假设当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N})$时命题成立,即$(x+y)\mid(x^{2k-1}+y^{2k-1})$

则当 $n=2k+1$ 时,

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=x^2x^{2k-1}+x^2y^{2k-1}-x^2y^{2k-1}+y^2y^{2k-1}$$

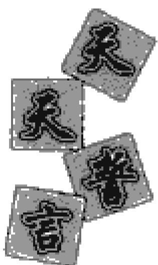
$$=x^2(x^{2k-1}+y^{2k-1})-(x+y)(x-y)y^{2k-1}$$

$\because(x+y)\mid(x^{2k-1}+y^{2k-1})$　　又$(x+y)\mid(x+y)(x-y)y^{2k-1}$

$\therefore(x+y)\mid(x^{2k-1}+y^{2k-1})$

即,当 $n=2k+1$ 时,命题成立.

由(1),(2)知,对所有的正奇数,x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除.



4. (1)当 $n=1$ 时,原式左边为 $1^2=1$,原式右边 $=\frac{2\times1+1}{3}=1$,所以原式成立.

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,原式成立,即有

$1^2+2^2+\cdots+k^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{k(2k^2+1)}{3}$.

当 $n=k+1$ 时,两边同时加上 $k^2+(k+1)^2$ 有

$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2+k^2+\cdots+2^2+1^2$

$=\frac{k(2k^2+1)}{3}+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{3}[2k^3+k+3(k+1)^2+3k^2]$

$=\frac{1}{3}[k(2k+1)(k+1)+3(k+1)^2]=\frac{1}{3}(k+1)[2(k+1)^2+1]$

于是当 $n=k+1$ 时,原式也成立.

由(1)(2)可知,当 $n\in\mathbf{N}^*$,原式都成立.

5. (1)当 $n=1$ 时,$6^{2\times1}+3^{1+2}+3^1=66$ 是 11 的倍数.

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,命题成立,即 $6^{2k}+3^{k+2}+3^k$ 是 11 的倍数.则当 $n=k+1$ 时,

$6^{2(k+1)}+3^{k+3}+3^{k+1}=6^{2k+2}+3^{k+3}+3^{k+1}$

$=36\cdot6^{2k}+3\cdot3^{k+2}+3\cdot3^k$

$=33\cdot6^{2k}+3\cdot6^{2k}+3\cdot3^{k+2}+3\cdot3^k$

$=33\cdot6^{2k}+3(6^{2k}+3^{k+2}+3^k)$.

由假设可知 $3(6^{2k}+3^{2k+2}+3^k)$ 是 11 的倍数,而 $33\cdot6^{2k}$ 也是 11 的倍数,

即 $n=k+1$ 时,原命题正确.

由(1)(2)可知,原命题成立.

6. (1)由 $a_1=2$ 得 $a_2=a_1{}^2-a_1+1=3$,由 $a_2=3$ 得 $a_3=a_2{}^2-2a_2+1=4$,

由 $a_3=4$ 得 $a_4=a_3{}^2-3a_3+1=5$.

由此猜想 a_n 的一个通项公式:$a_n=n+1(n\geqslant1)$

(2)①用数学归纳法证明:

(a)当 $n=1$ 时,$a_1\geqslant3=1+2$ 不等式成立.

(b)假设当 $n=k$ 时不等式成立,即 $a_k\geqslant k+2$,那么

$a_{k+1}=a_k(a_k-k)+1\geqslant(k+2)(k+2-k)+1\geqslant k+3$,

即当 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}\geqslant(k+1)+2$.

根据(a)(b),对所有 $n\geqslant1$,有 $a_n\geqslant n+2$.

②由 $a_{n+1}=a_n(a_n-n)+1$ 及①,对 $k\geqslant2$ 有

$a_k=a_{k-1}(a_{k-1}-k+1)+1\geqslant a_{k-1}(k-1+2-k+1)+1$

$=2a_{k-1}+1$, …

$\therefore a_k\geqslant2^{k-1}a_1+2^{k-2}+\cdots+2+1=2^{k-1}(a_1+1)-1$



于是$\frac{1}{1+a_k}\leqslant\frac{1}{1+a_1}\cdot\frac{1}{2^{k-1}},k\geqslant 2$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\leqslant\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{1+a_1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\leqslant\frac{2}{1+a_1}\leqslant\frac{2}{1+3}=\frac{1}{2}.$$

7. (1)(a)当 $n=1$ 时，由已知 $a_1=1-2a_0$，等式成立.

(b)假设当 $n=k(k\geqslant 1)$时等式成立，即

$$a_k=\frac{1}{5}[3^k+(-1)^{k-1}\times 2^k]+(-1)^k\times 2^k a_0$$

那么 $a_{k+1}=3^k-2a_k$

$$=3^k-\frac{2}{5}[3^k+(-1)^{k-1}\times 2^k]-(-1)^k 2^{k+1}a_0$$

$$=\frac{1}{5}[3^{k+1}+(-1)^k 2^{k+1}]+(-1)^{k+1}2^{k+1}a_0$$

也就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据(a)(b)可知等式对任何正整数 n 都成立.

(2)由 a_n 通项公式可求得

$$a_n-a_{n-1}=\frac{2\times 3^{n-1}+(-1)^{n-1}\times 3\times 2^{n-1}}{5}+(-1)^n\times 3\times 2^{n-1}a_0$$

知 $a_n>a_{n-1}$(n 为正整数)等价于

$$(-1)^{n-1}(5a_0-1)<(\frac{3}{2})^{n-2}(n\text{ 为正整数})\qquad ①$$

(a)当 $n=2k-1,k=1,2,\cdots$时，①式即为

$$(-1)^{2k-2}(5a_0-1)<\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3}$$

即 $a_0<\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-3}+\frac{1}{5}$ ②

②式对 $k=1,2\cdots\cdots$

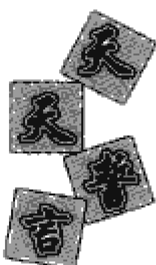
都成立，则有

$a_0<\frac{1}{5}(\frac{3}{2})^{-1}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}.$

(b)当 $n=2k,k=1,2,\cdots$时，①式即为

$(-1)^{2k-1}(5a_0-1)<\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2}$

即 $a_0>-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{2k-2}+\frac{1}{5}$ ③



③式对 $k=1,2\cdots$ 都成立，有

$$a_0>-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^0+\frac{1}{5}=0$$

综合(a)(b)，①式对任意正整数 n 都成立，则有 $0<a_0<\frac{1}{3}$，故 a_0 的取值范围为 $(0,\frac{1}{3})$.

8. (1)当 $n=1$ 时，等式显然成立.

当 $n=2$ 时，有

$$\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\gamma_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=\gamma_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2]$$
$$=\gamma_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

即 $n=2$ 时，等式也成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant3)$，等式成立.

即

$$\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\cdots\cdot\gamma_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$$
$$=\gamma_1\cdot\cdots\cdot\gamma_k[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_k)+i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_k)]$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\gamma_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\cdots\cdot\gamma_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)\cdot\gamma_{k+1}(\cos\theta_{k+1}i\sin\theta_{k+1})$$
$$=\gamma_1\cdot\cdots\cdot\gamma_k[\cos(\theta+\cdots+\theta_k)+i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_k)]\cdot\gamma_{k+1}(\cos\theta_{k+1}+i\sin\theta_{k+1})$$
$$=\gamma_1\cdot\cdots\cdot\gamma_k\gamma_{k+1}[\cos(\theta_1+\cdots+\theta_k+\theta_{k+1})+i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_k+\theta_{k+1})]$$

其中最后一步等式是由 $n=2$ 时等式成立所得.

所以当 $n=k+1$ 时等式也成立.

综合(1)(2)知，对一切自然数 n，等式都成立.

9. $25=5^2=\left(\frac{10^1+5}{3}\right)^2$

$1225=35^2\left(\frac{10^2+5}{3}\right)^2$

$112225=335^2=\left(\frac{10^3+5}{3}\right)^3$

$11122225=3335^2$

$=\left(\frac{10^4+5}{3}\right)^2$

……

猜想 $\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}1}\underbrace{222\cdots2}_{n\text{个}2}5=\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{个}3}5^2=\left(\frac{10^n+5}{3}\right)^2$ （*）



下面的任务就是证明了.

$N=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个1}\underbrace{222\cdots2}_{n个2}5$

$=10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+10^{n+1}+2(10^n+10^{n-1}+\cdots+10)+5$

$=10^n\cdot\frac{10}{9}(10^{n-1}-1)+2\cdot\frac{10}{9}(10^n-1)+5$

$=\frac{1}{9}(10^{2n}+10^{n+1}+25)$

$=\frac{1}{9}(10^n+5)^2=\left(\frac{10^n+5}{3}\right)^2$

∴(*)式成立.

∵10^n+5 的各位数字之和为 6　　∴$3|(10^n+5)$

故 N 为一完全平方数.

10. 1 个圆将平面分成两个区域即 $a_1=2$.

2 个圆最多能将平面分成 4 个区域,即 $a_2=4$.

画图知,3 个圆最多能将平面分成 8 个区域,即 $a_3=8$.

4 个圆最多能将平面分成 14 个区域,即 $a_{14}=14$.

……

∴$a_2-a_1=2=2\times1,a_3-a_2=4=2\times2$,

$a_4-a_3=6=2\times3,a_5-a_4=8=2\times4$,

……

$a_n-a_{n-1}=2\times(n-1)$.

以上各式相加即得

$a_n-a_1=2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=\frac{(n-1)\cdot n}{2}\times2$

∴$a_n=n^2-n+2$

故平面上 n 个圆最多能将平面分成 n^2-n+2 个区域.

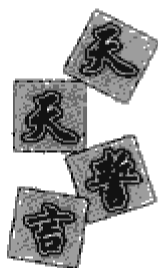
11. $f_2(x)=f[f(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},f_3(x)=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$,

猜想:$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.下面用数学归纳法证明.

当 $n=1,2,3$ 时等式成立.

假设当 $n=k$ 时,等式成立,即 $f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$.

则当 $n=k+1$ 时,



$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}}=\sqrt{\frac{x}{1+(k+1)x^2}}$$

即 $n=k+1$ 时等式也成立.

综上可知对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$均成立.

12.【解】 由题设有 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-1$ ①

设 $a_{n+1}+c=\frac{2}{3}(a_n+c)$ ②

比较①,②得 $c=3$

由②得 $a_{n+1}+3=\frac{3}{2}(a_n+3)$

故数列$\{a_n+3\}$是等比数列.

又已知 $a_1=2$,则 $a_1+3=5$,公比为$\frac{2}{3}$.

$\therefore a_n+3=(a_1+3)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

13. 易求 $a_2=\frac{m^2}{2}$，$a_3=\frac{m^3}{6}$，$a_4=\frac{m^4}{24}$. 猜想：$a_n=\frac{m^n}{n!}(n=0,1,2,\cdots,n)$

注意：若只求出 a_2，a_3，则易误认为：$a_n=\frac{m^n}{(n-1)n}(n=2,3,\cdots,n)$

这里说明适当增加枚举数可以提高猜想的置信度. 用数学归纳法证明略.

14. 记 $A_1B_1=a$，$A_nB_n=a_n$，可得 $A_{n+1}B_{n+1}=\frac{1}{3}A_nB_n$

即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}$，$\frac{S_{n+1}}{S_n}=(\frac{1}{3})^2$.

故$\{S_n\}$为无穷递缩等比数列,其表面积之和为 $S_n=\frac{\sqrt{3}a^2}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9\sqrt{3}}{8}a^2$.

15.【解】 $\because a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n\Leftrightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$，

$\therefore\{a_{n+1}-a_n\}$成等比数列.

故 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)3^{n-1}=3^{n-1}$ ①

又$\because a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n\Leftrightarrow a_{n+2}-3a_{n+1}=(a_{n+1}-3a_n)$，

$\therefore\{a_{n+1}-3a_n\}$成等比数列.

故 $a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)\cdot 1^{n-1}=-1$ ②

由①②两式得：$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)\quad(n\in\mathbf{N})$

16. 设 2007 年末汽车保有量为 $a_1=30$ 万辆，以后每年末该城市汽车保有量依次为 a_2 万辆，a_3 万辆，…，a_n 万辆，…，再设每年新增汽车 x 万辆，则

$a_{n+1}=a_n(1-6\%)+x=\frac{47}{50}a_n+x$

令 $a_{n+1}+m=\frac{47}{50}(a_n+m)$，则 $a_{n+1}=\frac{47}{50}a_n-\frac{3m}{50}$.

比较系数得 $m=-\frac{50x}{3}$，代入 $a_{n+1}=\frac{47}{50}a_n-\frac{3m}{50}$ 得

$a_{n+1}-\frac{50x}{3}=\frac{47}{50}a_n-\left(\frac{50x}{3}\right)$.

由定义知，新数列 $\{a_n-\frac{50x}{3}\}$ 是公比 $q=\frac{47}{50}$，首项 $a_1-\frac{50x}{3}=30-\frac{50x}{3}$ 的等比数列，则

$$a_n-\frac{50x}{3}=\left(30-\frac{50x}{3}\right)\cdot\left(\frac{47}{50}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{50x}{3}+10\left(3-\frac{5x}{3}\right)\cdot\left(\frac{47}{50}\right)^{n-1}$$

(1)当 $3-\frac{5x}{3}\geqslant 0$ 即 $x\leqslant\frac{9}{5}$ 时，$30=a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}\cdots$ 故 $a_n\leqslant 60$ 恒成立.

(2)当 $3-\frac{5x}{3}<0$ 即 $x>\frac{9}{5}$ 时，$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$ 故此时使 $a_n\leqslant 60$ 恒成立的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{50x}{3}\leqslant 60$，即 $x\leqslant\frac{18}{5}=3.6$.

综上所述，可知每年新增汽车不应超过 3.6 万辆.



第十二章 空间角与空间距离的求法全透视

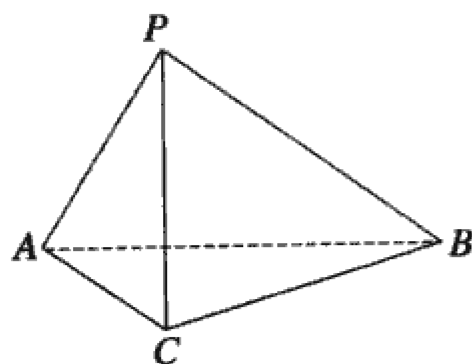
立体几何是高中学段的主要内容之一，而空间的线面关系又是立体几何的主要研究课题．在线面关系的研究中，一是关于线面的定性研究，如平行、异面、垂直等；二是关于线面的定量研究，如线线、线面、面面之间所成的角和距离．这类问题理所当然地成为高考的热点内容．

一、求空间角的常用方法

1．定义法

解题秘言：求空间角的大小，一般是根据相关角（如异面直线所成的角、直线和平面所成的角、二面角的平面角）的定义，把空间角转化为平面角来求解．

例 1　（2008 年北京高考理・T16）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC=2$，$\angle ACB=90^\circ$，$AP=BP=AB$，$PC\perp AC$．



（Ⅰ）求证：$PC\perp AB$；

（Ⅱ）求二面角 $B-AP-C$ 的大小；

（Ⅲ）求点 C 到平面 APB 的距离．

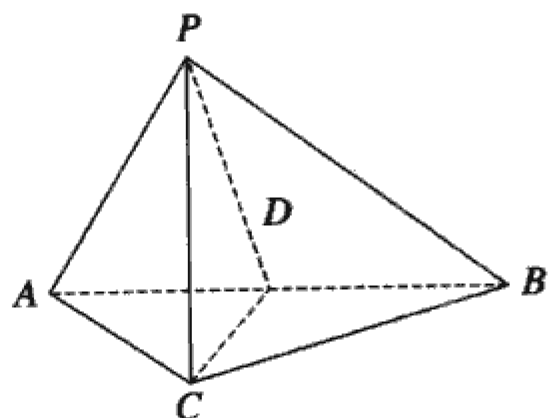
（Ⅰ）**证明**：取 AB 中点 D，连结 PD，CD．

$\because AP=BP$，$\therefore PD\perp AB$．

$\because AC=BC$，$\therefore CD\perp AB$．

$\because PD\cap CD=D$，$\therefore AB\perp$ 平面 PCD．

$\because PC\subset$ 平面 PCD，$\therefore PC\perp AB$．



（Ⅱ）$\because AC=BC$，$AP=BP$，

$\therefore\triangle APC\cong\triangle BPC$．

又 $PC\perp AC$，

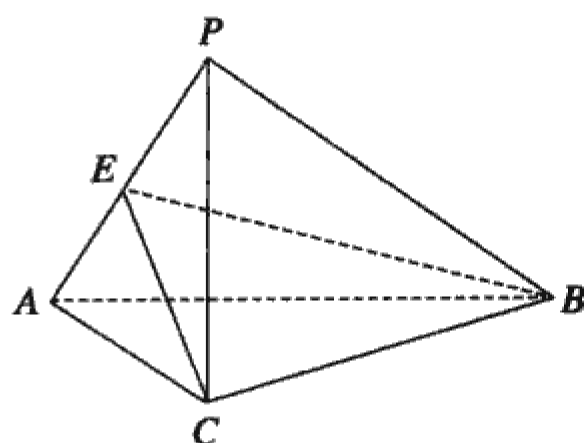
$\therefore PC\perp BC$．

又 $\angle ACB=90^\circ$，即 $AC\perp BC$，且 $AC\cap PC=C$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAC．

取 AP 中点 E．连结 BE，CE．

$\because AB=BP$，$\therefore BE\perp AP$．



∵EC是BE在平面PAC内的射影，

∴$CE\perp AP$.

∴$\angle BEC$是二面角$B-AP-C$的平面角.

在$\triangle BCE$中，$\angle BCE=90°$，$BC=2$，$BE=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB=\sqrt{6}$，．

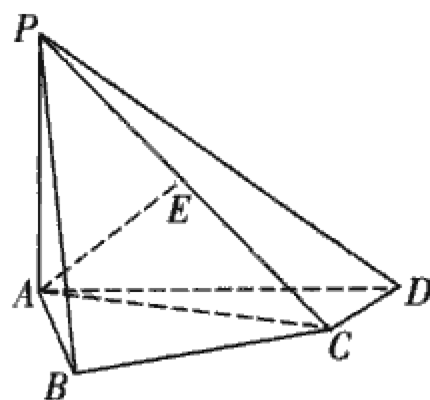
∴$\sin\angle BEC=\frac{BC}{BE}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

∴二面角$B-AP-C$的大小为$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅲ）略.

【解后感言】 求两平面所成二面角的大小，一般是先根据二面角的定义，作出二面角的平面角，然后在三角形中求解. 代数法也不失一般性.

例2 （2007年天津理文·T19）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AB\perp AD$，$AC\perp CD$，$\angle ABC=60°$，$PA=AB=BC$，E是PC的中点.



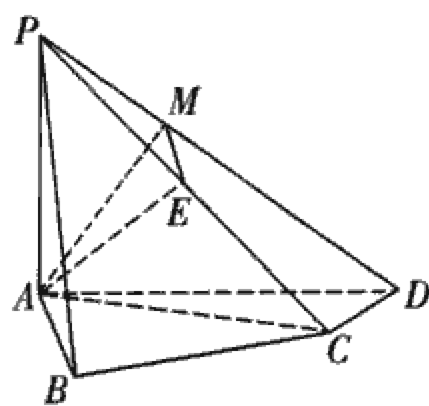
(1)求PB和平面PAD所成的角的大小；

(2)证明$AE\perp$平面PCD；

(3)求二面角$A-PD-C$的大小.

【规范解析】 (1)**【解】** 在四棱锥$P-ABCD$中，∵$PA\perp$底面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，故$PA\perp AB$.

又$AB\perp AD$，$PA\cap AD=A$，从而$AB\perp$平面PAD. 故PB在平面PAD内的射影为PA，从而$\angle APB$为PB和平面PAD所成的角.



在$Rt\triangle PAB$中，$AB=PA$，故$\angle APB=45°$.

∴PB和平面PAD所成的角的大小为$45°$.

(2)**【证明】** 在四棱锥$P-ABCD$中，

∵$PA\perp$底面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，故$CD\perp PA$.

由条件$CD\perp AC$，$PA\cap AC=A$，∴$CD\perp$平面PAC.

又$AE\subset$平面PAC，∴$AE\perp CD$.

由$PA=AB=BC$，$\angle ABC=60°$，可得$AC=PA$.

∵E是PC的中点，∴$AE\perp PC$.

又$PC\cap CD=C$，综上，得$AE\perp$平面PCD.

(3)**【解】** 过点E作$EM\perp PD$，垂足为M，连结AM. 由(2)知$AE\perp$平面PCD，AM在平面PCD内的射影是EM，则$AM\perp PD$.

因此$\angle AME$是二面角$A-PD-C$的平面角.

由已知,可得$\angle CAD=30°$.设$AC=a$,可得

$PA=a,AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}a,PD=\frac{\sqrt{21}}{3}a,AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$

在$Rt\triangle ADP$中,$\because AM\perp PD$,$\therefore AM\cdot PD=PA\cdot AD$.

则$AM=\frac{PA\cdot AD}{PD}=\frac{a\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}a}{\frac{\sqrt{21}}{3}a}=\frac{2\sqrt{7}}{7}a.$

在$Rt\triangle AEM$中,$\sin\angle AME=\frac{AE}{AM}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

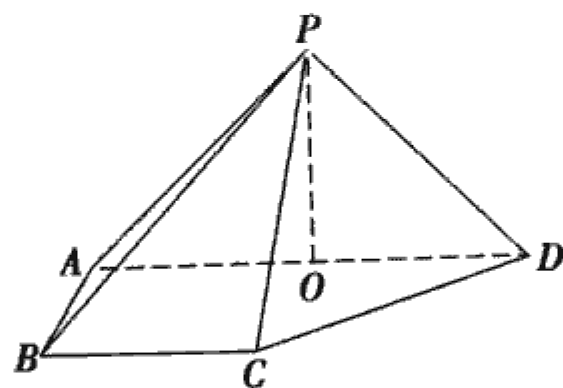
$\therefore$二面角$A-PD-C$的大小是$\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}$.

【解后感言】 求直线与平面所成的角的关键是抓射影,而由斜线上一点作平面的垂线时,需要确定垂足的位置,然后再将这个角放在三角形中利用三角形的边角关系求解.

2. 选点平移法

解题秘言:所谓“选点平移法”就是选择适当的点,通过作平行线,构造出所要求的空间角.至于点的选取何处适当,通常是视具体情况具体分析.

例3 (2008年福建高考理·T18)如图,在四棱锥$P-ABCD$中,侧面$PAD\perp$底面$ABCD$,侧棱$PA=PD=\sqrt{2}$,底面$ABCD$为直角梯形,其中$BC/\!/AD$,$AB\perp AD$,$AD=2AB=2BC=2$,O为AD中点.



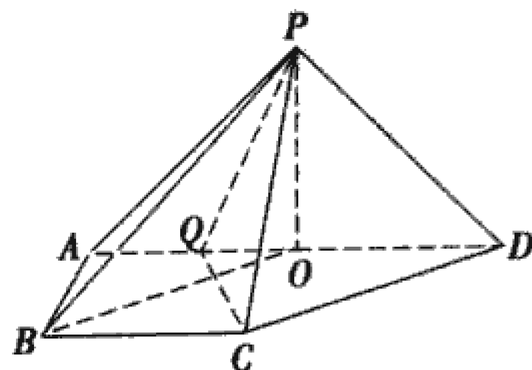
(Ⅰ)求证:$PO\perp$平面$ABCD$;

(Ⅱ)求异面直线PB与CD所成角的大小;

(Ⅲ)线段AD上是否存在点Q,使得它到平面PCD的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$?若存在,求出$\frac{AQ}{QD}$的值;若不存在,请说明理由.

【规范解析】 (Ⅰ)证明:在$\triangle PAD$中$PA=PD$,O为AD中点,所以$PO\perp AD$.

又侧面$PAD\perp$底面$ABCD$,平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$,$PO\subset$平面PAD,所以$PO\perp$平面$ABCD$.



(Ⅱ)连接BO,在直角梯形$ABCD$中,$BC/\!/AD$,$AD=2AB=2BC$,有$OD/\!/BC$且$OD=BC$,所以四边形$OBCD$是平行四边形,所以$OB/\!/DC$.

由(Ⅰ)知，$PO\perp OB$，$\angle PBO$为锐角，所以$\angle PBO$是异面直线PB与CD所成的角.

因为$AD=2AB=2BC=2$，在$Rt\triangle AOB$中，$AB=1$，$AO=1$，所以$OB=\sqrt{2}$，

在$Rt\triangle POA$中，因为$AP=\sqrt{2}$，$AO=1$，所以$OP=1$.

在$Rt\triangle PBO$中，$\tan\angle PBO=\dfrac{PO}{BO}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\angle PBO=\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以异面直线PB与CD所成的角是$\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅲ)假设存在点Q，使得它到平面PCD的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

设$QD=x$，则$S_{\triangle DQC}=\dfrac{1}{2}x$，由(Ⅱ)得$CD=OB=\sqrt{2}$，

在$Rt\triangle POC$中，$PC=\sqrt{OC^2+OP^2}=\sqrt{2}$.

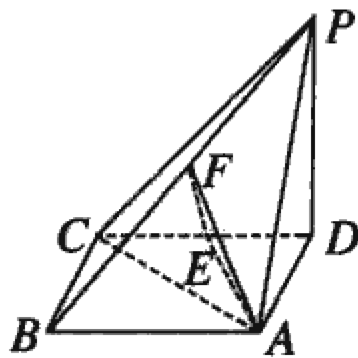
所以$PC=CD=DP$，$S_{\triangle PCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由$V_{P-DQC}=V_{Q-PCD}$，得$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}x\times 1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$x=\dfrac{3}{2}<2$.

所以存在点Q满足题意，此时$\dfrac{AQ}{QD}=\dfrac{1}{3}$.

【解后感言】 求异面直线所成的角，一般都是通过“选点平移”将异面直线所成的角转化为共面相交的两直线的夹角来完成，但要特别注意两条异面直线所成的角的范围是$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

例4 如图所示，四棱锥$P\text{-}ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PD\perp$底面$ABCD$，$AD=PD$，E，F分别为CD，PB的中点.



(Ⅰ)证明：$EF\perp$平面PAB；

(Ⅱ)设$AB=\sqrt{2}BC$，求AC与平面AEF所成的角的大小.

(Ⅰ)**【证明】** 如图，连结EP，EB.

$\because PD\perp$底面$ABCD$，DE在平面$ABCD$内，

$\therefore PD\perp DE$. 又$CE=ED$，$PD=AD=BC$，

$\therefore Rt\triangle BCE\cong Rt\triangle PDE$. $\therefore PE=BE$.

$\because F$为PB中点， $\therefore EF\perp PB$.

由三垂线定理得$PA\perp AB$，

$\therefore$在$Rt\triangle PAB$中，$PF=AF$，

又$\because PE=BE=EA$，

$\therefore \triangle EFP \cong \triangle EFA$， $\therefore EF \perp FA$.

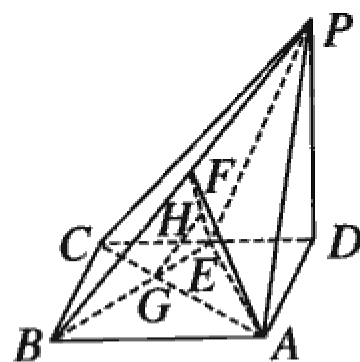
$\because PB, FA$ 为平面 PAB 内的相交直线，

$\therefore EF \perp$ 平面 PAB.

（Ⅱ）【解】 不妨设 $BC=1$，则

$AD=PD=1, AB=\sqrt{2}, PA=\sqrt{2}, AC=\sqrt{3}$.

$\therefore \triangle PAB$ 为等腰直角三角形，且 $PB=2$，F 为其斜边中点，$BF=1$，且 $AF \perp PB$.



$\because PB$ 与平面 AEF 内两条相交直线 EF, AF 都垂直，

$\therefore PB \perp$ 平面 AEF.

如图所示，设 BE 交 AC 于 G，作 $GH /\!/ BP$ 交 EF 于 H，则 $GH \perp$ 平面 AEF.

$\therefore \angle GAH$ 为 AC 与平面 AEF 所成的角.

由 $\triangle EGC \backsim \triangle BGA$，可知

$$EG=\frac{1}{2}GB, EG=\frac{1}{3}EB, AG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

由 $\triangle EGH \backsim \triangle EBF$，可知 $GH=\frac{1}{3}BF=\frac{1}{3}$.

$\therefore \sin\angle GAH=\frac{GH}{AG}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

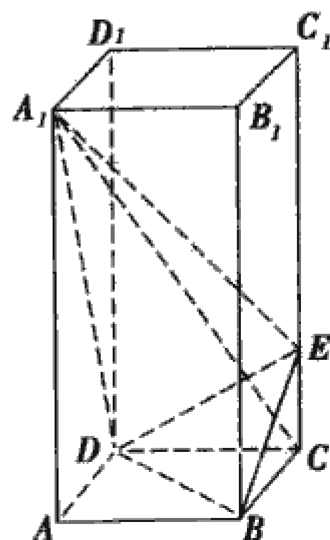
$\therefore AG$ 与平面 AEF 所成的角为 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$.

【解后感言】 这里选择点 G 作 $GH /\!/ BP$，得到 $\angle GAH$ 为 AC 与平面 AEF 所成的角，也是“选点平移法”的体现.

3. 垂线法

解题秘言：当已知条件中出现二面角中一个半平面内一点到另一个半平面的垂线时（或虽未给出这样的垂线，但由已知条件能够作出这样的垂线），可依据三垂线定理或其逆定理作出它的平面角，然后再求解.

例5 （2008年全国Ⅱ高考文・T20、理・T19）如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=4$，点 E 在 CC_1 上且 $C_1E=3EC$.



（1）证明：$A_1C \perp$ 平面 BED；

（2）求二面角 A_1-DE-B 的大小.

【规范解析】 依题设知 $AB=2, CE=1$.

（1）连结 AC 交 BD 于点 F，则 $BD \perp AC$.

由三垂线定理知，

$BD \perp A_1C$.

在平面 A_1CA 内，连结 EF 交 A_1C 于点 G，

由于 $\frac{AA_1}{FC}=\frac{AC}{CE}=2\sqrt{2}$

故 $Rt\triangle A_1AC \backsim Rt\triangle FCE$，$\angle AA_1C=\angle CFE$，$\angle CFE$ 与 $\angle FCA_1$ 互余．于是 $A_1C \perp EF$．A_1C 与平面 BED 内两条相交直线 BD、EF 都垂直，所以 $A_1C \perp$ 平面 BED.

(2)作 $GH \perp DE$，垂足为 H，连结 A_1H．由三垂线定理知 $A_1H \perp DE$，

故 $\angle A_1HG$ 是二面角 A_1-DE-B 的平面角．

$EF=\sqrt{CF^2+CE^2}=\sqrt{3}$，

$CG=\frac{CE \times CF}{EF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

$EG=\sqrt{CE^2-CG^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\frac{EG}{EF}=\frac{1}{3}$，$GH=\frac{1}{3}\times\frac{EF \times FD}{DE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

又 $A_1C=\sqrt{AA_1^2+AC^2}=2\sqrt{6}$，

$A_1G=A_1C-CG=\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

$\tan\angle A_1HG=\frac{A_1G}{HG}=5\sqrt{5}$.

所以二面角 A_1-DE-B 的大小为 $\arctan 5\sqrt{5}$.

【解后感言】 利用三垂线定理或其逆定理作二面角的平面角关键是找垂线，对有棱二面角通常应注意选取合适的点构造二面角的平面角．

例6 (2008年湖南高考理·T17)如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为1的菱形，$\angle BCD=60°$，E 是 CD 的中点，$PA \perp$ 底面 $ABCD$，$PA=2$.

(1)证明：平面 $PBE \perp$ 平面 PAB；

(2)求平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角(锐角)的大小．

【规范解析】 解法一：(1)如图所示，连结 BD，由 $ABCD$ 是菱形且 $\angle BCD=60°$ 知，$\triangle BCD$ 是等边三角形，

因为 E 是 CD 的中点，所以 $BE \perp CD$.

又 $AB /\!/ CD$，所以 $BE \perp AB$.

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，$BE \subset$ 平面 $ABCD$，

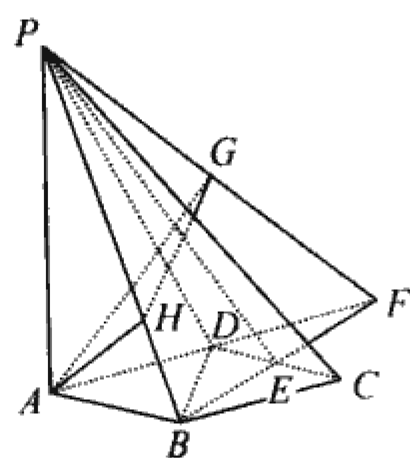
天天箐言

所以 $PA\perp BE$，而 $PA\cap AB=A$，

因此 $BE\perp$ 平面 PAB，

又 $BE\subset$ 平面 PBE，所以平面 $PBE\perp$ 平面 PAB.

(2)延长 AD、BE 相交于点 F，连结 PF，过点 A 作 $AH\perp PB$ 于 H，



由(1)知平面 $PBE\perp$ 平面 PAB，所以 $AH\perp$ 平面 PBE.

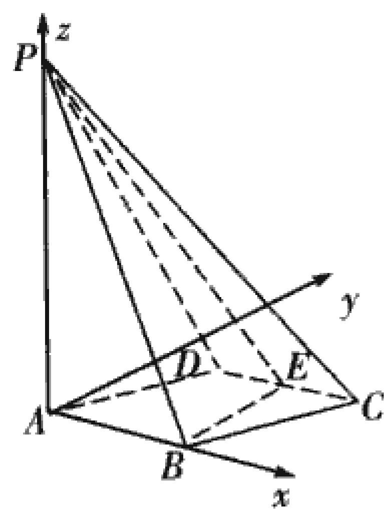
在 $Rt\triangle ABF$ 中，因为 $\angle BAF=60°$，

所以 $AF=2AB=2=AP$.

在等腰 $Rt\triangle PAF$ 中，取 PF 的中点 G，连结 AG，则 $AG\perp PF$，连结 HG，由三垂线定理的逆定理得 $PF\perp HG$.

所以 $\angle AGH$ 是平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角的平面角(锐角).

解法二：如图所示，以 A 为原点，建立空间直角坐标系，则相关各点的坐标分别是 $A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$，$C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$P(0,0,2)$，$E\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.



(Ⅰ)因为 $\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，平面 PAB 的一个法向量是 $n_0=(0,1,0)$ 所以 $\overrightarrow{BE}$ 和 n_0 共线，从而 $BE\perp$ 平面 PAB. 又因为 $BE\subset$ 平面 PBE，故平面 $PBE\perp$ 平面 PAB.

(Ⅱ)易知 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PA}=(0,0,-2)$，$\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 PBE 的一个法向量，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+0\times y_1-2z_1=0,\\ 0\times x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+0\times z_1=0.\end{cases}$

所以 $y_1=0$，$x_1=2z_1$，故可取 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 PAD 的一个法向量，

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\times x_2+0\times y_2-2z_2=0,\\ \frac{1}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+0\times z_2=0,\end{cases}$

所以 $z_2=0$，$x_2=-\sqrt{3}y_2$，故可取 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},-1,0)$.

于是，$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角(锐角)的大小是 $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

在等腰 $Rt\triangle PAF$ 中，$AG=\frac{\sqrt{2}}{2}PA=\sqrt{2}$.

在 $Rt\triangle PAB$ 中，

$$AH=\frac{AP\cdot AB}{PB}=\frac{AP\cdot AB}{\sqrt{AP^2+AB^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

所以，在 $Rt\triangle AHG$ 中，

$$\sin\angle AGH=\frac{AH}{AG}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

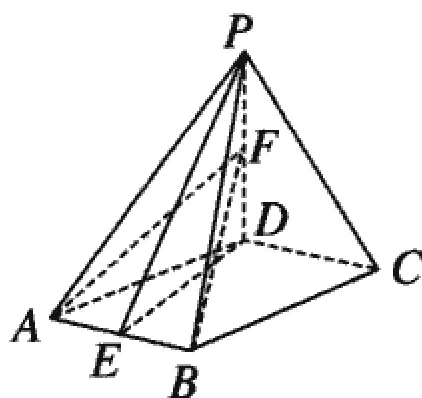
故平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角(锐角)的大小是 $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解后感言】 对"无棱"二面角的棱还不清楚时，通常是先探求出二面角的棱，然后通过作垂线，构造二面角的平面角.

4. **垂面法**

解题秘言：在求解二面角的问题中，若能找到或者作出棱的垂面，则垂面与两个半平面的交线所成的角即为二面角的平面角.

例 7 如图所示，已知四棱锥 P-$ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle DAB=60°$，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD$，点 E 为 AB 中点，点 F 为 PD 中点.



(Ⅰ)证明：平面 $PED\perp$ 平面 PAB；

(Ⅱ)求二面角 P-AB-F 的平面角的余弦值.

(Ⅰ)**【证明】** ∵底面 $ABCD$ 为菱形，

∴$AB=AD$，$\angle DAB=60°$. ∴$\triangle DAB$ 为正三角形.

又 E 为 AB 中点， ∴$AB\perp DE$.

又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，PE 在平面 $ABCD$ 上的射影为 DE，

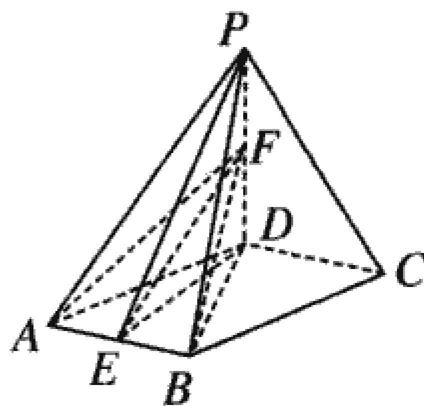
∴$AB\perp PE$(三垂线定理).

∵$PE\cap DE=E$， ∴$AB\perp$ 平面 PED.

∵$AB\subsetneqq$ 平面 PAB， ∴平面 $PAB\perp$ 平面 PED.

(Ⅱ)**【解】** ∵$AB\perp$ 平面 PED，$PE\subsetneqq$ 面 PED， ∴$AB\perp PE$.

如图所示，连结 EF.



∵$EF\subsetneqq$ 面 PED， ∴$AB\perp EF$.

∴$\angle PEF$ 为二面角 P-AB-F 的平面角.

设 $PD=AD=a$，则 $PF=FD=\frac{a}{2}$.

又∵$\triangle DAB$ 为正三角形，E 为 AB 中点，

$\therefore AB=AD=a, AE=\frac{a}{2}, DE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$PE=\sqrt{PD^2+DE^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a.$

$EF=\sqrt{FD^2+ED^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=a.$

$\therefore \cos\angle PEF=\frac{PE^2+EF^2-PF^2}{2PE\cdot EF}=\frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{7}}{2}a\times a}$

$=\frac{\frac{7}{4}+1-\frac{1}{4}}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}.$

$\therefore$二面角 $P\text{-}AB-F$ 的平面角的余弦值为$\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

【解后感言】 这里由已知条件很容易找到二面角的棱 AB 的垂面，故运用垂面法可顺利找出二面角的平面角.

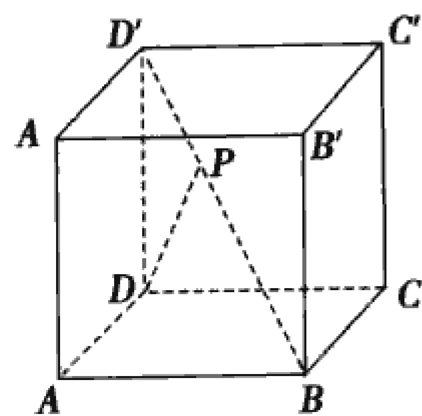
5. **向量法**

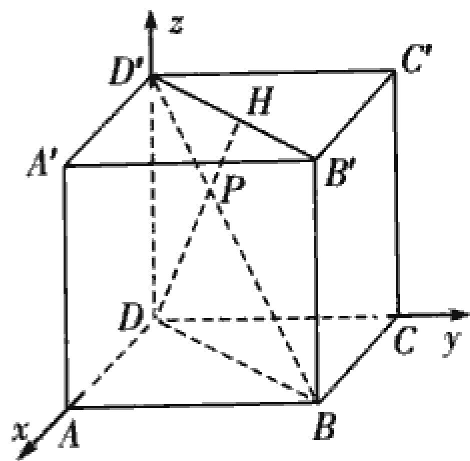
解题秘言：利用空间向量的数量积来求空间角，能化复杂的几何论证为简单的代数计算，是一种十分便捷的方法.

例 8 (2008 年海南、宁夏高考理 · T18)如图，已知点 P 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的对角线 BD' 上，$\angle PDA=60°$.

(Ⅰ)求 DP 与 CC' 所成角的大小；

(Ⅱ)求 DP 与平面 $AA'D'D$ 所成角的大小





【规范解析】 如图，以 D 为原点，DA 为单位长建立空间直角坐标系 $D-xyz$. 则$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{CC'}=(0,0,1)$，连结 BD、$B'D'$.

在平面 $BB'D'D$ 中，延长 DP 交 $B'D'$ 于 H.

设$\overrightarrow{DH}=(m,m,1)(m>0)$，

由已知$\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\rangle=60°$，

由$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DH}=|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{DH}|\cos\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DA}\rangle$

可得$2m=\sqrt{2m^2+1}$.

解得$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\overrightarrow{DH}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

（Ⅰ）因为$\cos\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC'}\rangle\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times0+1\times1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{CC'}\rangle=45°$，即$DP$与$CC'$所成的角为$45°$.

（Ⅱ）平面$AA'D'D$的一个法向量是$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$.

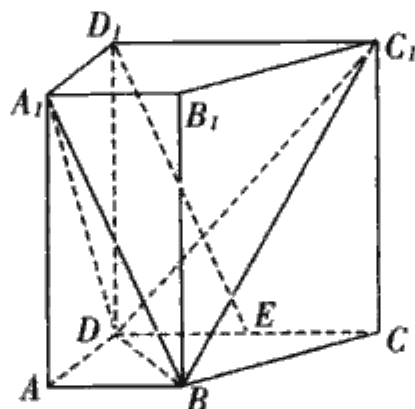
因为$\cos\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times1+1\times0}{1\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

所以$\langle\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC}\rangle=60°$，

可得DP与平面$AA'D'D$所成的角为$30°$.

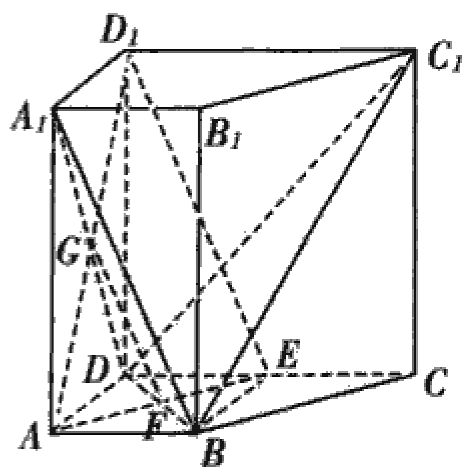
【解后感言】 对于立方体、长方体，由于建立空间直角坐标系极其方便，因此用向量法求空间角很简单，而且准确率极高.

例9 （2007年山东高考理·T19）如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$DC=DD_1=2AD=2AB$，$AD\perp DC$，$AB/\!/DC$.



(1)设E是DC的中点，求证：$D_1E/\!/$平面A_1BD；

(2)求二面角A_1-BD-C_1的余弦值.



解法一：如图，(1)证明：连结BE，则四边形$DABE$为正方形，

$\therefore BE=AD=A_1D_1$，且$BE/\!/AD/\!/A_1D_1$.

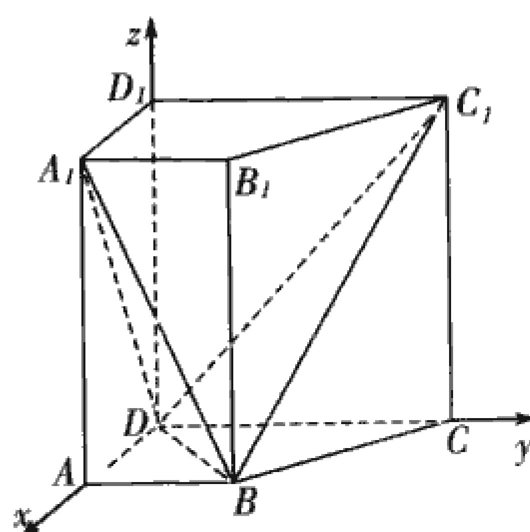
$\therefore$四边形A_1D_1EB为平行四边形.

$\therefore D_1E/\!/A_1B$.

又$D_1E\not\subset$平面A_1BD，$A_1B\subset$平面A_1BD，

$\therefore D_1E/\!/$平面A_1BD.

(2)以 D 为原点，DA、DC、DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，不妨设 $DA=1$，则 $D(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$B(1,1,0)$、$C_1(0,2,2)A_1(1,0,2)$，



$\therefore \overrightarrow{DA_1}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 A_1BD 的一个法向量，

由 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DA_1}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DB}$，

得 $\begin{cases}x+2z=0,\\ x+y=0.\end{cases}$ 取 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(-2,2,1)$.

又 $\overrightarrow{DC_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 C_1BD 的一个法向量，

由 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DC}$，$\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DB}$，得 $\begin{cases}2y_1+2z_1=0,\\ x_1+y_1=0.\end{cases}$

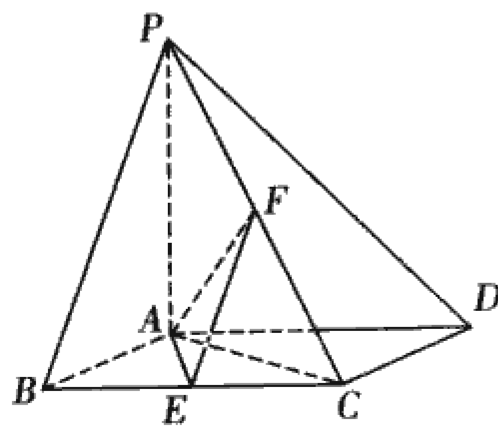
取 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$.

设 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 α，二面角 A_1-BD-C_1 为 θ，显然 θ 为锐角.

$\therefore \cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{9}\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即所求二面角 A_1-BD-C_1 的余弦为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

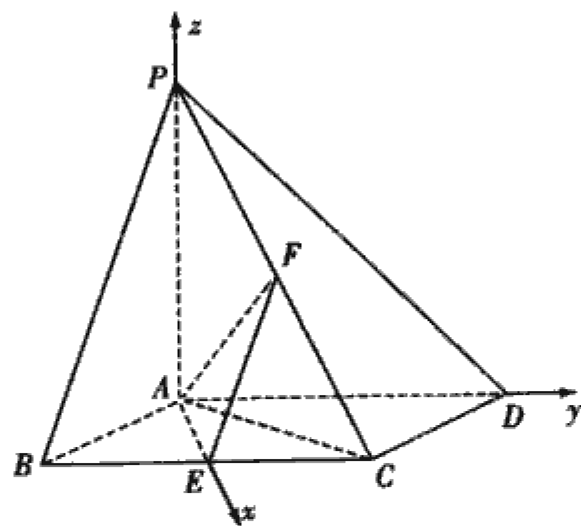
例10 (2008年山东高考理·T20)如图，已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ABC=60°$，E，F 分别是 BC，PC 的中点.



(Ⅰ)证明：$AE\perp PD$；

(Ⅱ)若 H 为 PD 上的动点，EH 与平面 PAD 所成最大角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.

【规范解析】 由(Ⅰ)知 AE，AD，AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，又 E，F 分别为 BC，PC 的中点，所以



$A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，

$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(\sqrt{3},0,0)$

$F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AF}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$. 设平面

AEF 的一法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$

因此 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+\dfrac{1}{2}y_1+z_1=0.\end{cases}$

取 $z_1=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(0,2,-1)$，

因为 $BD\perp AC$，$BD\perp PA$，$PA\cap AC=A$，

所以 $BD\perp$ 平面 AFC，

故 $\overrightarrow{BD}$ 为平面 AFC 的一法向量.

又 $\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},3,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{2\times 3}{\sqrt{5}\times\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

因为二面角 $E-AF-C$ 为锐角，

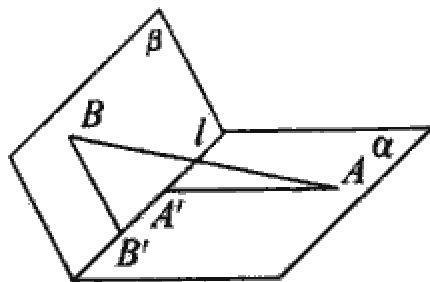
所以所求二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

二、求空间距离的常用方法

1. 直接法

解题秘言：即直接根据点线距离、点面距离、线线距离、线面距离及两个平面间的距离的定义来计算、求解.

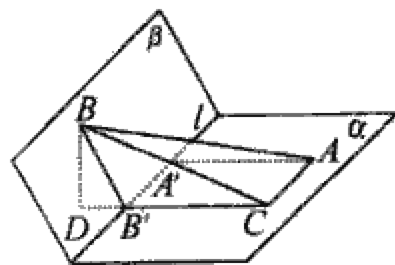
例 1 (2008 年重庆高考文 · T20)分如图，α 和 β 平面，$\alpha\cap\beta=l$，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，$AB=5$，A、B 在棱 l 上的射影分别为 $A'B'$，$AA'=3$，$BB'=2$. 若二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$，求：



(1)点 B 到平面 α 的距离；

(2)异面直线 l 与 AB 所成的角(用反三角函数表示).

【规范解析】 (1)如图，过点 B' 作直线 $B'C\parallel A'A$ 且使 $B'C=A'A$，过点 B 作 $BD\perp CB'$，交 CB' 延长线于 D.



$\because AA'\perp l$，$\therefore DB'\perp l$，

又 $\because BB'\perp l$，

$\therefore l\perp$ 平面 $BB'D$.

$\therefore BD\perp l$.

又$\because BD\perp CB'$,

$\therefore BD\perp$平面α,

$\therefore BD$即为点B到平面α的距离.

$\because B'C\perp l, BB'\perp l$,

$\therefore \angle BB'C$即为二面角$\alpha-l-\beta$的平面角.

$\therefore \angle BB'C=\frac{2\pi}{3}$.

在$Rt\triangle BB'D$中,$BB'=2, \angle BB'D=\pi-\angle BB'C=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore BD=BB'\sin\angle BB'D=\sqrt{3}$.

(2)连接AC, BC,

$\because B'C/\!/A'A, B'C=A'A, AA'\perp l$,

$\therefore$四边形$A'ACB'$是矩形.

$\therefore AC/\!/l$.

$\therefore \angle BAC$或其补角为异面直线l与AB所成的角.

在$\triangle BB'C$中,$B'B=2, B'C=3, \angle BB'C=\frac{2\pi}{3}$,

由余弦定理

$BC=\sqrt{B'B^2+B'C^2-2B'B\cdot B'C\cdot\cos\angle BB'C}=\sqrt{19}$.

又$\because BD\perp$平面α,$DC\perp CA$,

由三垂线定理得$AC\perp BC$.

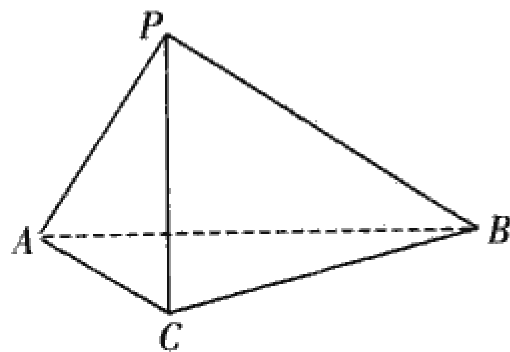
$\therefore$在$Rt\triangle ABC$中,$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$,

$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{19}}{5}$,

$\therefore$异面直线l与AB所成的角为$\arcsin\frac{\sqrt{19}}{5}$.

【解后感言】 在直接作点到平面的距离时,要注意确定垂足的位置,以便于计算.

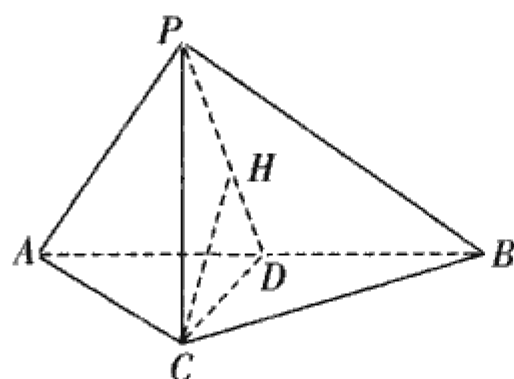
例2 (2008年北京高考理·T16)如图,在三棱锥$P-ABC$中,$AC=BC=2$,$\angle ACB=90°$,$AP=BP=AB$,$PC\perp AC$.



(Ⅰ)求证:$PC\perp AB$;

(Ⅱ)求二面角$B-AP-C$的大小;

(Ⅲ)求点C到平面APB的距离.



【规范解析】 （Ⅰ）、（Ⅱ）见本章第一节例1

（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $AB\perp$ 平面 PCD. 所以平面 $APB\perp$ 平面 PCD.

过 C 作 $CH\perp PD$，垂足为 H.

因为　平面 $APB\cap$ 平面 $PCD=PD$.

所以　$CH\perp$ 平面 APB.

所以　CH 的长即为点 C 到平面 APB 的距离.

由（Ⅰ）知 $PC\perp AB$，又 $PC\perp AC$，

且 $AB\cap AC=A$.

所以　$PC\perp$ 平面 ABC.

因为　$CD\subset$ 平面 ABC.

所以　$PC\perp CD$.

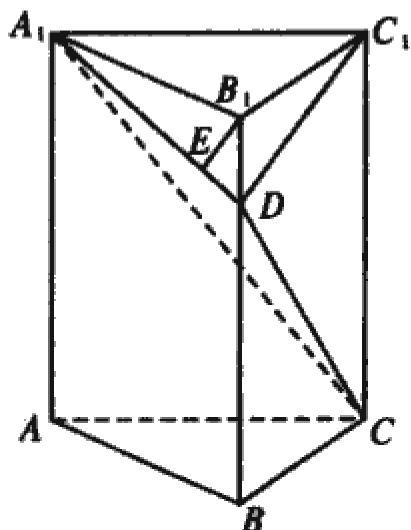
在 $Rt\triangle PCD$ 中，$CD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，$PD=\frac{\sqrt{3}}{2}PB=\sqrt{6}$.

所以　$PC=\sqrt{PD^2-CD^2}=2$，

所以　$CH=\frac{PC\cdot CD}{PD}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以　点 C 到平面 APB 的距离为 $\frac{3\sqrt{3}}{3}$.

【解后感言】 求点到直线的距离，就是直接从该点向直线作垂线，如果垂足的位置不易确定，有时也可借助三垂线定理来作.



例3 （2007年重庆高考·理19）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=1$，$\angle ABC=90^\circ$；点 D、E 分别在 BB_1、A_1D 上，且 $B_1E\perp A_1D$，四棱锥 $C-ABDA_1$ 与直三棱柱的体积之比为 $3:5$.

(1)求异面直线 DE 与 B_1C_1 的距离；

(2)若 $BC=\sqrt{2}$，求二面角 $A_1-DC_1-B_1$ 的平面角的正切值.

【规范解析】 解法一：(1)因 $B_1C_1\perp A_1B_1$，且 $B_1C_1\perp BB_1$，故 $B_1C_1\perp$ 面 A_1ABB_1，从而 $B_1C_1\perp B_1E$，

又 $B_1E\perp DE$，故 B_1E 是异面直线 B_1C_1 与 DE 的公垂线.

设 BD 的长度为 x，则四棱锥 $C-ABDA_1$ 的体积 V_1 为

$V_1=\frac{1}{3}S_{ABDA_1}\cdot BC=\frac{1}{6}(DB+A_1A)\cdot AB\cdot BC=\frac{1}{6}(x+2)\cdot BC$.

而直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 V_2 为

$V_2=S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot AA_1=BC$.

由已知条件 $V_1:V_2=3:5$，

故$\frac{1}{6}(x+2)=\frac{3}{5}$，解之，得 $x=\frac{8}{5}$.

从而 $B_1D=B_1B-DB=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$.

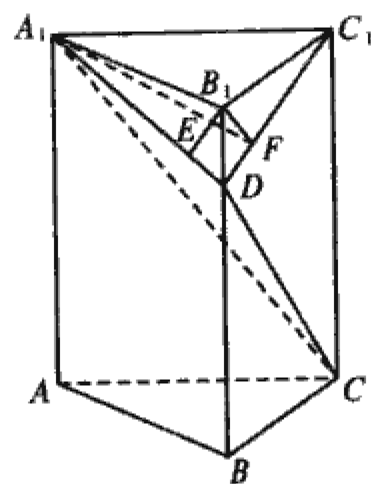
在 $Rt\triangle A_1B_1D$ 中，$A_1D=\sqrt{A_1B_1^{\,2}+B_1D^2}$

$=\sqrt{1+(\frac{2}{5})^2}=\frac{\sqrt{29}}{5}$，

又因 $S_{\triangle A_1B_1D}=\frac{1}{2}A_1D\cdot B_1E=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot B_1D$，

故 $B_1E=\frac{A_1B_1\cdot B_1D}{A_1D}=\frac{2\sqrt{29}}{29}$.

(2)如图，过 B_1 作 $B_1F\perp C_1D$，垂足为 F，连结 A_1F.



因 $A_1B_1\perp B_1C_1$，$A_1B_1\perp B_1D$，

故 $A_1B_1\perp$ 面 B_1DC_1.

由三垂线定理知 $C_1D\perp A_1F$，

故$\angle A_1FB_1$ 为所求二面角的平面角.

在 $Rt\triangle C_1B_1D$ 中，$C_1D=\sqrt{B_1C_1^{\,2}+B_1D^2}=\sqrt{2+(\frac{2}{5})^2}$

$=\frac{3\sqrt{6}}{5}$.

又因 $S_{\triangle C_1B_1D}=\frac{1}{2}C_1D\cdot B_1F=\frac{1}{2}B_1C_1\cdot B_1D$，

故 $B_1F=\frac{B_1C_1\cdot B_1D}{C_1D}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

所以 $\tan\angle A_1FB_1=\frac{A_1B_1}{B_1F}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解后感言】 这里是直接探求出异面直线的公垂线，然后进行计算.

2. 转化法

常用的方法有将线面距离转化为点面距离，将线线距离转化为线面距离或面面距离. 还有，甲点到平面 α 的距离可以转化为与其相关的乙点到平面 α 的距离等.

例4 (2008 年安徽高考文·T19)如图，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$. $OA\perp$底面 $ABCD$，$OA=2$，M 为 OA 的中点.

(1)求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小；

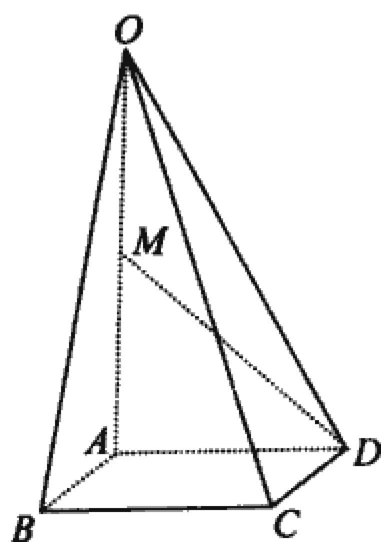
(2)求点 B 到平面 OCD 的距离.

【规范解析】 方法一(综合法)：

(1)$\because CD/\!/AB$，

$\therefore\angle MDC$ 为异面直线 AB 与 MD 所成的角(或其补角).

作 $AP\perp CD$ 于点 P，连接 MP.



$\because OA\perp$ 平面 $ABCD$，
$\therefore CD\perp MP$.

$\because \angle ADP=\frac{\pi}{4}$，$\therefore DP=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because MD=\sqrt{MA^2+AD^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore \cos\angle MDP=\frac{DP}{MD}=\frac{1}{2}$，$\angle MDC=\angle MDP=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore AB$ 与 MD 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

(2) $\because AB/\!/CD$，$CD\subset$ 平面 OCD，$AB\not\subset$ 平面 OCD，
$\therefore AB/\!/$ 平面 OCD，
$\therefore$ 点 B 和点 A 到平面 OCD 的距离相等.
连接 OP. 过点 A 作 $AQ\perp OP$ 于点 Q，
$\because AP\perp CD$，$OA\perp CD$，$\therefore CD\perp$ 平面 OAP，
$\because AQ\subset$ 平面 OAP，$\therefore AQ\perp CD$.
又 $\because AQ\perp OP$，$OP\cap CD=P$，
$\therefore AQ\perp$ 平面 OCD，线段 AQ 的长就是点 A 到平面 OCD 的距离.

$\because OP=\sqrt{OD^2-DP^2}=\sqrt{OA^2+AD^2-DP^2}$

$=\sqrt{4+1-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

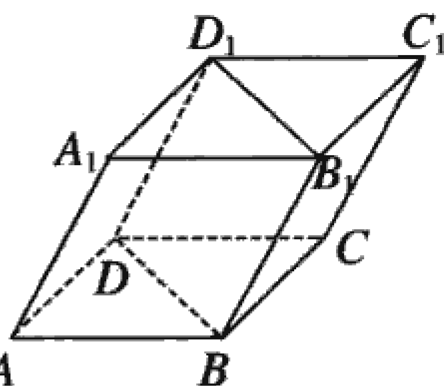
$AP=DP=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\therefore AQ=\frac{OA\cdot AP}{OP}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{3},$$

$\therefore$ 点 B 到平面 OCD 的距离为 $\frac{2}{3}$.

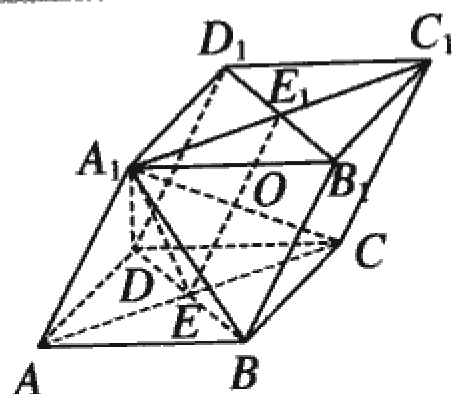
【解后感言】 这里将点 B 到面 OCD 的距离转化为点 A 到面 OCD 的距离，比直接求 B 到平面 OCD 的距离要简单得多.

例5 如图所示，四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱与底面边长均为 $2a$，且 $\angle A_1AD=\angle A_1AB=60^\circ$，则侧棱 AA_1 和截面 B_1D_1DB 的距离是______.



【解】 如图所示，连结 A_1C_1，AC，设 A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 E_1，AC 与 BD 交于点 E，连结 E_1E，连结 A_1C，交 EE_1 于 O 点，连结 A_1E.

$\because \angle A_1AB=\angle A_1AD=60^\circ$，$AB=A_1A=AD=2a$，



$\therefore A_1B=A_1D=A_1B_1=A_1D_1=2a$.

又∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore BE=2a\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}a$.

又 A_1A 在平面 $ABCD$ 的射影在 $\angle BAD$ 平分线即对角线 AC 上，

$\therefore BD\perp$平面 A_1ACC_1，　$\therefore BE\perp A_1E$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle A_1EB$ 中，$A_1E=\sqrt{2}a=A_1E_1$.

$\therefore \triangle A_1EE_1$ 为等腰三角形，

$\therefore A_1O\perp EE_1$.

又 $A_1A\,/\!/$平面 BB_1D_1D，故 A_1A 与平面 BB_1D_1D 的距离即为 A_1 到该平面的距离.

正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1C_1=\sqrt{2}\cdot 2a$，　$\therefore A_1E_1=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 2a}{2}=\sqrt{2}a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1E_1O$ 中，$OE_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2a=a$，

$\therefore A_1O=\sqrt{A_1E_1^2-E_1O^2}=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-a^2}=a$.

$\therefore A_1A$ 与平面 BB_1D_1D 的距离为 a.

【解后感言】 本题就是将直线与平面的距离转化为点面距离来求.

例 6 如图所示，CD，AB 是两条异面直线，它们夹在两平行平面 α 和 β 间的部分 AB，CD 在平面 β 内的射影分别是 12cm 和 2cm，它们与平面 β 的交角之差的绝对值是 45°. 求 AC 与 BD 之间的距离.

【解】 ∵$AC\subsetneqq$平面 α，$BD\subsetneqq$平面 β，平面 $\alpha\,/\!/$平面 β，

∴平面 α 与平面 β 的距离为异面直线 AC 与 BD 间的距离.

设此距离为 x cm，则 $AA'=CC'=x$ cm. 过 D 点作 $DE\,/\!/\,AB$ 交平面 α 于 E，则四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

令 $\angle CDC'=\theta_1$，$\angle ABA'=\theta_2$，则 $\tan\theta_1=\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{12}=\tan\theta_2$.

$\therefore \theta_1-\theta_2=45^\circ$　$\therefore \tan(\theta_1-\theta_2)=\tan 45^\circ$，

即 $\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2}=1$，亦即 $\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{12}}{1+\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{12}}=1$.

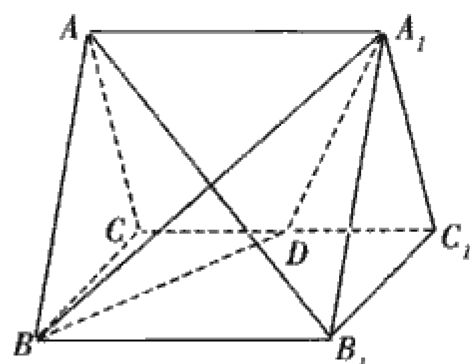
整理得 $x^2-10x+24=0$，解得 $x_1=4$，$x_2=6$.

故异面直线 AC 与 BD 之间的距离是 4cm 或 6cm.

【解后感言】 本题是将两条异面直线的距离转化为异面直线所在的两个平行平面的距离来解决的.

3. **体积法**

解题秘言：当点到平面的距离一时不易求出时，可先构建一个合适的三棱锥，若此三棱锥的底面积易求，且通过体积变换，此三棱锥的体积也能求出，则点面距离可得.



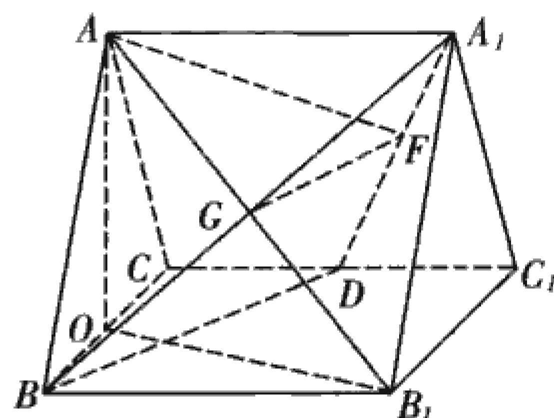
例 7 （2008 年福建高考理 T18 · 文 T19）如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，D 为 CC_1 中点.

(1)求证：$AB_1\perp$ 平面 A_1BD；

(2)求二面角 $A-A_1D-B$ 的大小；

(3)求点 C 到平面 A_1BD 的距离；

【规范解析】 (1)如图，取 BC 中点 O，连结 AO.



$\because\triangle ABC$ 为正三角形，

$\therefore AO\perp BC$.

$\because$ 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore AO\perp$ 平面 BCC_1B_1.

连结 B_1O，在正方形 BB_1C_1C 中，O、D 分别为 BC、CC_1 的中点，

$\therefore B_1O\perp BD$. $\therefore AB_1\perp BD$.

在正方形 ABB_1A_1 中，$AB_1\perp A_1B$，

$\therefore AB_1\perp$ 平面 A_1BD.

(2)设 AB_1 与 A_1B 交于点 G，在平面 A_1BD 中，作 $GF\perp A_1D$ 于 F，连结 AF，由(1)得 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD，

$\therefore AF\perp A_1D$.

$\therefore\angle AFG$ 为二面角 $A-A_1D-B$ 的平面角.

在 $\triangle AA_1D$ 中，由等面积法可求得 $AF=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

又 $\because AG=\frac{1}{2}AB_1=\sqrt{2}$，$\therefore\sin\angle AFG=\frac{AG}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

$\therefore$ 二面角 $A-A_1D-B$ 的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{4}$.

(3)在 $\triangle A_1BD$ 中，$BD=A_1D=\sqrt{5}$，$A_1B=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle A_1BD}=\sqrt{6}$，$S_{\triangle BCD}=1$.

在正三棱柱中，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$.

设点 C 到平面 A_1BD 的距离为 d.

由 $V_{A_1-BCD}=V_{c-A_1BD}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BD}\cdot d$，$\therefore d=\frac{\sqrt{2}}{2}$

即点 C 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解后感言】 第(Ⅲ)问中利用三棱锥 A_1-BCD 的体积不变，求出点 C 到平面 A_1BD 的距离，避免了从 C 点向平面 A_1BD 作垂线，垂足不易确定的问题，解法摆脱常规思维，大大简化了解题过程.

例8 已知球 O 的半径为 1，A、B、C 三点都在球面上，且每两点间的球面距离均为 $\frac{\pi}{2}$，则球心 O 到平面 ABC 的距离为 (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解】 设 O 到平面 ABC 的距离为 h.

$\because AB,AC,CB$ 的球面距离均为 $\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \angle AOB=\angle AOC=\angle COB=\frac{\pi}{2}$.

$\because$ 球半径为 1，　$\therefore AO=BO=CO=1,AB=AC=BC=\sqrt{2}$.

$\therefore V_{O\text{-}ABC}=V_{A\text{-}OBC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$.

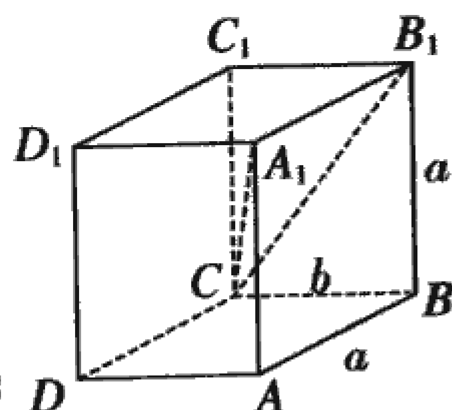
又 $V_{O\text{-}ABC}=\frac{1}{3}h\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{6}h$，　$\therefore \frac{\sqrt{3}}{6}h=\frac{1}{6}$，故 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 球心 O 到截面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　故选 B.

【答案】 B

【解后感言】 这是用体积法求点到平面距离的一个最通俗的实例.

例9 如图所示，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=a$，$BB_1=a$，$BC=b$，求异面直线 AB 与 A_1C 之间的距离.



【解】 $\because AB/\!/A_1B_1$，

$\therefore AB/\!/$ 平面 A_1B_1C.

$\therefore AB$ 与平面 A_1B_1C 之间的距离即为异面直线 AB 与 A_1C 之间的距离.

设 AB 上一点 B 到平面 A_1B_1C 的距离为 h，利用等体积关系，有 $V_{B\text{-}A_1B_1C}=V_{A_1\text{-}BB_1C}$，即

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot b\cdot a.$$

解得 $h=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

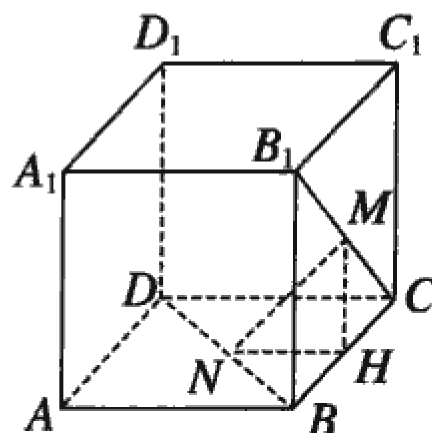
故 AB 与 A_1C 之间的距离为 $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

【解后感言】 本题因直接作两条异面直线的距离有困难，故首先进行转化，将两异面直线的距离转化为点到平面的距离，然后再利用等体积法求得.

4. **极值法**

解题秘言：有时通过建立所求的两个研究对象上任意两点之间的距离的函数关系，来求该函数的最小值，此最小值即为这两个对象之间的距离.

例10 棱长为 a 的正方体 AC_1 中，求异面直线 BD 与 B_1C 之间的距离.



【解】 如图所示，在 B_1C 上任取一点 M，作 $MH\perp BC$ 于 H，再过 H 作 $HN\perp BD$ 于 N，连结 MN.

∵平面 $BC_1\perp$ 平面 AC，

∴$MH\perp$ 平面 AC.

∴$MH\perp HN$.

设 $MC=x$，则 $MH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$HC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，

∴$BH=a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，　∴$HN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{1}{2}x$.

在△MHN 中，　∵$\angle MHN=90°$，

$$\therefore MN^2=HN^2+MH^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2+\frac{a^2}{3}.$$

∴当且仅当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$ 时，$MN_{\min}^2=\dfrac{a^2}{3}$，即 $MN_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

∴BD 与 B_1C 之间的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

【解后感言】 极值法多适用于两异面直线之间的距离，其背景是易于由其中一条直线上的任意一点向另一条直线作垂线，而且该垂线段的长度能够表示成某一变量的函数.

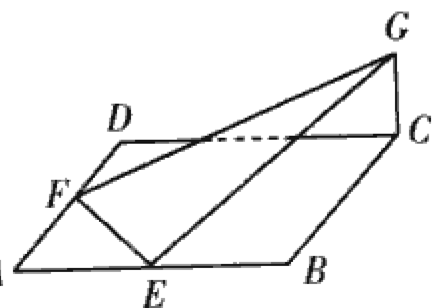
5. **向量法**

解题秘言：1. 以柱体、锥体为依托，考查空间的线线、线面、面面关系，以及角、距离是高考的“热点”，在解题时，宜挖掘它们的特殊关系，尤其是垂直关系，建立空间坐标系，是解此类问题的重要方法，务必掌握！

2. 柱体、锥体特有的性质、关系在解题时要充分利用，从而找出隐含条件，保证问题的解决.

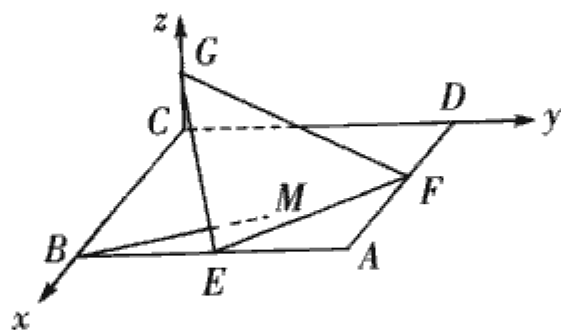
3. 若问题题设中存在垂直关系时，建立空间坐标系大多较方便；若不存在时，应选好基底进行运算，或用传统的欧氏几何的方法解决.

例 11 如右图所示已知正方形 $ABCD$ 的边长是 4，E，F 分别是 AB，AD 的中点，$GC\perp$平面 $ABCD$，且 $GC=2$，求点 B 到平面 EFG 的距离.



【思路探索】 由题设可知 CG，CB，CD 两两垂直，由此可以建立空间直角坐标系，用向量法求解，即求出过点 B 垂直于平面 EFG 的向量，它的模长即为点 B 到平面 EFG 的距离.

【解】 如右图所示，以 C 为原点，CB，CD，CG 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $C-xyz$.



则有 $C(0,0,0)$，$A(4,4,0)$，$B(4,0,0)$，$D(0,4,0)$，$E(4,2,0)$，$F(2,4,0)$，$G(0,0,2)$.

$\overrightarrow{BE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-2,4,0)$，$\overrightarrow{BG}=(-4,0,2)$

$\overrightarrow{GE}=(4,2,-2)$，$\overrightarrow{EF}=(-2,2,0)$.

设向量 $\overrightarrow{BM}\perp$平面 GEF，垂足为 M，则 M，G，E，F 四点共面，故存在实数 a，b，c 使

$\overrightarrow{BM}=a\cdot\overrightarrow{BE}+b\cdot\overrightarrow{BF}+c\cdot\overrightarrow{BG}$，

即 $\overrightarrow{BM}=a(0,2,0)+b(-2,4,0)+c(-4,0,2)=(-2b-4c,2a+4b,2c)$.

由 $\overrightarrow{BM}\perp$平面 GEF，得 $\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{GE}$，$\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{EF}$，

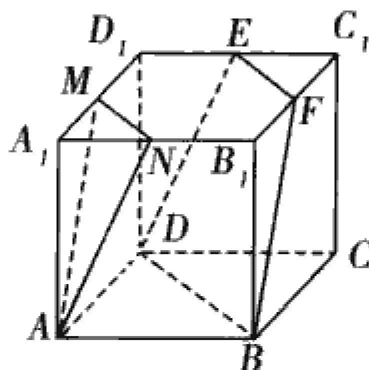
$\therefore\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{GE}=0$，$BM\cdot\overrightarrow{EF}=0$，

即 $\begin{cases}\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{GE}=(-2b-4c,2a+4b,2c)\cdot(4,2,-2)=0,\\ \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{EF}=(-2b-4c,2a+4b,2c)\cdot(-2,2,0)=0.\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}a-5c=0,\\ a+3b+2c=0,\\ a+b+c=1,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a=\dfrac{15}{11},\\ b=-\dfrac{7}{11},\\ c=\dfrac{3}{11}.\end{cases}$

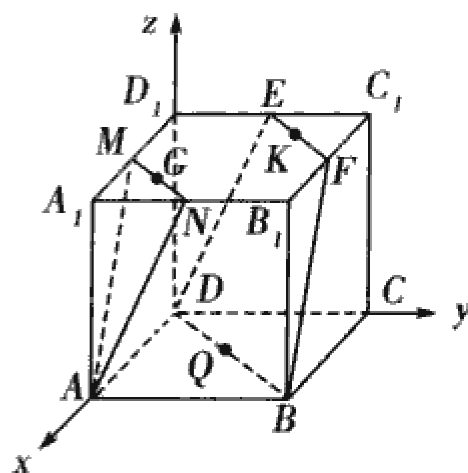
表的向量与其他两共点向量垂直即可求得垂线段的坐标表达式.

例12 如下图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 4，M,N,E,F 分别是 $A_1D_1,A_1B_1,D_1C_1,B_1C_1$ 的中点.



（Ⅰ）证明：平面 AMN∥平面 $EFBD$；

（Ⅱ）求平面 AMN 与平面 $EFBD$ 间的距离.



（Ⅰ）**证明** 依题意建立如右图所示坐标系，则

$A(4,0,0)$，$M(2,0,4)$，$N(4,2,4)$，$D(0,0,0)$，

$B(4,4,0)$，$E(0,2,4)$，$F(2,4,4)$.

取 MN 之中点 G 及 EF 之中点 K，BD 之中点 Q，则 $G(3,1,4)$，$K(1,3,4)$，$Q(2,2,0)$.

$\therefore \overrightarrow{MN}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{EF}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AG}=(-1,1,4)$，$\overrightarrow{QK}=(-1,1,4)$.

$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{QK}$，

故 MN∥EF，AG∥QK.

又 $EF\subsetneqq$ 平面 $EFBD$，$QK\subsetneqq$ 平面 $EFBD$，

$\therefore MN$∥平面 $EFBD$，AG∥平面 $EFBD$.

$\therefore$ 平面 AMN∥平面 $EFBD$.

（Ⅱ）**【解】** 设平面 $BDEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}=(1,\lambda,u)$，

又 $\overrightarrow{EF}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{QK}=(-1,1,4)$，

$\therefore$ $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{QK}=-1+\lambda+4u=0$， ①

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=2+2\lambda=0$. ②

联立①②解得 $\lambda=-1$，$u=\frac{1}{2}$， $\therefore \boldsymbol{n}=\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$.

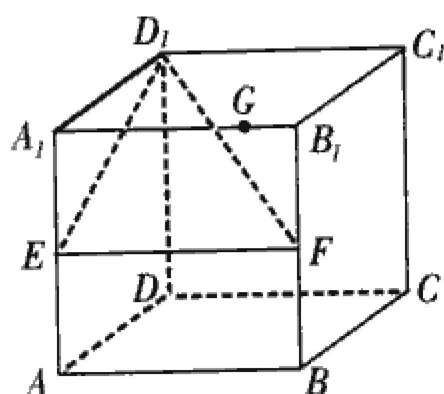
故两平面之间的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|0+4+0|}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}=\frac{8}{3}.$$

【解后感言】 这里是先求出平面 $BDEF$ 的法向量 $\boldsymbol{n}$，再将 $\overrightarrow{AB}$ 向法向量 $\boldsymbol{n}$ 上投影，此投影长度即为两平行平面间的距离.

实战秘修十三

1. (2007 年湖北,文 5)如右图所示,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点,G 为棱 A_1、B_1 上的一点,且 $A_1G=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则点 G 到平面 D_1EF 的距离为 ( )



A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

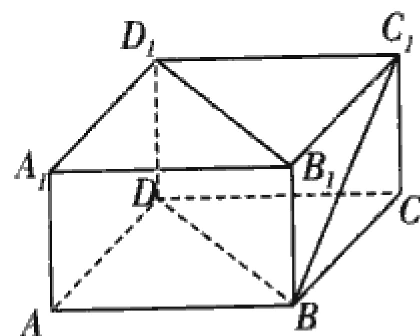
C. $\frac{\sqrt{2\lambda}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2. (2008 年全国高考理·T11)已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面边长都相等,A_1 在底面 ABC 内的射影为$\triangle ABC$ 的中心,则 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值等于 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. (2008 年全国高考Ⅱ理·T10)已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等,E 是 SB 的中点,则 AE、SD

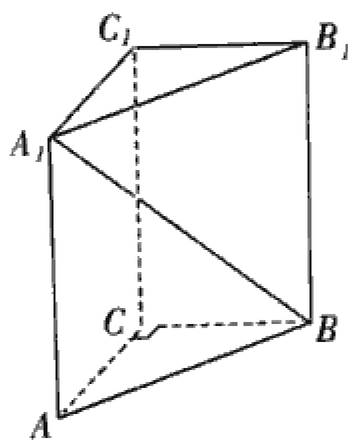
4. (2008 年福建高考理·T16)如右图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=2$,$AA_1=1$,则 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为 ( )



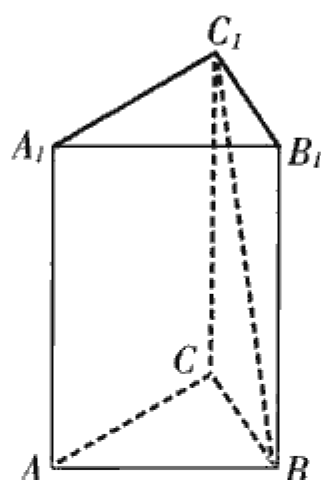
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

5. (2007 年上海,文 7)如下图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle ABC=90^\circ$,$AA_1=2$,$AC=BC=1$,则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小是________.(结果用反三角函数值表示).



6. (2007年四川,14)如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱长为$\sqrt{2}$,底面三角形的边长为1,则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是________.



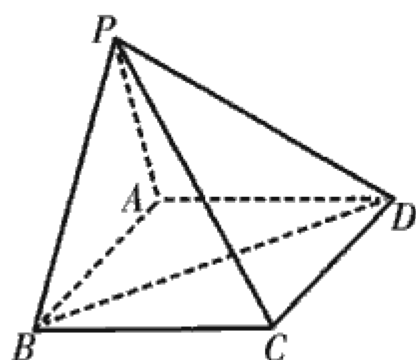
7. (2006年全国Ⅰ·理13文14)已知正四棱锥的体积为12,底面对角线的长为$2\sqrt{6}$,则侧面与底面所成的二面角等于________.

8. (2008年天津高考理·T19)如右图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是矩形.已知 $AB=3$,$AD=2$,$PA=2$,$PD=2\sqrt{2}$,$\angle PAB=60°$.

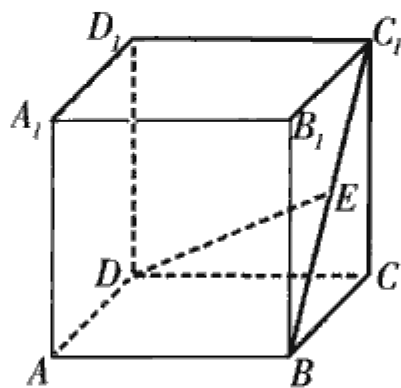
(Ⅰ)证明:$AD\perp$平面 PAB;

(Ⅱ)求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小;

(Ⅲ)求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



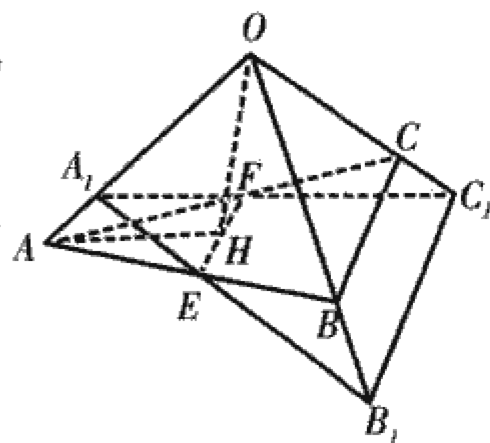
9. (2008年上海高考理·T16)如下图,在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 E 是 BC_1 的中点.求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小(结果用反三角函数值表示).



10. (2008年江西高考理·T20)如右图,正三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA、OB、OC 两两垂直,且长度均为2.E、F 分别是 AB、AC 的中点,H 是 EF 的中点,过 EF 的一个平面与侧棱 OA、OB、OC 或其延长线分别相交于 A_1、B_1、C_1,已知 $OA_1=\frac{3}{2}$.

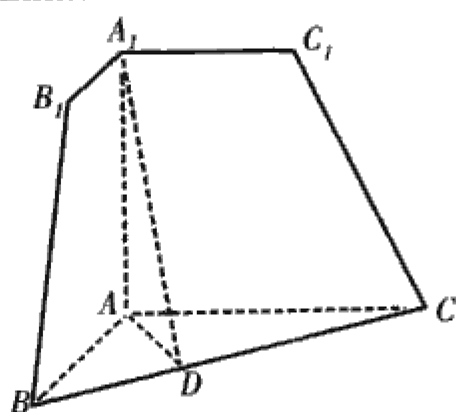
(Ⅰ)证明:$B_1C_1\perp$平面 OAH;

(Ⅱ)求二面角 $O-A_1B_1-C_1$ 的大小.



11. (2008年陕西高考理·T19)三棱锥被平行于底面 ABC 的平面所截得的几何体如右图所示,截面为 $A_1B_1C_1$,$\angle BAC=90°$,$A_1A\perp$平面 ABC,$A_1A=\sqrt{3}$,$AB=\sqrt{2}$,$AC=2$,$A_1C_1=1$,$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$.(Ⅰ)证明:平面 $A_1AD\perp$平面 BCC_1B_1;

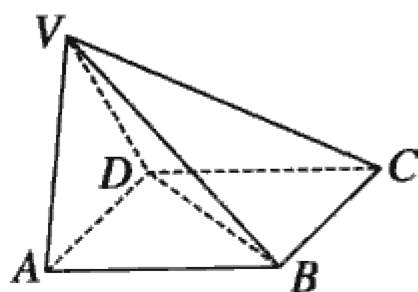
(Ⅱ)求二面角 $A-CC_1-B$ 的大小.



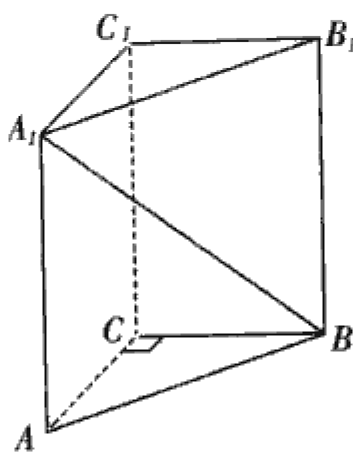
12. 如右图,在四棱锥 V-$ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧面 VAD 是正三角形,平面 $VAD\perp$底面 $ABCD$.

(1)证明:$AB\perp$平面 VAD;

(2)求面 VAD 与 VDB 所成的二面角的大小.



13. (2008年上海·理16)如下图,在体积为1的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle ABC=90°$,$AC=BC=1$.求直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小(结果用反三角函数值表示).

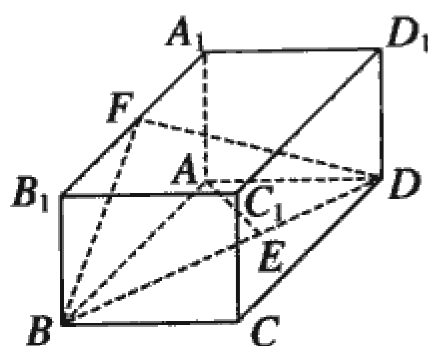


14. 如右图,已知长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$,$AB=2$,$AA_1=1$,直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为30°,AE 垂直 BD 于 E,F 为 A_1B_1 的中点.

(1)求异面直线 AE 与 BF 所成的角;

(2)求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角(锐角)的大小;

(3)求点 A 到平面 BDF 的距离.

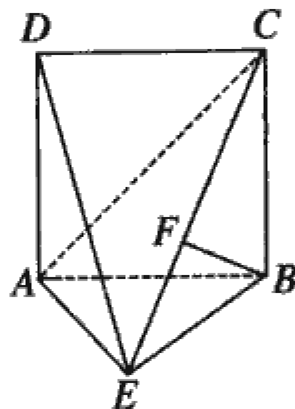


15. 如右图,直二面角 D-AB-E 中,四边形 $ABCD$ 是边长为2的正方形,$AE=EB$,F 为 CE 上的点,且 $BF\perp$平面 ACE.

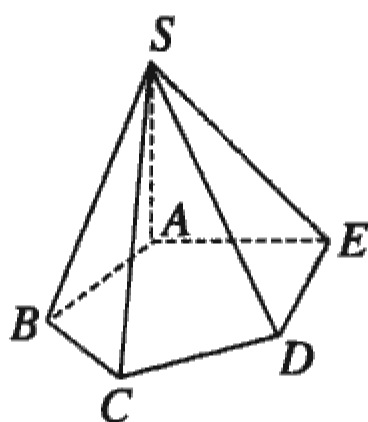
(1)证明:$AE\perp$平面 BCE;

(2)求二面角 B-AC-E 的大小;

(3)求点 D 到平面 ACE 的距离.



16. 如右图，在五棱锥 $S\text{-}ABCDE$ 中，$SA\perp$ 底面 $ABCDE$，$SA=AB=AE=2$，$BC=DE=\sqrt{3}$，$\angle BAE=\angle BCD=\angle CDE=120°$.



(1)求异面直线 CD 与 SB 所成的角(用反三角函数值表示)；

(2)证明 $BC\perp$ 平面 SAB；

(3)用反三角函数值表示二面角 $B\text{-}SC\text{-}D$ 的大小(本小问不必写出解答过程).

实战秘修十三答案与提示

1. 选 D.

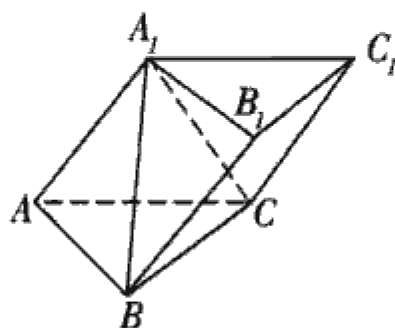
$\because A_1B_1/\!/EF$，$\therefore A_1B_1$ 面 D_1EF. $\therefore A_1$ 到面 D_1EF 的距离等于 G 到面 D_1EF 的距离.

$\because$ 面 $A_1ED_1\perp$ 面 D_1EF，在面 A_1ED_1 中作 $A_1H\perp ED_1$，垂足为 H，

$\therefore A_1H\perp$ 面 D_1EF.

在$\triangle A_1ED_1$ 中，$A_1H\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=1\cdot\frac{1}{2}$，$\therefore A_1H=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. 选 B.



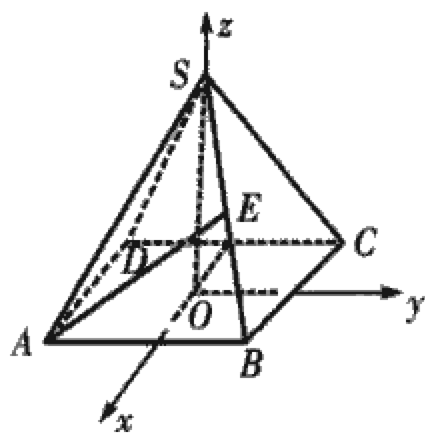
可设底面边长与侧棱长为 1 个单位长度，因为 A_1 在底面 ABC 内的射影为$\triangle ABC$ 的中心，所以三棱锥 A_1-ABC 为正四面体，所以 A_1 到底面 ABC 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 B_1 到底面距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，

易知$\angle ABB_1=120°$，所以 $AB_1=\sqrt{3}$，

所以 AB_1 与底面 ABC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 B.

3. 选 C.



令正四棱锥的棱长为 2，则

$A(1,-1,0)$，$D(-1,-1,0)$，$S(0,0,\sqrt{2})$，

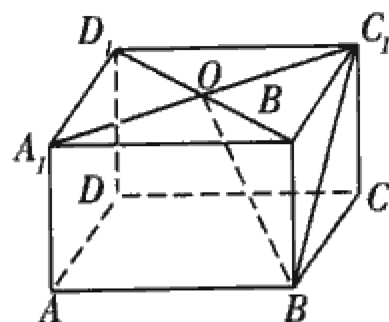
$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{SD}=(-1,-1,-\sqrt{2})$，

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{SD}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{SD}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{SD}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore AE$、SD 所成的角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,故选 C.

4. 选 D.



连结 A_1C_1,设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$,连接 OB.

由已知得 $C_1O\perp$面 BB_1D_1D,$\therefore \angle C_1BO$ 为所求角,

在 $Rt\triangle C_1OB$ 中,得 $\sin\angle C_1BO=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,故选 D.

5. $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

$\because A_1C_1 /\!/ AC$

$\therefore A_1B$ 与 AC 所成角为$\angle BA_1C_1$,记为 θ.

$\because AC=BC=1,\angle ACB=90°$,

$\therefore AB=\sqrt{2}$,

又 $A_1A\perp AB,A_1A=2$.

$\therefore A_1B=\sqrt{6}$.

又 $C_1C=2$. 且 $BC=1$,$\therefore C_1B=\sqrt{5}$.

又 $A_1C=1$,$\therefore \cos\theta=\dfrac{1^2+(\sqrt{6}^2)-(\sqrt{5})^2}{2\times1\times\sqrt{6}}$.

$\therefore \theta=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

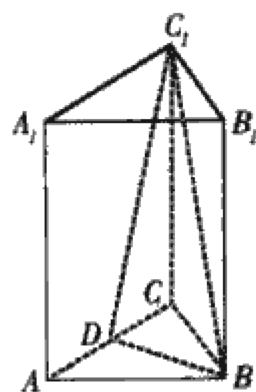
6. $\dfrac{\pi}{6}$.

如图,取 AC 的中点 D,连结 BD、C_1D,由已知,得 $BD\perp AC$.

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$BD\perp$面 AC_1,

$\therefore DC_1$ 为 BC_1 在面 AC_1 上的射影.

$\therefore \angle BC_1D$ 为所求角.



易知 $BD=\dfrac{\sqrt{3}}{2},C_1B=\sqrt{3}$,

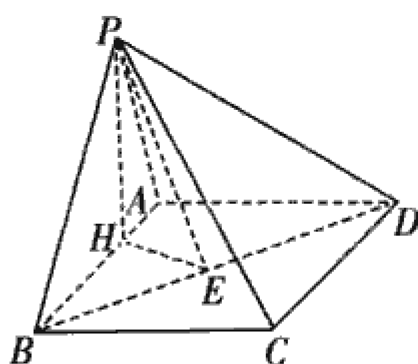
$\therefore \sin\angle BC_1D=\dfrac{BD}{BC_1}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \angle BC_1D=\dfrac{\pi}{6}$.

7. $\frac{\pi}{3}$.

∵底面对角线长为 $2\sqrt{6}$，∴底面边长为 $2\sqrt{3}$，从而利用体积得四棱锥的高为 3，所求二面角的正切为$\frac{高}{底面边长的一半}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. ∴侧面与底面所成二面角为$\frac{\pi}{3}$.

8.【解析】 (Ⅰ)证明：在$\triangle PAD$中，由题设 $PA=2,AD=2,PD=2\sqrt{2}$，可得 $PA^2+AD^2=PD^2$，于是 $AD\perp PA$. 在矩形 $ABCD$ 中，$AD\perp AB$. 又 $PA\cap AB=A$，所以 $AD\perp$平面 PAB.



(Ⅱ)由题设，$BC/\!/AD$，所以$\angle PCB$(或其补角)是异面直线 PC 与 AD 所成的角.

在$\triangle PAB$中，由余弦定理得

$PB=\sqrt{PA^2+AB^2-2PA\cdot AB\cdot\cos\angle PAB}=\sqrt{7}$.

由(Ⅰ)知 $AD\perp$平面 PAB，$PB\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp PB$，因而 $BC\perp PB$，于是$\triangle PBC$是直角三角形，故

$\tan\angle PCB=\frac{PB}{BC}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

所以异面直线 PC 与 AD 所成的角大小为 $\arctan\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(Ⅲ)过点 P 作 $PH\perp AB$ 于 H，过点 H 作 $HE\perp BD$ 于 E，连结 PE.

因为 $AD\perp$平面 PAB，$PH\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp PH$. 又 $AD\cap AB=A$，因而 $PH\perp$平面 $ABCD$，故 HE 为 PE 在平面 $ABCD$ 内的射影. 由三垂线定理可知，$BD\perp PE$. 从而$\angle PEH$是二面角 $P-BD-A$ 的平面角.

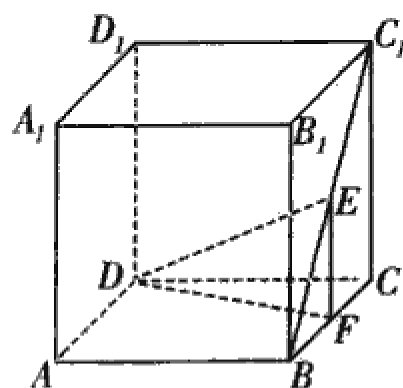
由题设可得 $PH=PA\cdot\sin60^\circ=\sqrt{3}$，$AH=PA\cdot\cos60^\circ=1$，

$BH=AB-AH=2$，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{13}$，

$HE=\frac{AD}{BD}\cdot BH=\frac{4}{\sqrt{13}}$.

于是在 $Rt\triangle PHE$ 中，$\tan\angle PEH=\frac{PH}{HE}=\frac{\sqrt{39}}{4}$.

所以二面角 $P-BD-A$ 的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{39}}{4}$.



9.【解析】 过 E 作 $EF\perp BC$，交 BC 于 F，连结 DF.

∵$EF\perp$平面 $ABCD$.

∴$\angle EDF$是直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成的角.

由题意，得 $EF=\frac{1}{2}CC_1=1$.

$\because CF=\frac{1}{2}CB=1$，$\therefore DF=\sqrt{5}$.

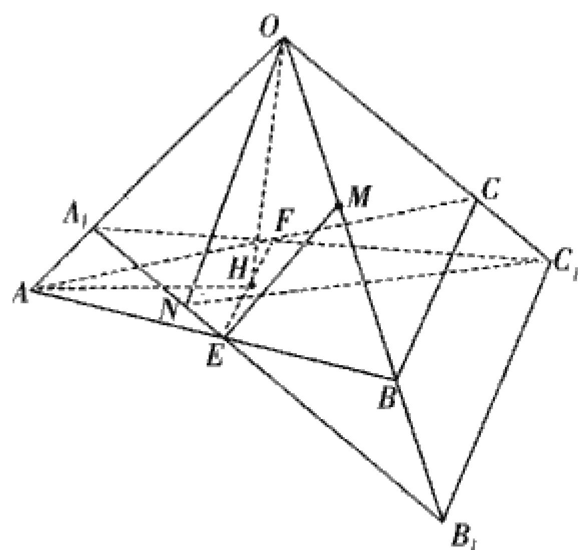
$\because EF\perp DF$，$\therefore \tan\angle EDF=\frac{EE}{DF}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小是 $\arctan\frac{\sqrt{5}}{5}$.

10.【解析】 **解法一**：(Ⅰ)依题设，EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $EF/\!/BC$，则 $EF/\!/$ 平面 OBC，所以 $EF/\!/B_1C_1$.

又 H 是 EF 的中点，所以 $AH\perp EF$，则 $AH\perp B_1C_1$.

因为 $OA\perp OB$，$OA\perp OC$，所以 $OA\perp$ 平面 OBC，则 $OA\perp B_1C_1$，因此 $B_1C_1\perp$ 平面 OAH.



(Ⅱ)作 $ON\perp A_1B_1$ 于 N，连 C_1N.

因为 $OC_1\perp$ 平面 OA_1B_1，根据三垂线定理知 $C_1N\perp A_1B_1$，$\angle ONC_1$ 就是二面角 $O-A_1B_1-C_1$ 的平面角.

作 $EM\perp OB_1$ 于 M，则 $EM/\!/OA$，则 M 是 OB 的中点，

则 $EM=OM=1$.

设 $OB_1=x$，由 $\frac{OB}{MB_1}=\frac{OA_1}{EM}$ 得，$\frac{x}{x-1}=\frac{3}{2}$，解得 $x=3$，

即 $OB_1=OC_1=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OA_1B_1$ 中，$A_1B_1=\sqrt{OA_1^2+OB_1^2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$，

则 $ON=\frac{OA_1\cdot OB_1}{A_1B_1}=\frac{3}{\sqrt{5}}$. 所以 $\tan\angle ONC_1=\frac{OC_1}{ON}=\sqrt{5}$，

故二面角 $O-A_1B_1-C_1$ 的大小为 $\arctan\sqrt{5}$.

解法二：(Ⅰ)以直线 OA、OC、OB 分别为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $A(2,0,0)$，$B(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，

$E(1,0,1)$，$F(1,1,0)$，$H\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

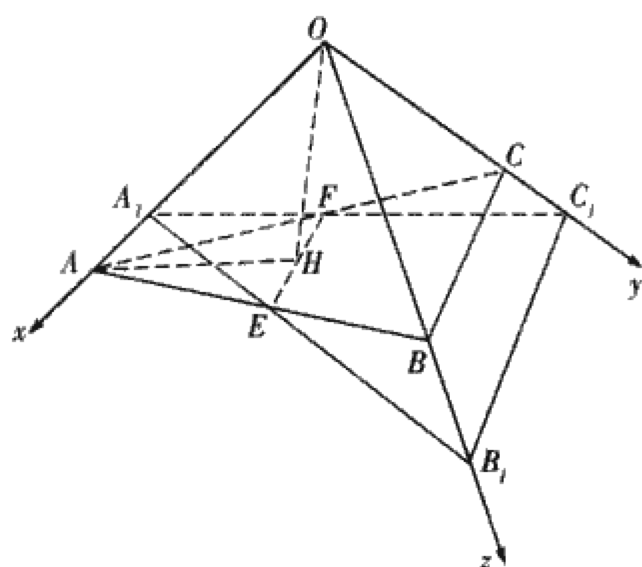
所以 $\overrightarrow{AH}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{OH}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,-2)$.

所以 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

所以 $BC\perp$ 平面 OAH.

由 $EF/\!/BC$ 得 $B_1C_1/\!/BC$，故 $B_1C_1\perp$ 平面 OAH.

（Ⅱ）由已知 $A_1\left(\frac{3}{2},0,0\right)$，设 $B_1(0,0,z)$，则 $\overrightarrow{A_1E}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$，$\overrightarrow{EB_1}=(-1,0,z-1)$.



由 $\overrightarrow{A_1E}$ 与 $\overrightarrow{EB_1}$ 共线得：存在 $\lambda\in\mathbf{R}$ 使 $\overrightarrow{A_1E}=\lambda\overrightarrow{EB_1}$ 得

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}=-\lambda,\\ 1=\lambda(z-1)\end{cases}\Rightarrow z=3,$$

所以 $B_1(0,0,3)$.

同理：$C_1(0,3,0)$.

所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(-\frac{3}{2},0,3\right)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=\left(-\frac{3}{2},3,0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{A_1C_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}-\frac{3}{2}x_1+3z_1=0,\\ -\frac{3}{2}x_1+3y_1=0.\end{cases}$ 令 $x_1=2$ 得 $y_1=z_1=1$.

所以 $\boldsymbol{n}_1=(2,1,1)$.

又 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$ 是平面 OA_1B_1 的一个法向量，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

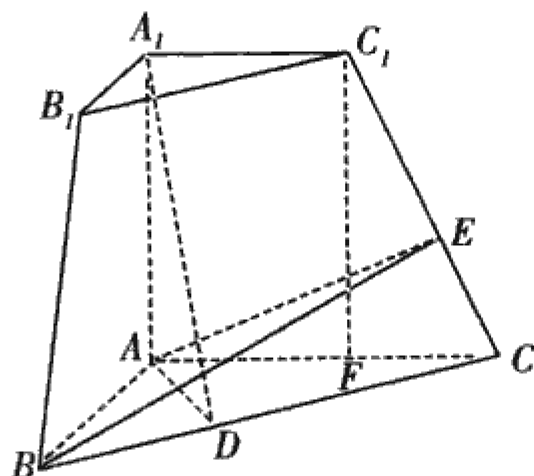
由图可知，所求二面角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

11.【解析】 解法一：(Ⅰ)∵$A_1A\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，

∴$A_1A\perp BC$.

在Rt△ABC中，$AB=\sqrt{2}$，$AC=2$，∴$BC=\sqrt{6}$，

∵$BD:DC=1:2$，∴$BD=\frac{\sqrt{6}}{3}$，又$\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{AB}{BC}$，



∴△DBA∽△ABC，∴$\angle ADB=\angle BAC=90°$，

即$AD\perp BC$.

又$A_1A\cap AD=A$，∴$BC\perp$平面A_1AD，

∵$BC\subset$平面BCC_1B_1，∴平面$A_1AD\perp$平面BCC_1B_1.

(Ⅱ)如上图，作$AE\perp C_1C$交C_1C于E点，连结BE，

由已知得$AB\perp$平面ACC_1A_1，

∴AE是BE在面ACC_1A_1内的射影，

由三垂线定理知$BE\perp CC_1$，

∴$\angle AEB$为二面角$A-CC_1-B$的平面角.

过C_1作$C_1F\perp AC$交AC于F点，

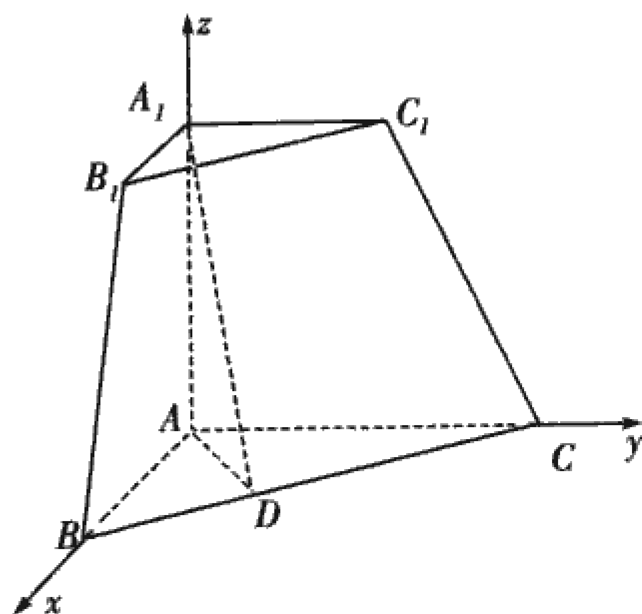
则$CF=AC-AF=1$，$C_1F=A_1A=\sqrt{3}$，∴$\angle C_1CF=60°$，

在Rt△AEC中，$AE=AC\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

在Rt△BAE中，$\tan\angle AEB=\frac{AB}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴$\angle AEB=\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$，即二面角$A-CC_1-B$为$\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解法二：(Ⅰ)如图，建立空间直角坐标系，则$A(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C_1(0,1,\sqrt{3})$.



$\because BD:DC=1:2$，$\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

$\therefore D$ 点坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3},0\right)$.

$\therefore \overrightarrow{AD}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3},0\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{3})$，

$\because \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

$\therefore BC\perp AA_1$，$BC\perp AD$，又 $A_1A\cap AD=A$，

$\therefore BC\perp$ 平面 A_1AD，又 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore$ 平面 $A_1AD\perp$ 平面 BCC_1B_1.

(Ⅱ) $\because BA\perp$ 平面 ACC_1A_1，

取 $\mathbf{m}=\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},0,0)$ 为平面 ACC_1A_1 的法向量，

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n}=(l,m,n)$，

则 $\overrightarrow{BC}\cdot\mathbf{n}=0$，$\overrightarrow{CC_1}\cdot\mathbf{n}=0$，$\therefore \begin{cases}-\sqrt{2}l+2m=0\\-m+\sqrt{3}n=0\end{cases}$

$\therefore l=\sqrt{2}m$，$n=\frac{\sqrt{3}}{3}m$，

如图，可取 $m=1$，则 $\mathbf{n}=\left(\sqrt{2},1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

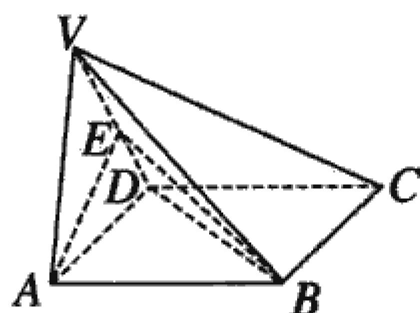
$$\cos<\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}>=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}+0\times1+0\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5},$$

即二面角 $A-CC_1-B$ 为 $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

12. **解法一：**

$$\left.\begin{array}{l}(1)\text{平面 } VAD\perp\text{平面 } ABCD\\ AB\perp AD\\ AB\subsetneq\text{平面 } ABCD\\ AD=\text{平面 } VAD\cap\text{平面 } ABCD\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp\text{平面 } VAD.$$

(2)如右图，取 VD 的中点 E，连结 AE，BE.



$\because \triangle VAD$ 是正三角形，　$\therefore AE\perp VD$，$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$.

$\because AB\perp$ 平面 VAD，　　$\therefore AB\perp AE$.

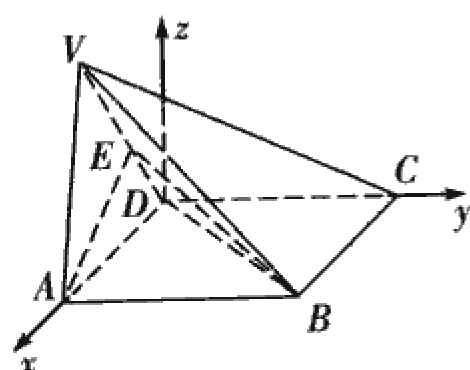
又由三垂线定理知 $BE\perp VD$.

因此，$\angle AEB$ 是所求二面角的平面角.

于是 $\tan\angle AEB=\frac{AB}{AE}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

即得所求二面角的大小为 $\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

解法二 以 D 为坐标原点,建立如右图所示的空间直角坐标系.



(1)不妨设 $A(1,0,0)$,则

$$B(1,1,0),V(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$\overrightarrow{AB}=(0,1,0),\overrightarrow{VA}=(\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{VA}=0$,得 $AB\perp VA$.

又 $AB\perp AD$,因而 AB 与平面 VAD 内两条相交直线 VA,AD 都垂直.

$\therefore AB\perp$平面 VAD.

(2)设 E 为 DV 中点,则 $E(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4})$.

$\therefore\overrightarrow{EA}=\left(\frac{3}{4},0,-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\overrightarrow{EB}=\left(\frac{3}{4},1,-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\overrightarrow{DV}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

由 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{DV}=0$,得 $EB\perp DV$. 又 $EA\perp DV$,

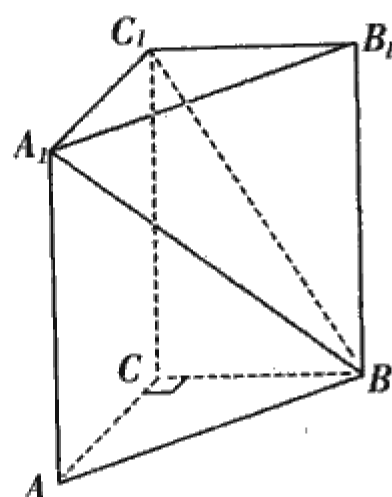
因此,$\angle AEB$ 是所求二面角的平面角.

由 $\cos\langle\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}\rangle=\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{EA}|\cdot|\overrightarrow{EB}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,得所求二面角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$.

13. **解法一**:由题意,可得体积 $V=CC_1\cdot S_{\triangle ABC}=CC_1\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}CC_1$,$\therefore$

$AA_1=CC_1=2$.

连接 BC_1.



$\because A_1C_1\perp B_1C_1,A_1C_1\perp CC_1$,

$\therefore A_1C_1\perp$平面 $BB_{C1}C$.

$\therefore\angle A_1BC_1$ 是直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成的角.

$BC_1=\sqrt{CC_1{}^2+BC^2}=\sqrt{5}$,

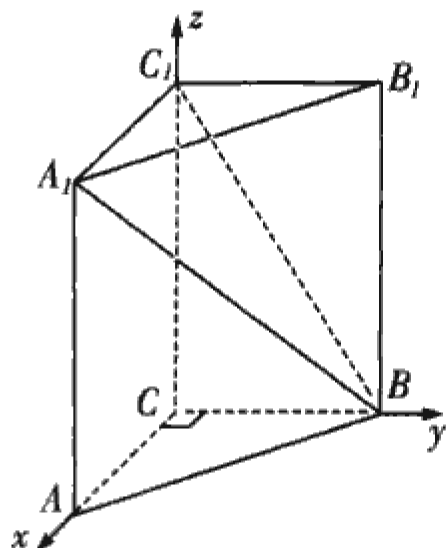
$\because\tan\angle A_1BC_1=\frac{A_1C_1}{BC_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$,则 $\angle A_1BC_1=\arctan\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故直线 A_1B 平面 BB_1C_1C 所成角的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}$.

解法二 由题意,可得体积 $V=CC_1\cdot S_{\triangle ABC}=CC_1\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}CC_1=1$,

$\therefore CC_1=2$.

如图,建立空间直角坐标系,得点 $B(0,1,0)$,$C_1(0,0,2)$,$A_1(1,0,2)$,



则$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$,平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$.

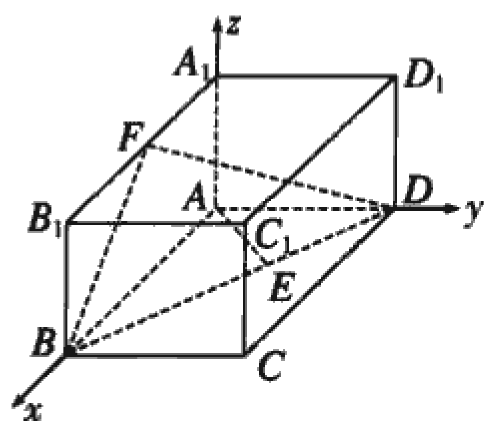
设直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成的角为θ,$\overrightarrow{A_1B}$与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 φ,

则 $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{A_1B}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$,

$\therefore\sin\theta=|\cos\varphi|=\frac{\sqrt{6}}{6}$,$\theta=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$

故直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小为 $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

14. **解法一** 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,以 AB 所在直线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,AA_1 所在直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,如右图.



由已知 $AB=2$,$AA_1=1$,可得 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$F(1,0,1)$. 又 $AD\perp$平面 AA_1B_1B,

从而 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角即为$\angle DBA$,且$\angle DBA=30°$,

又 $AB=2$,$AE\perp BD$,$\therefore AE=1$,$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

从而易得 $E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$D\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$.

(1)$\because\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$\overrightarrow{BF}=(-1,0,1)$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

即异面直线 AE,BF 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2)易知平面 AA_1B 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 BDF 的一个法向量.

$\overrightarrow{BD}=\left(-2,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$.

由$\begin{cases}n\perp\overrightarrow{BF},\\ n\perp\overrightarrow{BD}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BD}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+z=0,\\ 2x-\frac{2\sqrt{3}}{3}y=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=z,\\ \sqrt{3}x=y.\end{cases}$

取$n=(1,\sqrt{3},1)$，得

$$\cos(m,n)=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{\sqrt{3}}{1\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

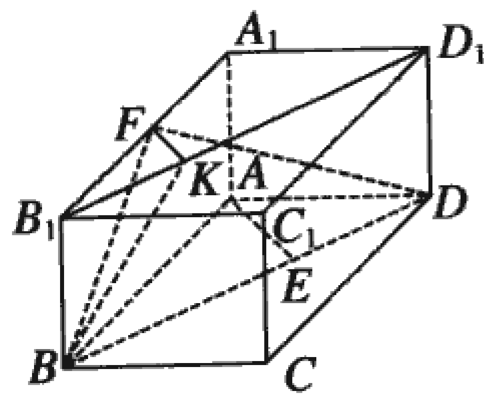
(3)点A到平面BDF的距离，即$\overrightarrow{AB}$在平面BDF的法向量n上的投影的绝对值．所以距离

$$d=\left|\,|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB}\cdot n\rangle\right|$$
$$=\left|\,|\overrightarrow{AB}|\cdot\frac{\overrightarrow{AB}\cdot n}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|n|}\right|$$
$$=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot n|}{|n|}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

所以点A到平面BDF的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

解法二

(1)如右图，连结B_1D_1，过F作B_1D_1的垂线，垂足为K．连结BK.



由于BB_1与两底面$ABCD,A_1B_1C_1D_1$都垂直，得

$$\left.\begin{array}{l}FK\perp BB_1\\ FK\perp B_1D_1\\ B_1D_1\cap BB_1=B_1\end{array}\right\}\Rightarrow FK\perp\text{平面 }BDD_1B_1,$$

又 $$\left.\begin{array}{l}AE\perp BB_1\\ AE\perp BD\\ BB_1\cap BD=B\end{array}\right\}\Rightarrow AE\perp\text{平面 }BDD_1B_1,$$

因此$FK/\!/AE$.

$\therefore\angle BFK$为异面直线BF与AE所成的角．

连结BK，由$FK\perp$面BDD_1B_1得$FK\perp BK$，

从而$\triangle BKF$为$\mathrm{Rt}\triangle$.

在$\mathrm{Rt}\triangle B_1KF$和$\mathrm{Rt}\triangle B_1D_1A_1$中，由$\frac{FK}{B_1F}=\frac{A_1D_1}{B_1D_1}$得

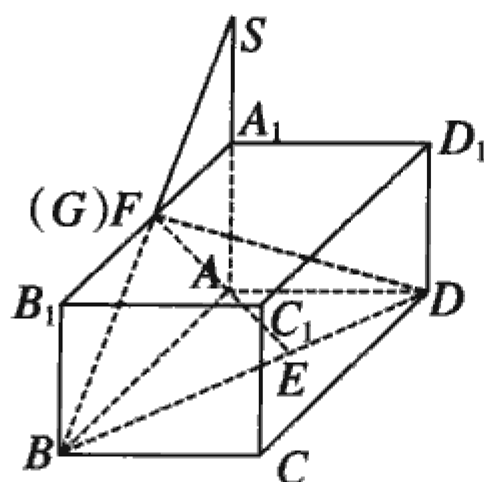
$$FK=\frac{A_1D_1\cdot B_1F}{B_1D_1}=\frac{AD\cdot\frac{1}{2}AB}{BD}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}\times1}{\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{2},$$

又$BF=\sqrt{2}$,

$\therefore \cos\angle BFK=\frac{FK}{BF}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故异面直线 BF 与 AE 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2)由于 $DA\perp$ 面 AA_1B，如右图，由 A 作 BF 的垂线 AG，垂足为 G. 连结 DG，由三垂线定理知 $BG\perp DG$.



$\therefore \angle AGD$ 即为平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角的平面角，且 $\angle DAG=90°$.

在平面 AA_1B 中，延长 BF 与 AA_1 交于点 S.

$\because F$ 为 A_1B_1 的中点，$A_1F \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$，

$\therefore A_1$，F 分别为 SA，SB 的中点，即

$SA=2A_1A=2=AB$，

$\therefore \text{Rt}\triangle BAS$ 为等腰直角三角形，垂足 G 为斜边 SB 的中点，即 F，G 重合.

易得 $AG=AF=\frac{1}{2}SB=\sqrt{2}$.

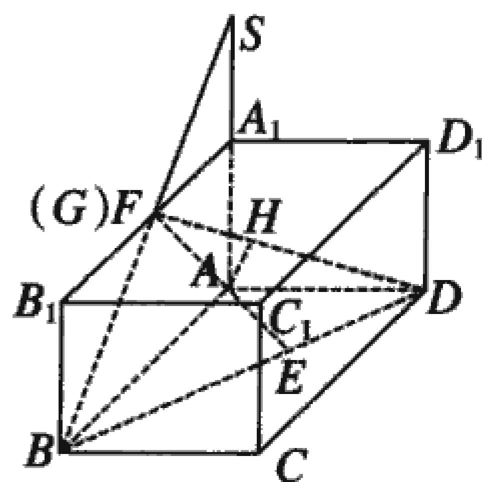
在 $\text{Rt}\triangle AGD$ 中，$AD=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，

$$\therefore \tan\angle AGD=\frac{AD}{AG}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$\therefore \angle AGD=\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$.

即平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角(锐角)的大小为 $\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3)由(2)知平面 AFD 是平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角的平面角所在的平面，



$\therefore$ 面 $AFD\perp$ 面 BDF.

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，由 A 作 $AH\perp DF$ 于 H，如右图，则 AH 即为点 A 到平面 BDF 的距离.

由 $AH\cdot DF=AD\cdot AF$，得

$$AH=\frac{AD\cdot AF}{DF}=\frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

所以点 A 到平面 BDF 的距离为 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

15. **解法一**

(1)∵$BF\perp$平面ACE.

∴$BF\perp AE$.

∵二面角$D-AB-E$为直二面角，且$CB\perp AB$，

∴$CB\perp$平面ABE，从而$CB\perp AE$.

∴$AE\perp$平面BCE.

(2)如图1，连结BD交AC于G，连结FG.

∵正方形$ABCD$边长为2，

∴$BG\perp AC$，$BG=\sqrt{2}$.

∵$BF\perp$平面ACE，由三垂线定理的逆定理$FG\perp AC$.

∴$\angle BGF$是二面角$B-AC-E$的平面角.

由(1)$AE\perp$平面BCE，故$AE\perp EB$.

又∵$AE=EB$.

∴在等腰Rt$\triangle AEB$中，$BE=\sqrt{2}$.

又∵Rt$\triangle BCE$中，

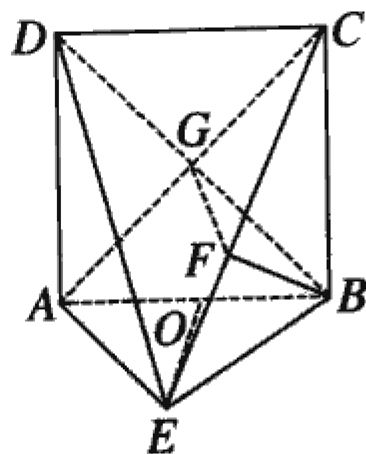
$EC=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{6}$，

$BF=\dfrac{BC\cdot BE}{EC}=\dfrac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴Rt$\triangle BFG$中，

$$\sin\angle BGF=\frac{BF}{BG}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

∴二面角$B-AC-E$等于$\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



(3)过E作$EO\perp AB$交AB于O，$OE=1$.

∵二面角$D-AB-E$为直二面角，

∴$EO\perp$平面$ABCD$.

设D到平面ACE的距离为h，

∵$V_{D-ACE}=V_{E-ACD}$，

∴$\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot EO$.

∵$AE\perp$平面BCD，∴$AE\perp EC$.

$$\therefore h=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot EO}{\frac{1}{2}AE\cdot EC}=\frac{\frac{1}{2}\times2\times2\times1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

∴点D到平面ACE的距离为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

解法二 (1)同解法一.

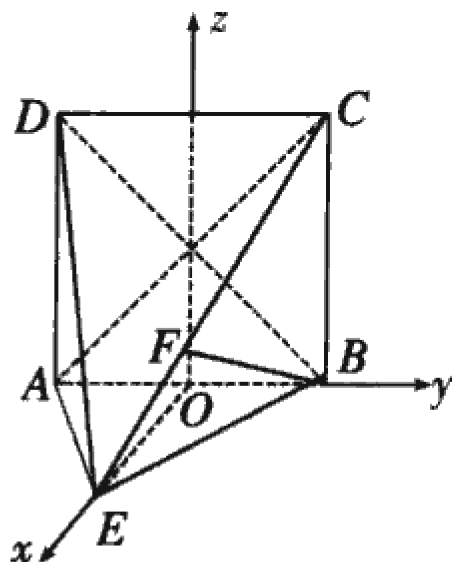
(2)以线段 AB 的中点为原点 O，OE 所在直线为 x 轴，AB 所在直线为 y 轴，过 O 点平行于 AD 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图 2.

$\because AE\perp$面 BCE，$BE\subsetneqq$面 BCE，

$\therefore AE\perp BE$.

在 $Rt\triangle AEB$ 中，$AB=2$，O 为 AB 的中点，

$\therefore OE=1$，



$\therefore A(0,-1,0)$，$E(1,0,0)$，$C(0,1,2)$.

$\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$.

设平面 AEC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}y=-x,\\ z=x.\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$ 是平面 AEC 的一个法向量. 又平面 BAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$二面角 $B-AC-E$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)$\because AD/\!/z$ 轴，$AD=2$，

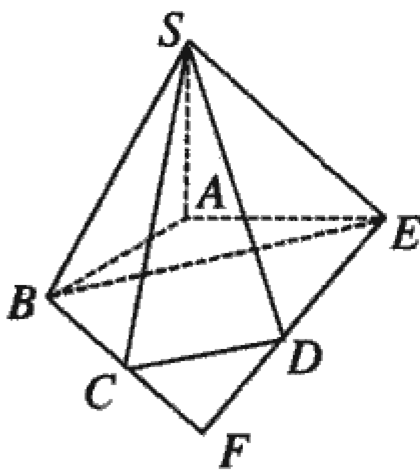
$\therefore \overrightarrow{AD}=(0,0,2)$.

$\therefore$点 D 到平面 ACE 的距离为

$d=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

16. **解法一**

(1)如右图，连结 BE，延长 BC，ED 交于点 F，则 $\angle DCF=\angle CDF=60^\circ$，



$\therefore\triangle CDF$ 为正三角形，$\therefore CF=DF$.

又 $BC=DE$，$\therefore BF=EF$，

因此，$\triangle BFE$ 为正三角形，

$\therefore\angle FBE=\angle FCD=60^\circ$，

$\therefore BE/\!/CD$，

所以$\angle SBE$(或其补角)就是异面直线 CD 与 SB 所成的角.

$\because SA\perp$底面 $ABCDE$，且 $SA=AB=AE=2$，

$\therefore SB=2\sqrt{2}$，同理 $SE=2\sqrt{2}$.

又$\angle BAE=120^\circ$，所以 $BE=2\sqrt{3}$.

从而 $\cos\angle SBE=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\angle SBE=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$.

所以异面直线 CD 与 SB 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2)由题意，$\triangle ABE$ 是等腰三角形，$\angle BAE=120°$，所以 $\angle ABE=30°$. 又 $\angle FBE=60°$，

$\therefore \angle ABC=90°$，所以 $BC\perp BA$.

$\because SA\perp$ 底面 $ABCDE$，$BC\subsetneqq$ 底面 $ABCDE$，

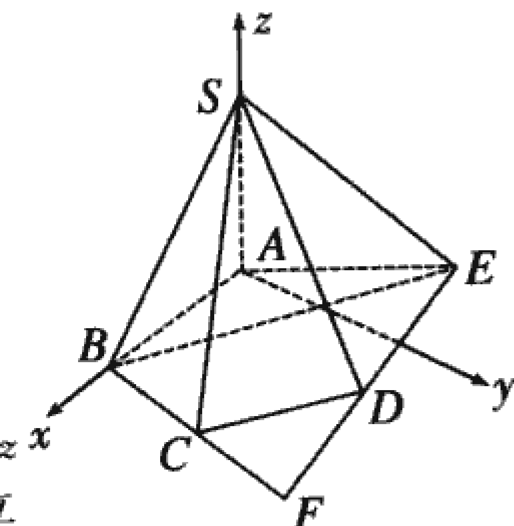
$\therefore SA\perp BC$，又 $SA\cap BA=A$，

$\therefore BC\perp$ 平面 SAB.

(3)二面角 $B-SC-D$ 的大小为 $\pi-\arccos\frac{7\sqrt{82}}{82}$.

解法二

(1)如右图，连结 BE，延长 BC，ED 交于点 F，



则 $\angle DCF=\angle CDF=60°$，

$\therefore \triangle CDF$ 为正三角形，$\therefore CF=DF$.

又 $BC=DE$，$\therefore BF=EF$.

故 $\triangle BFE$ 为正三角形.

因为 $\triangle ABE$ 是等腰三角形，且 $\angle BAE=120°$，

$\therefore \angle ABC=90°$.

以 A 为原点，AB，AS 边所在的直线分别为 x 轴，z 轴，以平面 ABC 内垂直于 AB 的直线为 y 轴，建立空间直角坐标系，如图 2，则

$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$S(0,0,2)$，

$C(2,\sqrt{3},0)$，$D\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，

于是 $\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BS}=(-2,0,2)$，

则 $\cos(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BS})=\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BS}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{BS}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BS})=\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore$ 异面直线 CD 与 SB 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2) $\because \overrightarrow{BC}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{SA}=(0,0,-2)$，

$\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=(0,3,0)\cdot(2,0,0)=0$，

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{SA}=(0,3,0)\cdot(0,0,-2)=0$，$\therefore BC\perp AB$，$BC\perp SA$.

$\because AB\cap SA=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 SAB.

(3)二面角 $B-SC-D$ 的大小为 $\pi-\arccos\frac{7\sqrt{82}}{82}$.

第十四章 折叠、展开与割补 空间变换建奇功

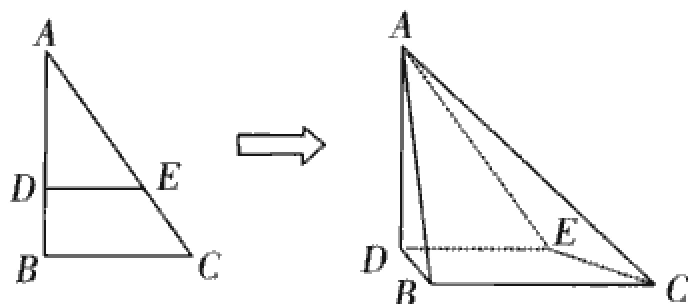
立体几何的学习是平面几何学习的延续和发展，空间图形与平面图形之间存在着紧密的联系. 特别是将平面图形折叠成立体图形、将立体图形展开成平面图形. 这些问题使二者之间的联系更为突出，因此也成为高考命题者的关注之点，而割补思想是解有关立体几何题的常用方法与技巧.

一、折叠

解题秘言：将平面图形折叠成立体图形，应注意折叠之后，哪些量发生了变化，哪些量没有发生变化，特别应注意寻找折叠前后的那些不变关系和不变量.

例 1 (2008 年重庆高考理 · T19)如图，在$\triangle ABC$中，$B=90°$，$AC=\frac{15}{2}$，D、E两点分别在AB、AC上，使$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$，$DE=3$. 现将$\triangle ABC$沿$DE$折成直二面角. 求：(1)异面直线$AD$与$BC$的距离；

(2)二面角$A-EC-B$的大小(用反三角函数表示).

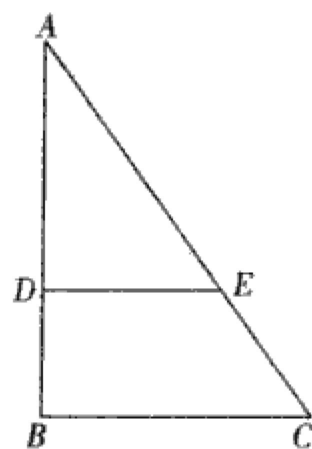


【规范解析】 (1)在图(1)中，

$\because \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

$\therefore DE /\!/ BC$，

又$\because B=90°$，$\therefore AD \perp DE$.



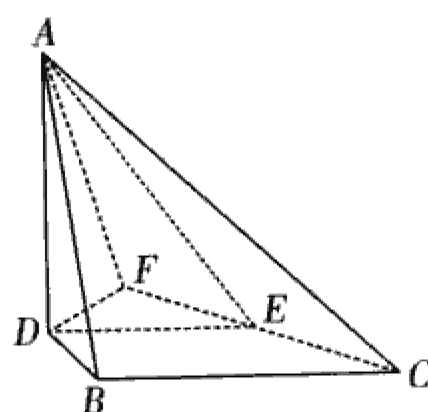
在图(2)中，

$\because$二面角$A-DE-B$是直二面角，

$\therefore AD \perp DE$，

$\therefore AD \perp$底面$DBCE$，$\therefore AD \perp DB$，

又$\because DB \perp BC$，$\therefore DB$是异面直线AD，BC的公垂线段.



在图(1)中，

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$，

$\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$，

又$\because DE=3$，

$\therefore BC=\frac{3}{2}DE=\frac{9}{2}$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{(\frac{15}{2})^2-(\frac{9}{2})^2}=6$，

$\because \frac{DB}{AB}=\frac{1}{3}$，$\therefore DB=2$，

∴异面直线 AD，BC 的距离为 2.

(2)在图(2)中，过 D 作 $DF\perp CF$，交 CE 的延长线于 F，连接 AF.

由(1)知，$AD\perp$底面 $DBCE$，由三垂线定理知 $AF\perp FC$，

$\therefore \angle AFD$ 为二面角 $A-EC-B$ 的平面角，

在底面 $DBCF$ 中，$\angle DEF=\angle BCE$，

$DB=2$，$EC=\frac{1}{3}\times\frac{15}{2}=\frac{5}{2}$，

$\therefore \sin\angle BCE=\frac{DB}{EC}=\frac{4}{5}$，

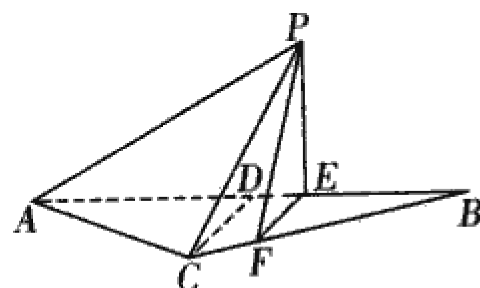
∴在 $Rt\triangle DEF$ 中，$DE=3$，

$DF=DE\cdot\sin\angle DEF=DE\cdot\sin\angle BCE=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$，

在 $Rt\triangle AFD$ 中，$AD=4$，$\tan\angle AFD=\frac{AD}{DF}=\frac{5}{3}$，

∴所求二面角 $A-EC-B$ 的大小为 $\arctan\frac{5}{3}$.

例 2 (2007 年广东高考理·T19)如右图所示，等腰$\triangle ABC$ 的底边 $AB=6\sqrt{6}$，高 $CD=3$. 点 E 是线段 BD 上异于点 B、D 的动点. 点 F 在 BC 边上，且 $EF\perp AB$. 现沿 EF 将$\triangle BEF$ 折起到$\triangle PEF$ 的位置，使 $PE\perp AE$. 记 $BE=x$，$V(x)$表示四棱锥 $P-ACEF$ 的体积.



(Ⅰ)求 $V(x)$的表达式；

(Ⅱ)当 x 为何值时，$V(x)$取得最大值?

(Ⅲ)当 $V(x)$取得最大值时，求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值.

【规范解析】（Ⅰ）$\because EF\perp AB$，$\therefore EF\perp PE$.

又$\because PE\perp AE$，$EF\cap AE=E$，且 PE 在平面 $ACFE$ 外，

$\therefore PE\perp$平面 $ACFE$. $\because EF\perp AB$，$CD\perp AB$，$\therefore EF/\!/CD$.

$\therefore \frac{EF}{CD}=\frac{x}{BD}\Rightarrow EF=\frac{CD}{BD}x=\frac{x}{\sqrt{6}}$.

所以四边形 $ACFE$ 的面积

$S_{ACFE}=S_{\triangle ABC}S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{6}\times 3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}x^2$

$=9\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$.

$\because$四棱锥 $P-ACFE$ 的体积

$V_{P-ACFE}=\frac{1}{3}S_{ACFE}\cdot PE=3\sqrt{6}x-\frac{1}{6\sqrt{6}}x^3$.

即 $V(x)=3\sqrt{6}x-\frac{1}{6\sqrt{6}}x^3\,(0<x<3\sqrt{6})$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $V'(x)=3\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2$.

令 $V'(x)=0\Rightarrow x=6$.

$\because$当 $0<x<6$ 时，$V'(x)>0$，当 $6<x<3\sqrt{6}$ 时，$V'(x)<0$.

$\therefore$当 $BE=x=6$ 时，$V(x)$有最大值，最大值为 $V(6)=12\sqrt{6}$.

（Ⅲ）**解法一**：如图，以点 E 为坐标原点，向量$\overrightarrow{EA}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{EP}$分别为 x,y,z 轴的正向建立空间直角坐标系.

则 $E(0,0,0)$，$P(0,0,6)$，$F(0,\sqrt{6},0)$，$A(6\sqrt{6}-6,0,0)$，

$C(3\sqrt{6}-6,3,0)$.

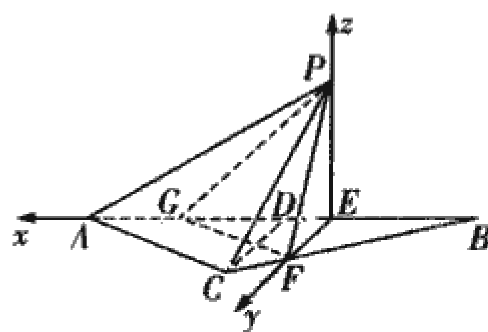
于是$\overrightarrow{AC}=(-3\sqrt{6},3,0)$，$\overrightarrow{PF}=(0,\sqrt{6},-6)$.

AC 与 PF 所成角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PF}|}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{54+9+0}\sqrt{0+6+36}}=\frac{1}{7}.$$

$\therefore$异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值为$\frac{1}{7}$.

解法二：过点 F 作 $FG/\!/AC$ 交 AE 于点 G，连结 PG，则$\angle PFG$为异面直线 AC 与 PF 所成的角.



$\because\triangle ABC$是等腰三角形，

$\therefore\triangle GBF$也是等腰三角形.

于是 $FG=BF=PF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{42}$，

从而 $PG=\sqrt{PE^2+CE^2}=\sqrt{BE^2+BE^2}=6\sqrt{2}$.

在$\triangle GPF$中,根据余弦定理得

$\cos\angle PFC=\dfrac{PF^2+FG^2-PG^2}{2PF\cdot FG}=\dfrac{1}{7}$.

故异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值为$\dfrac{1}{7}$.

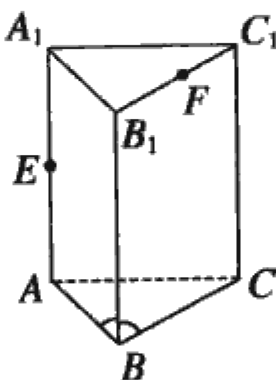
【解后感言】 把平面图形的垂直关系运用到空间图形中,将空间线段长度放到平面中去计算,常可使问题得以顺利解决.一般折叠问题中,常常作出两种图形以帮助分析.

由已知条件正确理解立体图形中各已知量间的关系是解决折叠问题至关重要的一步.根据图形中的垂直关系,恰当地建立空间直角坐标系,用空间向量的方法来解决立体几何问题.使得"几何型"思维与"代数型"思维相得益彰,提高解决问题的效率.

二、展　开

解题秘言:对于立体几何中的有些问题,我们常用展开其表面的方法来研究.

例1 如右图所示,在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC=\sqrt{2}$,$BB_1=2$,$\angle ABC=90°$,E,F 分别为 AA_1,C_1B_1 的中点沿棱柱的表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为________.



【解】 展开图分别有如下四种情况

①沿 B_1B 剪开:

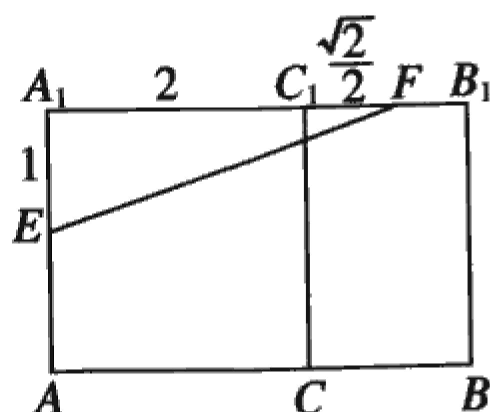


图 1

$EF=\sqrt{1^2+\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{11}{2}+2\sqrt{2}}$

②沿 C_1C 剪开:

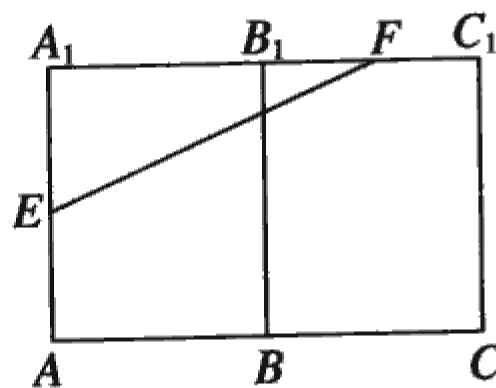


图 2

$EF=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}$

$=\sqrt{\dfrac{11}{2}}$

③将上底面沿 A_1B_1 折起.

④将上底面沿 A_1C_1 折起

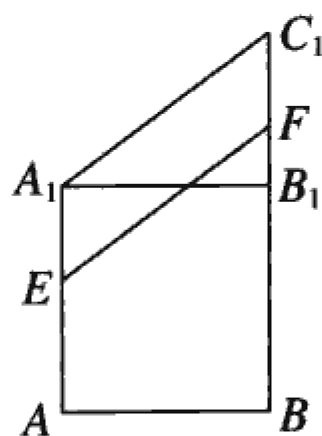


图 3

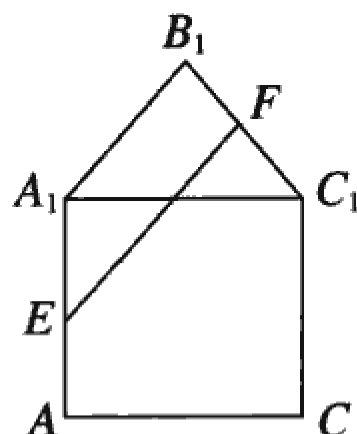


图 4

$$EF=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{7}{2}+\sqrt{2}}$$

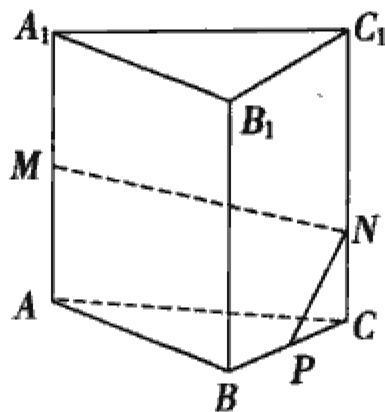
$$EF=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

∴所求最短距离为$\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

【解后感言】 解决本题的突破口，在于考虑清楚有几种展开方式和图形的各种变化，正确展开图形后注意利用展开前后的不变关系和不变量是解本题的关键.

设法展开立体图的表面或侧面，化多面体表面上两点间的最短距离为平面上两点间的最短距离来计算，是处理这类问题的基本思路.

例 2 如图所示，在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=3$，$AA_1=4$，M 为 AA_1 的中点，P 为 BC 上一点. 且由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线长为 $\sqrt{29}$，设这条最短路线与 CC_1 的交点为 N，求：

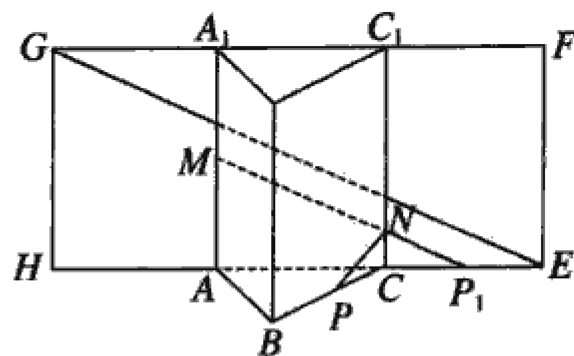


(Ⅰ)该三棱柱的侧面展开图的对角线长；

(Ⅱ)PC 和 NC 的长；

(Ⅲ)平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角(锐角)的大小(用反三角函数表示).

【解】 (Ⅰ)如图所示. ∵三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是正三棱柱

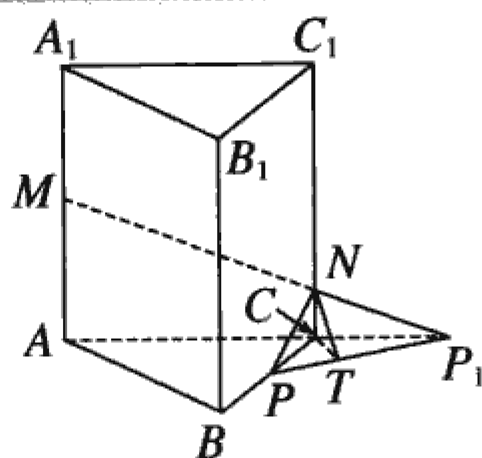


∴侧面展开图 $EFGH$ 是矩形，且 $HE=3AB$

∵$AA_1=4$，$AB=3$ ∴$GH=4$，$EH=9$.

由勾股定理，可得侧面展开图的对角线

$$EG=\sqrt{GH^2+EH^2}=\sqrt{97}.$$



(Ⅱ)如图所示，将侧面 BCC_1B_1 绕侧棱 CC_1 旋转$\frac{2\pi}{3}$，使它与侧面 ACC_1A_1 在同一个平面，点 P 对应 P_1 的位置，连结 MP_1.

由线段公理可知：P_1M 的长就是“由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线长.”

设 $PC=x$，则 $P_1C=x$.

在 $Rt\triangle MAP_1$ 中，由勾股定理可得，

$MP_1=\sqrt{MA^2+AP_1^{\ 2}}$.

$\therefore 29=2^2+(3+x)^2$　求得 $x=2$

$\therefore P_1C=PC=2$

$\because AM /\!/ CN$　$\therefore \frac{CN}{AM}=\frac{CP_1}{AP_1}=\frac{2}{5}$　$\therefore NC=\frac{4}{5}$

(Ⅲ)连结 P_1P　$\therefore P_1P$ 是平面 MNP 与平面 ABC 的交线.

作 $CT\perp PP_1$，连结 NT　$\because NC\perp$ 平面 ABC.

由三垂线定理可得 $NT\perp PP_1$

$\therefore \angle CTN$ 是二面角 $M\text{-}PP_1\text{-}A$ 的平面角

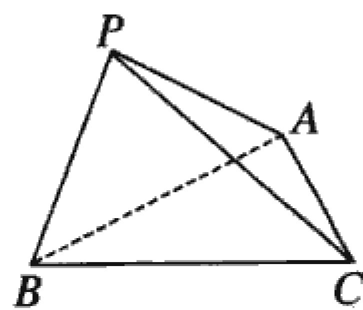
在$\triangle PCP_1$ 中，$\angle PCP_1=\frac{2\pi}{3}$，$PC=P_1C=2$　$\therefore CT=1$

在 $Rt\triangle NCT$ 中，$\tan\angle CTN=\frac{CN}{CT}=\frac{4}{5}$

$\therefore$二面角 $M\text{-}PP_1\text{-}A$ 的大小为 $\arctan\frac{4}{5}$.

【解后感言】 本题第(Ⅰ)问中正棱柱的侧面展开图为矩形.第(Ⅱ)问的解法是处理“最短路线长”问题的通法.通过对图形展开问题的测试，考查空间想象能力，逻辑推理能力和转化能力，使得空间图形的问题转化为平面问题来解决.

例 3　将三棱锥 $P\text{-}ABC$(如图所示)沿三条侧棱剪开后，展开成如图所示的形状，其中 P_1,B,P_2 共线，P_2,C,P_3 共线，且 $P_1P_2=P_2P_3$，则在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，PA 与 BC 所成的角的大小是________.



【解】 连 P_2A 交 BC 于 D.

$\because P_1P_2=P_2P_3$，$P_2A=P_2A$，$P_1A=P_3A$

$\therefore \triangle P_2P_1A\cong\triangle P_2P_3A$　故$\angle P_1=\angle P_3$

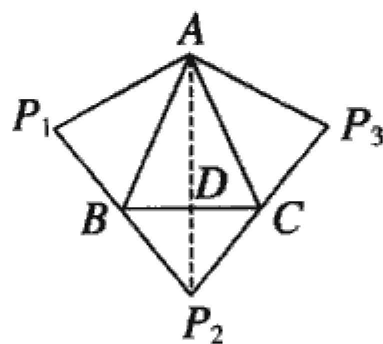
又 $P_1B=\frac{1}{2}P_1P_2=P_3C$，$P_1A=P_3A$

$\therefore \triangle ABP_1\cong ACP_3$　$\therefore AB=AC$.

又由 $P_2B=P_2C$ 知 $BC\perp AD$，$BC\perp P_2D$

$\therefore$在右图中，$BC\perp$面 PAD　$\therefore BC\perp PA$.

故应填$\frac{\pi}{2}$.

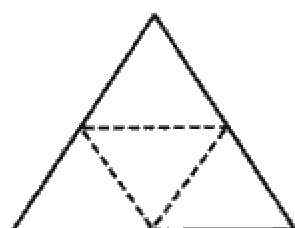


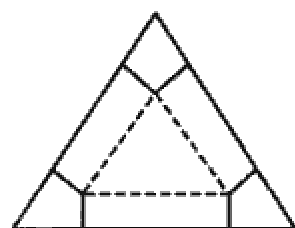
【解后感言】 本题是将立体几何问题放在平面图中去研究，这也是一种常用技巧.有时，展开与折叠就是一种互逆的图形变化过程，要注意利用变化前后的不变关系和不变量.

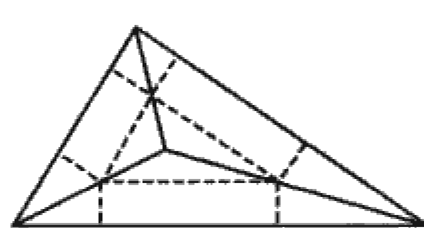
例 4 （Ⅰ）给出两块相同的正三角形纸片（如图(1)(2)），要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型，另一块剪拼成一个正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等.请设计一种剪拼方法，分别用线条标示在图(1)(2)中，并作简要的说明；

（Ⅱ）试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小；

（Ⅲ）如果给出的是一块任意三角形的纸片（如图(3)）要求剪拼成一个直三棱柱模型，使它的全面积与给出的三角形的面积相等，请设计一种剪拼方法，用线条标示在图(3)中，并作简要的说明.


(1)


(2)


(3)

【解】 （Ⅰ）如图(1)，沿正三角形三边中点连线折起，可拼成一个正三棱锥.

如图(2)，正三角形三个角剪出三个相同的四边形，使每个四边形较长的一组邻边长为三角形边长的$\frac{1}{4}$，并有一组对角为直角.余下部分按虚线折起可成为一个缺上底的正三棱柱，而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个正三棱柱的上底.

（Ⅱ）依上面剪拼的方法，有$V_{柱}>V_{锥}$，具体推理如下：

设给出正三角形纸片的边长为2，则正三棱锥与正三棱柱的底面都是边长为1的正三角形，其面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，现在计算它们的高：

$$h_{锥}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3},h_{柱}=\frac{1}{2}\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore V_{锥}-V_{柱}=\left(\frac{1}{3}h_{锥}-h_{柱}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{2}-3}{24}<0$$

$$\therefore V_{柱}>V_{锥}$$

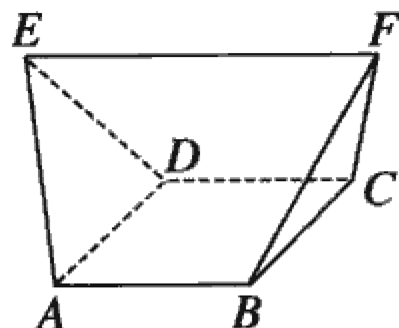
（Ⅲ）如图(3)，分别连结三角形的内心与各顶点，得到三条线段，再以这三条线段的中点为顶点作三角形，以新作的三角形为直棱柱的底面，过新三角形的三个顶点向原三角形三边作垂线，沿六条垂线剪下三个四边形，可以拼接成直三棱柱的上底，余下部分按虚线折起，成为一个缺上底的直三棱柱，即得到直三棱柱的模型.

【解后感言】 本题主要考查空间想象能力、动手操作能力和灵活运用所学知识解决实际问题的能力，这也是今后高考命题的发展方向，解好此类问题的关键是对

折叠和展开这两个互逆过程都有较好的认识.能将平面图形折叠成相应的立体图形,同时也能将立体图形展开成平面图形,这需要对图形有较强的空间立体感及丰富的空间想象力.

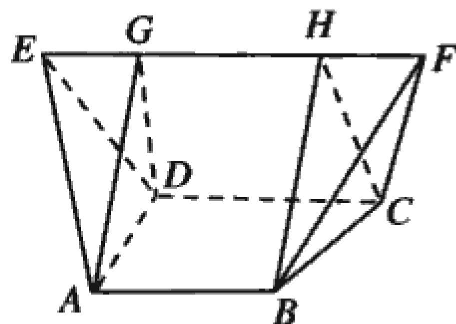
三、割　补

解题秘言:在立体几何中,巧妙地对几何体实施割或补,能变整体为局部、化不规则为规则,利于我们研究问题、解决问题.



例1 如图所示,在多面体 $ABCDEF$ 中已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,且$\triangle ADE$,$\triangle BCF$ 均为正三角形,$EF /\!/ AB$,$EF=2$,则该多面体的体积为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

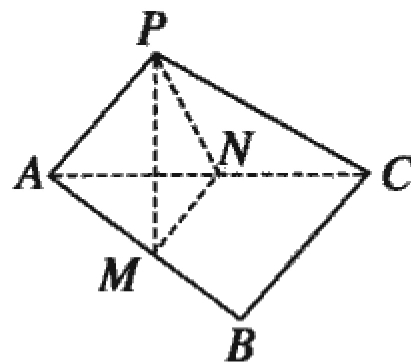


【解】 如图,分别过 A、B 作 EF 的垂线,垂足分别为 G、H,连结 DG、CH,容易求得 $EG=HF=\frac{1}{2}$,$AG=CD=BH=HC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore S_{\triangle AGD}=S_{\triangle BHC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\therefore V=V_{E-ADG}+V_{F-BHC}+V_{ACD-BHC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{3}$.选 A.

【解后感言】 本题采用了切割方法,分已知多面体为三个小三棱锥,然后利用等积法化归为求 $V_{E\text{-}ABD}$ 使问题巧妙获解.像这种不规则的多面体一般都用割、补法化为规则图形.这说明解立体几何题认真观察图形,并充分发挥空间想象能力是非常重要的.



例2 如图所示,在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,$PA=a$,$AB=AC=2a$,$\angle PAB=\angle PAC=\angle BAC=60°$,求三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积.

【解】 取 AB,AC 的中点 M,N,则 $AM=AN=a$.

连 PM,PN.

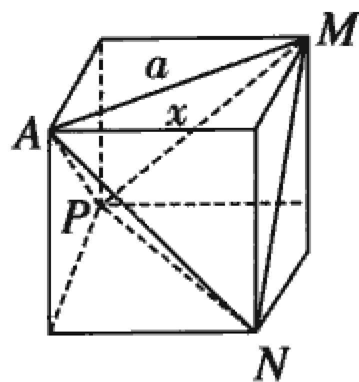
$\because PA=AM=a$,$\angle PAM=60°$

$\therefore \triangle PAM$ 为等边三角形,即 $PM=a$

同理 $PN=a$,$MN=a$

$\therefore$三棱锥 $P\text{-}AMN$ 是棱长为 a 的正四面体.

将此正四面体补成棱长为 x 的正方体(如图所示),则 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$,于是



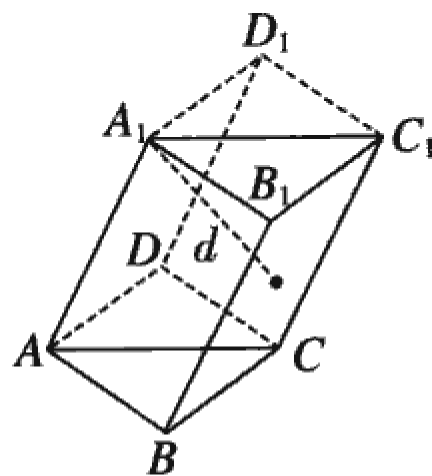
$$V_{正方体}=x^3=\left(\frac{a^3}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$$

$$\therefore V_{P\text{-}AMN}=\frac{1}{3}V_{正方体}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\therefore V_{P\text{-}ABC}=4V_{P\text{-}AMN}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

【解后感言】 这里将正四面体补成正方体,使问题迅速获解,是常用技巧.当直接求解几何体的体积有困难时,可考虑将该几何体补整为另一个体积比较容易计算的几何体,再根据这两个几何体体积之间的关系求得所求几何体的体积.另外我们多角度、多方位地审视本题条件,会发现还可延长 AP 至 Q,使 $AQ=2a$,使三棱锥 $Q\text{-}ABC$ 成为棱长为 $2a$ 的正四面体,此种方法也很简单.

例3 如图所示,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 BCC_1B_1 的面积为 S,与它相对的侧棱 AA_1 与它的距离为 d.试求该三棱柱的体积.



【解】 将三棱柱补成平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,若以侧面 BCC_1B_1 为底面,则相应的高等于 AA_1 到平面 BCC_1B_1 的距离 d.

$\therefore V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=Sd$

又 $V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=V_{ACD\text{-}A_1C_1D_1}$

$\therefore V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{2}Sd$

【解后感言】 斜三棱柱补成平行六面体或扶斜柱体为直柱体也是处理这类问题的常用技巧.

例4 三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的底面是 Rt$\triangle ABC$,斜边 $AB=10$,侧面 PAB 和 PAC 垂直于底面,它们的二面角是 30°,侧面 PBC 和底面成 60°角,求三棱锥相对棱 AC 和 PB 间的距离.

【解】 如图所示,把 Rt$\triangle ACB$ 补成矩形 $ACBD$,连 PD.

$\because AC/\!/BD$ $\therefore AC/\!/$平面 PBD

$\therefore AC$ 和 PB 间的距离即 AC 和平面 PBD 的距离,也即 A 点到平面 PBD 的距离.

$\because BD\perp AD, BD\perp PA$

∴$BD\perp$平面PAD

∴平面$PBD\perp$平面PAD.

作$AE\perp PD$于E,则$AE\perp$平面PBD.

在Rt△PAD中,$AE=\dfrac{PA\cdot AD}{PD}$.

∵$BC\perp AC$, $PA\perp$平面ABC,由三垂线定理知$BC\perp PC$,

∴$\angle PCA$即为平面PBC与底面所成的角.

∴$\angle PCA=60^\circ$

又$PA\perp AB$,$PA\perp AC$,

∴$\angle BAC$即二面角B-PA-C的平面角, ∴$\angle BAC=30^\circ$

在Rt△ACB中,$AB=10$, ∴$BC=5$,$AC=5\sqrt{3}$

∴在Rt△PAD中,$PA=15$,$PD=\sqrt{15^2+5^2}=5\sqrt{10}$

∴$AE=\dfrac{15\times5}{5\sqrt{10}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$

即AC和PB间的距离是$\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$.

【解后感言】 异面直线间的距离,通常转化为线面间的距离乃至点面间的距离来求,补形则可以为作出这段距离提供立"足"之点.

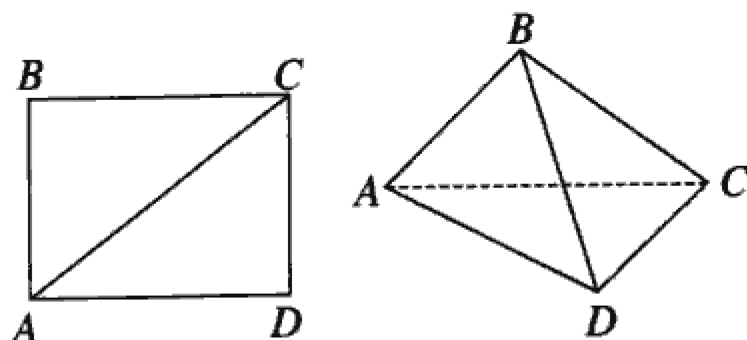
实战秘修十四

1. 矩形$ABCD$中,$AB=4$,$BC=3$,沿AC将矩形$ABCD$折成一个直二面角B-AC-D,则四面体$ABCD$的外接球的体积为 ( )

A. $\dfrac{125}{12}\pi$ B. $\dfrac{125}{9}\pi$ C. $\dfrac{125}{6}$ D. $\dfrac{125}{3}\pi$

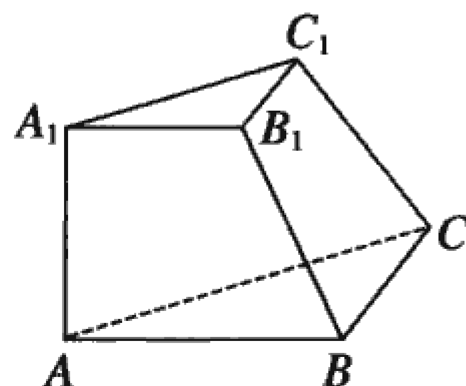
2. 长方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中,$AB=3$,$BC=2$,$BB_1=1$,由A到C_1在长方体表面上的最短距离为________.

3. 把长、宽各为4,3的长方形$ABCD$沿对角线AC折成直二面角B-AC-D,则顶点B和D的距离为 ( )

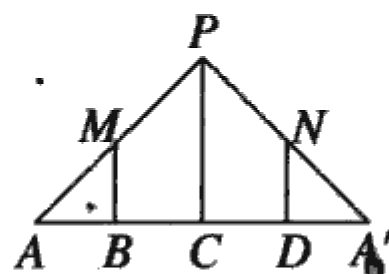


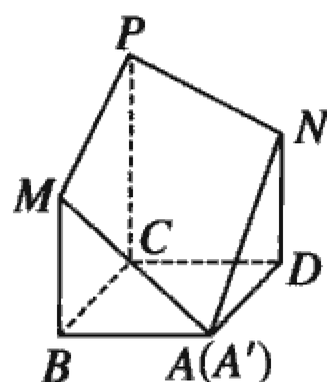
A. $\dfrac{\sqrt{637}}{5}$ B. 5 C. $\dfrac{\sqrt{337}}{5}$ D. $\dfrac{12}{5}$

4. 如下图,在三棱台 $A_1B_1C_1\text{-}ABC$ 中,已知
$A_1A\perp$底面 ABC,$A_1A=A_1B_1=B_1C_1=a$,
$B_1B\perp BC$,且 B_1B 和底面 ABC 所成的角是 $45°$,求这个棱台的体积.



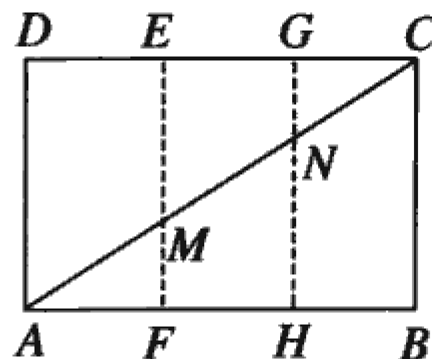
5. 已知一等腰直角$\triangle PAA'$的斜边 $AA'=4a$,B,C,D 为线段 AA' 的三个四等分点,BM,DN 垂直 AA',分别与 PA,PA' 交于 M,N 点.若以 BM,CP,DN 为折痕把$\triangle PAA'$折成一个下底为正方形 $ABCD$ 的几何体,使 A 与 A' 重合.求这个几何体的体积.



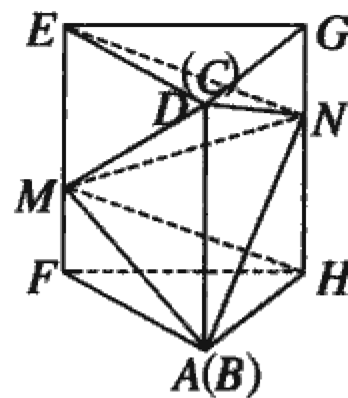


6. 正三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的底面边长为 a,侧棱长为 $2a$,过 A 点作与侧棱 PB,PC 相交的截面 AEF,求这截面周长的最小值.

7. 如图(a),长方形 $ABCD$ 中,$BC=a$,$AB=2\sqrt{3}a$,把这个长方形折成正三棱柱,使 AD 和 BC 重合,而长方形的对角线 AC 与折痕 EF,GH 分别交于 M,N,如图(b).在三棱柱 $AFH\text{-}DEG$ 中:



(a)



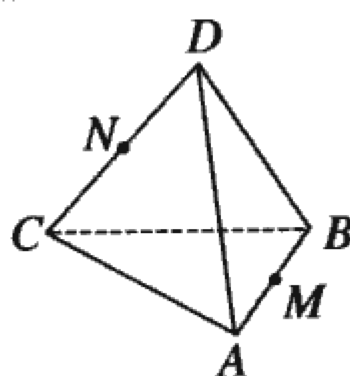
(b)

(1)求异面直线 AM 和 EN 所成的角;

(2)求平面 AMN 和底面 AFH 所成的二面角;

(3)求点 D 到平面 AMN 的距离.

8. 如右图，已知在四面体 A-BCD 中，面 ABC 及面 BCD 都是边长为 $2a$ 的等边三角形，且 $AD=2\sqrt{2}a$，M，N 分别是棱 AB 与 CD 的中点，则 M 与 N 在四面体表面上的最短距离是多少？

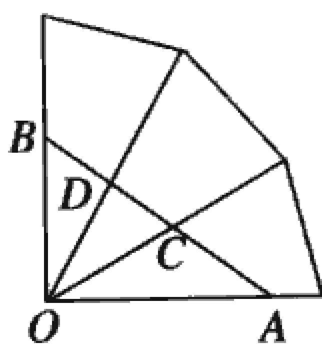


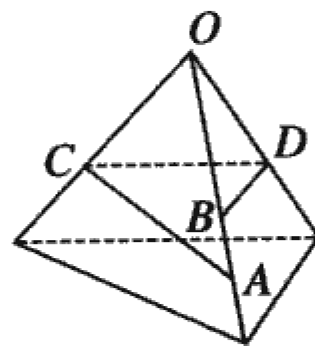
9. 已知，斜三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的各条棱长都为 2，侧棱与底面所成的角为 60°，且侧面 $ABB_1A_1\perp$底面 ABC.
(1)证明：$B_1C\perp AC_1$；
(2)求三棱锥 B_1-ABC_1 的体积.

10. 已知，在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，M 是 CC_1 的中点. 证明：$AB_1\perp A_1M$.

11. 在圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 中有一内接$\triangle ABC$，$AC/\!/x$ 轴，且角 A，B，C 满足关系：$\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B+\sin A\cdot\sin B=2$. 设 AB，BC 与 x 轴分别交于 M，N 点，若把坐标平面沿 x 轴折成 60°的二面角，连 BC，BA，求此时 N 点到平面 AMB 的距离.

12. 一正三棱锥的侧面展开图如下图所示. $\angle AOB=90°$，$OA=4$，$OB=3$，AB 分别交棱于 C，D 点，求在正三棱锥表面上，异面直线 BD 与 AC 所成角的余弦值.



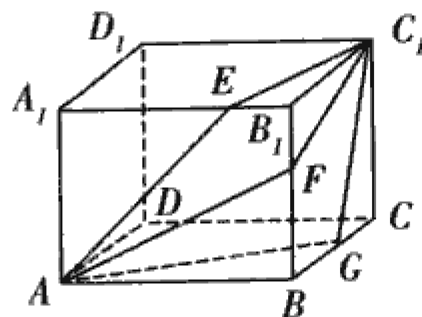


实战秘修十四答案与提示

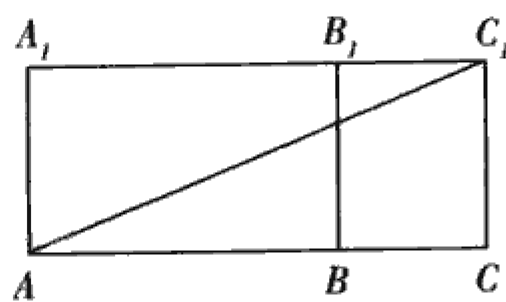
1. C　沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B-AC-D$，所得四面体 $ABCD$ 的外接球半径为$\frac{5}{2}$.

故体积为 $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{6}\pi$

2. $3\sqrt{2}$　由 A 到 C_1 在长方体表面上的距离可分为 3 种情况.



图(1)



图(2)

如图(1)，由 A 经过棱 A_1B_1 上一点 E 到 C_1；由 A 经棱 BB_1 上一点 F 到 C_1；由 A 经 BC 上一点 G 到 C_1. 先计算由 A 经 F 到 C_1. 把侧面 ABB_1A_1 和侧面 BCC_1B_1 展成平面图形(如图(2))，由 A 到 C_1 的两点间线段最短，即 A 到 C_1 在长方体表面上的最短距离就是线段 AC_1 的长，这时 $AC=5$，$CC_1=1$，$AC_1=\sqrt{26}$.

同理可计算另外两种情况下 $AC_1=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ 或 $AC_1=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，比较可知 $3\sqrt{2}$ 最小.

∴由 A 到 C_1 在长方体表面上的最短距离为 $3\sqrt{2}$.

3. C （用排除法）作 $BE\perp AC$ 于 E，则 $BE=\frac{12}{5}$，D 显然不对.

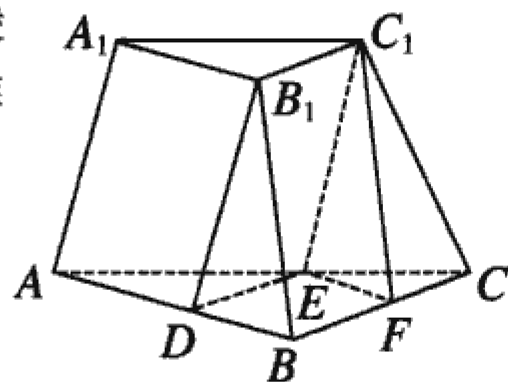
因为 $BD>\frac{12}{5}$（斜边＞直角边）

又∵$\angle BCD$ 在平面中(第 1 个图)是 $90°$

∴折起后 $\angle BCD$ 小于 $90°$　∴$BD<5$

∴A，B 均不成立.

4. 如右图，由已知知 $BC\perp AB$，$\angle ABB_1=45°$，分割三棱台为棱柱 $A_1B_1C_1$-ADE、棱柱 C_1EF-B_1DB 和棱锥 C-C_1EF，可求得

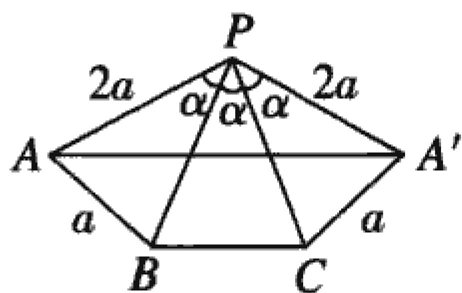


$V_{棱台}=V_{棱柱A_1B_1C_1-ADE}+V_{棱柱C_1EF-B_1DB}+V_{棱柱C-C_1EF}$

$=\frac{7}{6}a^3$.

5. 将两个相同的几何体补成一个底面边长为 a 的正方形、高是 $2a$ 的长方体，即得 $V=a^3$.

6. 展开三棱锥，侧面如右图所示. 易知截面周长的最小值即为 AA' 的长度.



∵$\cos\alpha=\frac{7}{8}$

∴$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$=4\times\left(\frac{7}{8}\right)^3-3\times\frac{7}{8}=\frac{7}{128}$

∴$AA'^2=4a^2+4a^2-2\times2a\times2a\cdot\frac{7}{128}$

$=\frac{121}{16}a^2$

∴$AA'=\frac{11}{4}a$

即所求截面周长的最小值为 $\frac{11}{4}a$.

7. (1)连结 HM，则 $HM/\!/EN$，

$\therefore \angle AMH$ 即为二异面直线 AM 和 EN 所成的角.

显然 $AM=HM=\sqrt{AF^2+FM^2}=\sqrt{\left(\frac{AB}{3}\right)^2+\left(\frac{BC}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}a$

又 $AH=\frac{AB}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore \cos\angle AMH=\frac{2\cdot(AM)^2-AH^2}{2\cdot AM\cdot MH}=1-\frac{\frac{4}{3}a^2}{2\cdot\frac{13}{9}a^2}=\frac{7}{13}$

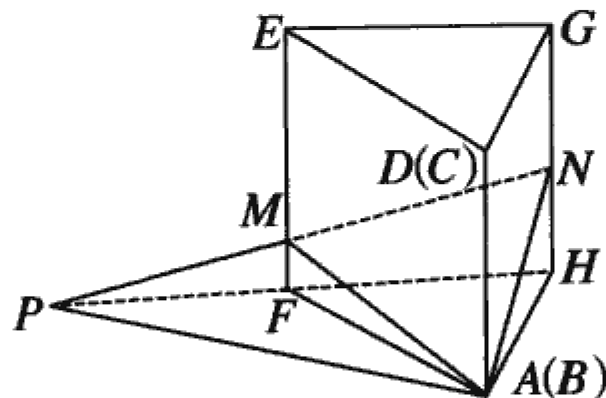
$\because 0^\circ<\angle AMH<90^\circ \quad \therefore \angle AMH=\arccos\frac{7}{13}$

即异面直线 AM 和 EN 所成的角是 $\arccos\frac{7}{13}$.

(2)延长 NM，HF 使两者相交于点 P，连接 AP，如下图所示. 则平面 NPA 与底面 PAH 所成的二面角即为平面 AMN 和底面 AFH 所成的二面角.

$\because \frac{MF}{NH}=\frac{1}{2} \quad \therefore \frac{PE}{PH}=\frac{1}{2}$

$\therefore PF=FH$



又 $\because \triangle AFH$ 为正三角形

$\therefore PF=FA$，$\angle PFA=120^\circ$

$\therefore \angle FPA=\angle FAP=30^\circ$

$\therefore \angle PAH=90^\circ$

$\therefore PA\perp HA$

$\therefore$ 由三垂线定理可知 $PA\perp AN$

$\therefore \angle NAH$ 即为所求二面角的平面角

$\because NH=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}a$，$AH=\frac{1}{3}AB=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$

$\therefore \tan\angle NAH=\frac{NH}{AH}=\frac{\frac{2}{3}a}{\frac{2}{3}\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \angle NAH=\frac{\pi}{6}$.

(3) $\because S_{\triangle AFH}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}a\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$

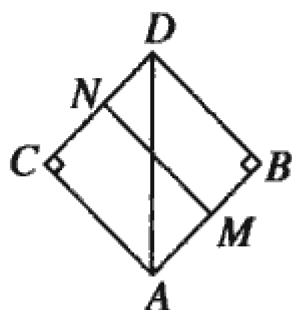
$\therefore S_{\triangle AMN}=\dfrac{S_{\triangle AFH}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{3}a^2$

$\because V_{D-AMN}=V_{N-ADM}, S_{\triangle ADM}=\dfrac{1}{2}\times a\times AF=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$

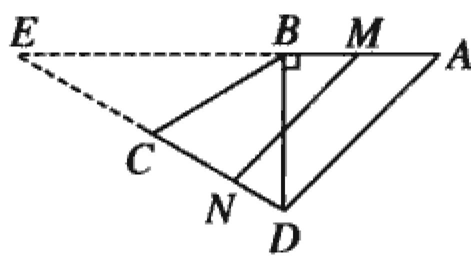
$\therefore \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}a^2\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2\cdot 1$

$\therefore h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

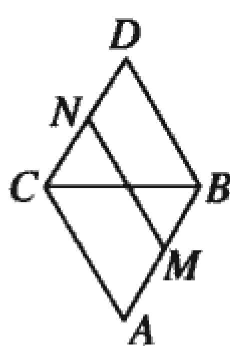
8. 展开四面体表面，由于从 M 到 N，由表面有经 AD 棱、BD 棱、BC 棱、AC 棱四种方式，故展开图形有如下四种：



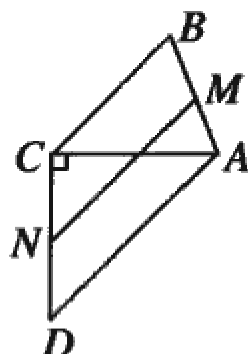
(1)



(2)



(3)



(4)

显然(1)，(3)情形下，$MN=AC=2a$；

在情况(2)下，如上图所示，延长 AB 与 DC 交于点 E，可求得

$\angle E=30^\circ, EM=(2\sqrt{3}+1)a, EN=3a$，

此时 $MN=\sqrt{EM^2+EN^2-2\cdot EM\cdot EN\cdot\cos30^\circ}=\sqrt{4+\sqrt{3}a}>2a$.

在情况(4)下，连接 CM，也有

$MN=\sqrt{CN^2+CM^2-2\cdot CN\cdot CM\cdot\cos(90^\circ+30^\circ)}$

$=\sqrt{a^2+(\sqrt{3}a)^2+a\cdot\sqrt{3}a}=\sqrt{4+\sqrt{3}a}>2a$

$\therefore M$ 与 N 在四面体表面上的最短距离是 $2a$.

9. (1)补三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 为四棱柱 $ADBC\text{-}A_1D_1B_1C_1$，如右图所示，连结 B_1D，则 $B_1D/\!/C_1A$.

$\therefore B_1D$ 与 B_1C 所成的不大于 90° 的正角即为异面直线 B_1C 与 AC_1 所成的角.

连结 CD，作 $B_1O\perp AB$ 于 O.

$\because$平面 $ABB_1A_1\perp$底面 ABC，平面 $ABB_1A_1\cap$底面 $ABC=AB$，

$\therefore B_1O\perp$平面 ABC，$\angle OBB_1$ 即侧棱 B_1B 与底面 ABC 所成角，

$\therefore \angle OBB_1 = 60^\circ$

而 $BB_1 = 2$ $\therefore B_1O = \sqrt{3}$，且 $BO = 1$.

$\therefore$ O 为 $\square ADBC$ 的对角线交点，$\triangle B_1OC \cong \triangle B_1OD$.

又 $BC = AC = AD = DB = 2$，$\angle DBC = 120^\circ$，

$\therefore CO = \sqrt{3}$

$\therefore \angle DB_1C = 2\angle DB_1O = 2\arctan\dfrac{OD}{B_1O}$

$= 2\arctan\dfrac{CO}{B_1O} = 2\arctan 1 = 90^\circ$

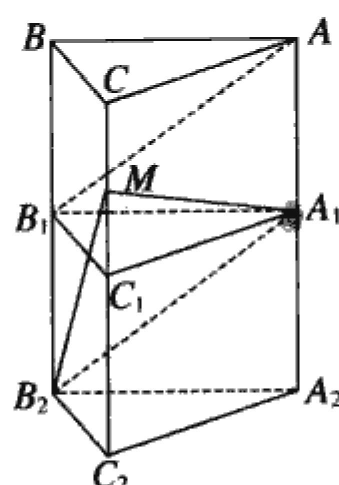
$\therefore B_1D \perp B_1C, B_1C \perp AC_1$

(2) $\because CC_1 /\!/ BB_1$ $\therefore CC_1 /\!/$ 平面 ABB_1

$\therefore V_{B_1-ABC_1} = V_{C_1-ABB_1} = V_{C-ABB_1} = V_{B_1-ABC} = \dfrac{1}{2}V_{B_1-ADBC}$

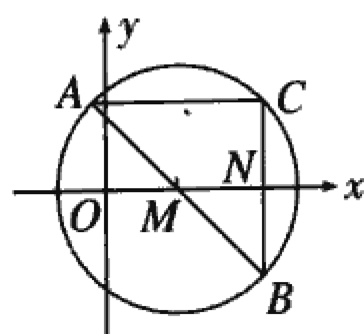
$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot S_{\square ADBC} \cdot B_1D$

$= \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{2} AB \cdot CD \cdot B_1O = 1$

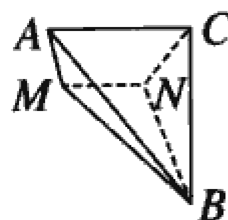


10. 如右图，作直三棱柱 $A_1B_1C_1 - A_2B_2C_2$，使 C_1, B_1, A_1 分别为 CC_2, BB_2, AA_2 的中点，连结 A_1B_2, B_2M，则 $\angle B_2A_1M$ 为 AB_1 和 A_1M 所成的角，在 $Rt\triangle A_1C_1M$ 中，$A_1M^2 = \dfrac{9}{2}$；在 $Rt\triangle B_2C_2M$ 中，$B_2M^2 = \dfrac{29}{2}$.

又 $A_1B_2^{\ 2} = 10$，$\therefore A_1B_2^{\ 2} + A_1M^2 = B_2M^2$.



(1)



(2)

11. 由已知可求得在平面图中 $\angle A = \angle B = 45^\circ$，即 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，AB 为斜边也是圆的直径，M 为圆心，如上图(1)，且 $MA = MB = \sqrt{2}$，$AC = 2$，$AC /\!/ MN$，$NB = NC = 1$，$MN \perp NB$，$MN \perp NC$，折后 $\angle BNC = 60^\circ$，$\triangle BNC$ 是边

长为 1 的正三角形，如上图(2).

$\therefore MN\perp$ 平面 NBC，平面 $AMN\perp$ 平面 BNC，

$\therefore\triangle BNC$ 的 CN 边上的高即为 B 到平面 AMN 的距离，其值 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore V_{B-AMN}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}MA\cdot MN\cdot\sin\angle AMN\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{12}$，

又 $AC\perp$ 平面 BNC，$\therefore AC\perp BC$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{5}$，$MB=MA=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 易求得 $S_{\triangle AMB}=\frac{1}{4}\sqrt{15}$，

所求距离满足 $\frac{1}{3}\cdot d\cdot S_{\triangle AMB}=V_{B-AMN}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，$\therefore d=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

12. 在平面图形中，由正弦定理可求得

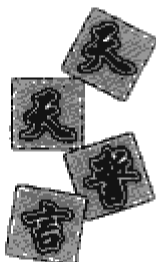
$OD=\frac{8}{5}BD$，$OC=\frac{6}{5}AC$

$BD=\frac{5}{13}(4\sqrt{3}-3)$，$AC=\frac{20}{11}(3\sqrt{3}-4)$

在空间图形中，作 $BE/\!/AC$ 交 OC 于 E，连结 ED，则所求余弦值为 $\cos\angle EBD$.

在 $\triangle OAC$ 中，由相似三角形性质，有 $BE=\frac{3}{4}AC$，$OE=\frac{3}{4}OC=\frac{9}{10}AC$，在 $\triangle OED$ 中，$DE^2=OD^2+OE^2-2OD\cdot OE\cdot\cos30°$

$\therefore\cos\angle DBE=\frac{BD^2+BE^2-DE^2}{2\cdot BD\cdot BE}=\frac{24}{25}(\sqrt{3}-1)$.



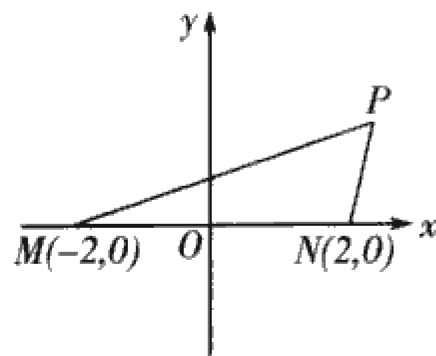
第十五章 直线与圆锥曲线的相关问题再探讨

圆锥曲线是高中数学的重要内容之一，也是高考的主要考查内容. 而直线与圆锥曲线的交汇与整合尤其受到命题者的青睐. 因为这一部分的内容涵盖了解析几何的主体内容，且又可以与代数中的方程、不等式、三角函数及向量和参数方程相整合，因而成为热点是理所当然的事了.

一、利用圆锥曲线的定义

解题秘言：在处理直线与圆锥曲线的相关问题时，往往离不开圆锥曲线的定义. 一是依圆锥曲线的定义来确定相关的特征量，二是涉及离心率问题要用到圆锥曲线的统一定义. 因此，圆锥曲线的定义是解有关圆锥曲线问题的重要工具.

例 1 (2008 年重庆高考理 · T21) 如图，$M(-2,0)$ 和 $N(2,0)$ 是平面上的两点，动点 P 满足：$|PM|+|PN|=6$.



(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 若 $|PM|\cdot|PN|=\dfrac{2}{1-\cos\angle MPN}$，求点 P 的坐标.

【规范解析】 (1) 因为 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，

$|PM|+|PN|=6>|MN|=4$，

所以点 P 的轨迹是以 M，N 为焦点，

长轴长 $2a=6$ 的椭圆.

因此半焦距 $c=2$，

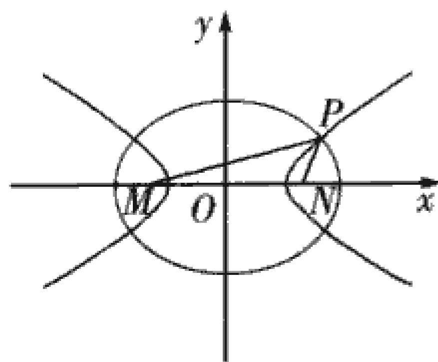
长半轴 $a=3$，

从而短半轴 $b=\sqrt{a^2-c^2}$

$=\sqrt{5}$，

所以椭圆的方程为

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1.$



(2)由$|PM|\cdot|PN|=\dfrac{2}{1-\cos\angle MPN}$,得

$|PM|\cdot|PN|\cos\angle MPN=|PM|\cdot|PN|-2$ ①

因为$\cos\angle MPN\neq1$,所以P不为椭圆长轴顶点,

故P、M、N构成三角形.

在$\triangle PMN$中,$|MN|=4$,由余弦定理有

$|MN|^2=|PM|^2+|PN|^2-2|PM|\cdot|PN|\cos\angle MPN$ ②

将①代入②,得

$4^2=|PM|^2+|PN|^2-2(|PM|\cdot|PN|-2)$,

所以$(|PM|-|PN|)^2=12$,

即$||PM|-|PN||=2\sqrt{3}$,

故点P在以M、N为焦点,实轴长为$2\sqrt{3}$的双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$上.

由(1)知,点P的坐标又满足$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$,所以

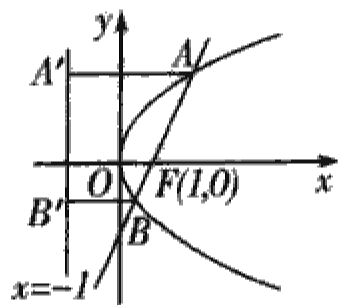
由方程组$\begin{cases}5x^2+9y^2=45\\x^2-3y^2=3\end{cases}$,解得$\begin{cases}x=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$,

即P点坐标为$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$、$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$、$\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$或$\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

【解后感言】 这里运用椭圆的第一定义,不仅有效地探明了解题的方向,而且大大地简化了解题的过程,充分地体现了运用二次曲线定义的重要意义.

例2 (2008年全国Ⅱ高考理·T15)已知F为抛物线C:$y^2=4x$的焦点,过F且斜率为1的直线交C于A、B两点.设$|FA|>|FB|$,则$|FA|$与$|FB|$的比值等于________.

【答案】 $3+2\sqrt{2}$.



【规范解析】 l_{AB}:$y-0=x-1$,

即$y=x-1$,

联立$\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow x^2-6x+1=0$

$\Rightarrow x_A=3+2\sqrt{2}$,$x_B=3-2\sqrt{2}$,

$\therefore\dfrac{|FA|}{|FB|}=\dfrac{|AA'|}{|BB'|}=\dfrac{3+2\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$.

二、与交点个数有关的问题

解题秘言：直线与二次曲线的交点个数问题，通常是化归为联立直线和二次曲线的方程解方程组来处理：若方程组无解，则直线与二次曲线无公共点；若方程组有一解（或两解），则直线与二次曲线有一个交点（或两个交点）.

例1 如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点，那么实数 a 的取值范围是________.

【解】 由 $A(a,0)$，$B(0,a)$ 得 AB 的截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，即 $y=a-x$，代入抛物线方程 $y=x^2-2x-3$ 并整理得

$$x^2-x-(3+a)=0. \quad (*)$$

∵直线与抛物线无公共点，

∴(*)式无实根.

即 $\Delta=1+4(3+a)<0$，解得 $a<-\frac{13}{4}$.

故 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{13}{4}\right)$.

【解后感言】 化直线与二次曲线交点问题为消去 y（或 x）的一元二次方程的解的问题是这类问题处理的常用通法.

例2 已知直线 $y=(a+1)x-1$ 与曲线 $y^2=ax$ 恰有一个公共点，求实数 a 的值.

【解】 联立方程 $\begin{cases}y=(a+1)x-1\\y^2=ax\end{cases}$

(1)当 $a=0$ 时此方程组恰有一组解 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

(2) $a\neq0$ 时，消去 x 得 $\frac{a+1}{a}y^2-y-1=0$.

①若 $\frac{a+1}{a}=0$，即 $a=-1$ 时，方程变为一元一次方程

$-y-1=0$.

此时方程组恰有一组解 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$.

②若 $\frac{a+1}{a}\neq0$，即 $a\neq-1$ 时，

令 $\Delta=0$ 得 $1+\frac{4(a+1)}{a}=0$，解之得 $a=-\frac{4}{5}$.

此时直线与曲线相切，且只有一个公共点.

综上所述，当 $a=0,-1,-\frac{4}{5}$ 时，直线与曲线 $y^2=ax$ 只有一个公共点.

【解后感言】 对这类含参数问题的处理，一定要注意分类讨论，其中最容易失误的是误认为 $a\neq 0$.

例 3 直线 $l:y=kx+1$ 与双曲线 $C:2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A，B.

（Ⅰ）求实数 k 的取值范围；

（Ⅱ）是否存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由.

【解】（Ⅰ）将直线 l 的方程 $y=kx+1$ 代入双曲线 C 的方程 $2x^2-y^2=1$ 后，整理得

$$(k^2-2)x^2+2kx+2=0 \quad ①$$

依题意，直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同两点，故

$$\begin{cases} k^2-2\neq 0 \\ \Delta=(2k^2)-8(k^2-2)>0 \\ -\frac{2k}{k^2-2}>0 \\ \frac{2}{k^2-2}>0 \end{cases} \quad (*)$$

解得 k 的取值范围为 $-2<k<-\sqrt{2}$.

（Ⅱ）设 A,B 两点的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则由①式得

$$x_1+x_2=\frac{2k}{2-k^2},x_1\cdot x_2=\frac{2}{k^2-2} \quad ②$$

假设存在实数 k，使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 $F(c,0)$，则由 $FA\perp FB$ 得 $(x_1-c)(x_2-c)+y_1y_2=0$，

即 $(x_1-c)(x_2-c)+(kx_1+1)(kx_2+1)=0$

整理得 $(k^2+1)x_1x_2+(k-c)(x_1+x_2)+c^2+1=0 \quad ③$

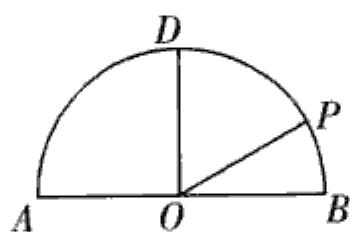
把②式及 $c=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 代入③式化简得 $5k^2+2\sqrt{6}k-6=0$.

解得 $k=-\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ 或 $k=\frac{6-\sqrt{6}}{5}\notin(-2,-\sqrt{2})$（舍去）.

故 $k=\frac{6+\sqrt{6}}{5}$ 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点.



【解后感言】 在探求实数 k 的取值范围时，不等式组(*)中 $k^2-2\neq 0,\Delta>0$ 可能不会忽视，但将直线 l 与双曲线 C 的右支的交点化归为(*)中的后两个不等式有可能易忽视.



例 4 (2008 年湖北高考理 · T19)如图，在以点 O 为圆心，$|AB|=4$ 为直径的半圆 ADB 中，$OD\perp AB$，P 是半圆孤上一点，$\angle POB=30°$. 曲线 C 是满足 $||MA|-|MB||$ 为定值的动点 M 的轨迹，且曲线 C 过点 P.

(1)建立适当的平面直角坐标系，求曲线 C 的方程；

(2)设过点 D 的直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 E、F. 若△OEF 的面积不小于 $2\sqrt{2}$，求直线 l 斜率的取值范围.

【规范解析】 (1)方法一：以 O 为原点，AB、OD 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，

则 $A(-2,0)$，$B(2,0)D(0,2)$，$P(\sqrt{3},1)$，

依题意，得 $||MA|-|MB||=|PA|-|PB|$

$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1^2}$

$=2\sqrt{2}<|AB|=4$，

∴曲线 C 是以原点为中心，A、B 为焦点的双曲线.

设实半轴长为 a，虚半轴长为 b，半焦距为 c，

则 $c=2,2a=2\sqrt{2}$，

$\therefore a^2=2,b^2=c^2-a^2=2$.

∴曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

方法二：同方法一建立平面直角坐标系，

则依题意可得

$||MA|-|MB||=|PA|-|PB|<|AB|=4$，

∴曲线 C 是以原点为中心，A、B 为焦点的双曲线.

设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

则由 $\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{3})^2}{a^2}-\dfrac{1^2}{b^2}=1,\\ a^2+b^2=4\end{cases}$

解得 $a^2=b^2=2$.

∴曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)方法一:依题意,可设直线 l 的方程为 $y=kx+2$,

代入双曲线 C 的方程并整理,得

$$(1-k^2)x^2-4kx-6=0 \quad ①$$

∵直线 l 与双曲线 C 相交于不同的两点 E、F,

$$\therefore \begin{cases}1-k^2\neq 0\\ \Delta=(-4k)^2+4\times 6(1-k^2)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}k\neq \pm 1\\ -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\therefore k\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3}). \quad ②$$

设 $E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,

则由①式得 $x_1+x_2=\frac{4k}{1-k^2}$,

$x_1x_2=-\frac{6}{1-k^2}$,

于是 $|EF|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}$,

而原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$.

$$\therefore S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}d\cdot|EF|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}.$$

若 $\triangle OEF$ 面积不小于 $2\sqrt{2}$,

即 $S_{\triangle OEF}\geqslant 2\sqrt{2}$,

则有 $\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}\geqslant 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow k^4-k^2-2\leqslant 0$,

$$\text{解得} -\sqrt{2}\leqslant k\leqslant\sqrt{2}. \quad ③$$

综合②、③知,直线 l 的斜率的取值范围为

$[-\sqrt{2},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{2}]$.

天天学吉

三、有关弦长问题

解题秘言：涉及直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 与二次曲线相交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，求弦长的问题，通常应用弦长公式：

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=|x_1-x_2|\sqrt{1+k^2}$$

$$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\cdot\sqrt{1+k^2}$$

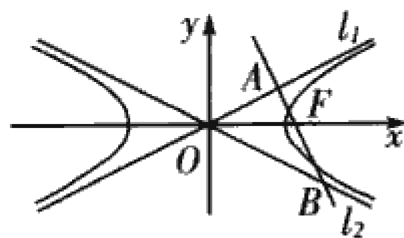
$$=|y_1-y_2|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$$

利用这个公式求弦长时，应注意运用韦达定理.

例1 (2008年全国Ⅰ高考文·T22、理·T21)双曲线的中心为原点 O，焦点在 x 轴上，两条渐近线分别为 l_1,l_2，经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1,l_2 于 A,B 两点. 已知 $|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$ 成等差数列，且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向.

(1)求双曲线的离心率；

(2)设 AB 被双曲线所截得的线段的长为4，求双曲线的方程.



【规范解析】 (1)设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，右焦点为 $F(c,0)(c>0)$，

则 $c^2=a^2+b^2$.

不妨设 $l_1:bx-ay=0,l_2bx+ay=0$.

则 $|\overrightarrow{FA}|=\frac{|b\times c-a\times0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$.

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{\overrightarrow{OF}^2-\overrightarrow{AF}^2}=a$.

因为 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2=|OB|^2$，

且 $|\overrightarrow{OB}|=2|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{OA}|$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2=(2|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{OA}|)^2$，

于是得 $\tan\angle AOB=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{4}{3}$，

又 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向，故 $\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOB$，

所以 $\frac{2\tan\angle AOF}{1-\tan^2\angle AOF}=\frac{4}{3}$，

解得 $\tan\angle AOF=\frac{1}{2}$或 $\tan\angle AOF=-2$(舍去).

因此$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, $a=2b$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}b$.

双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2)由 $a=2b$ 知,双曲线的方程可化为

$x^2-4y^2=4b^2$ ①

由 l_1 的斜率为$\frac{1}{2}$, $c=\sqrt{5}b$ 知,直线 AB 的方程为

$y=-2(x-\sqrt{5}b)$ ②

将②代入①并化简,得

$15x^2-32\sqrt{5}bx+84b^2=0$.

设 AB 与双曲线的两交点的坐标分别为

(x_1,y_1), (x_2,y_2),

则 $x_1+x_2=\frac{32\sqrt{5}b}{15}$, $x_1\cdot x_2=\frac{84b^2}{15}$ ③

AB 被双曲线所截得的线段长

$l=\sqrt{1+(-2)^2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{5\cdot[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$ ④

将③代入④,并化简得 $l=\frac{4b}{3}$,而由已知 $l=4$,

故 $b=3$, $a=6$,

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

例2 (2007年安徽高考文·T18)设 F 是抛物线 G:$x^2=4y$ 的焦点.

(1)过点 $P(0,-4)$作抛物线 G 的切线,求切线方程;

(2)设 A、B 为抛物线 G 上异于原点的两点,且满足$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$,延长 AF、BF 分别交抛物线 G 于点 C、D,求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

【解】 (1)设切点 $Q(x_0,\frac{x_0^2}{4})$.由 $y'=\frac{x}{2}$,知抛物线在 Q 点处的切线斜率为$\frac{x_0}{2}$,

故所求切线方程为 $y-\frac{x_0^2}{4}=\frac{x_0}{2}(x-x_0)$,

即 $y=\frac{x_0}{2}x-\frac{x_0^2}{4}$.



因为点 $P(0,-4)$在切线上，所以$-4=-\frac{x_0^{\ 2}}{4}$，$x_0^{\ 2}=16$，$x_0=\pm4$.

所求切线方程为 $y=\pm2x-4$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$.

由题设，知直线 AC 的斜率k 存在，由对称性，不妨设 $k>0$.

因直线 AC 过焦点 $F(0,1)$，所以直线 AC 的方程为 $y=kx+1$.

点 A、C 的坐标满足方程组$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$

得 $x^2-4kx-4=0$，

由根与系数的关系，知$\begin{cases}x_1+x_2=4k,\\x_1x_2=-4.\end{cases}$

$|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4(1+k^2)$.

因为 $AC\perp BD$，所以 BD 的斜率为$-\frac{1}{k}$，从而 BD 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+1$.

同理，可求得$|BD|=4\left[1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2\right]=\frac{4(1+k^2)}{k^2}$.

$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{8(1+k^2)^2}{k^2}$

$=8(k^2+2+\frac{1}{k^2})\geqslant32$.

当 $k=1$ 时，等号成立. 所以，四边形 $ABCD$ 面积的最小值为 32.

【解后感言】 这里利用弦长公式将$|MN|$表示出来，从而求得$\triangle AMN$ 的面积是解题的关键.

例 3 是否存在圆锥曲线 C，同时满足下面两个条件？

①原点 O 及直线 $x=1$ 分别是它的一个焦点和相应准线；

②该曲线上存在两点 A，B 关于直线 $x+y=0$ 对称，且$|AB|=2\sqrt{2}$.

若存在，求出 C 的方程；若不存在，说明理由.

【解】 假设曲线 C 存在，其离心率为 e，设 $P(x,y)$是曲线 C 上任一点.

由条件①得$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x-1|}=e$，

化简得 $(1-e^2)x^2+y^2+2e^2x-e^2=0$ ①

设被直线 $x+y=0$ 垂直平分的弦为 AB，且 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，令 AB 的中点



$M(x_0,y_0)$,则 AB 的方程为

$y-y_0=1\cdot(x-x_0)$,即 $x-y=x_0-y_0$

又∵M 在直线 $x+y=0$ 上， ∴$x_0+y_0=0$,

即 $y_0=-x_0$

故 AB 方程为 $x-y=2x_0$ ②

∵$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$为曲线 C 上的点,

∴$(1-e^2)x_1^2+y_1^2+2e^2x_1-e^2=0$ ③

$(1-e^2)x_2^2+y_2^2+2e^2x_2-e^2=0$ ④

由③－④得

$(1-e^2)(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2)+2e^2(x_1-x_2)=0$

由$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$有 $y_1-y_2=x_1-x_2\neq0$

∴$(1-e^2)(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+2e^2=0$

∴$(1-e^2)\cdot2x_0+2y_0+2e^2=0$

∴$x_0(1-e^2-1)=-e^2$, ∴$x_0=1$

∴AB 的方程为 $x-y=2$ ⑤

由①⑤消去 y,得$(2-e^2)x^2+2(e^2-2)x+4-e^2=0$.

若 $2-e^2=0$,即 $e^2=2$ 时,直线 AB 与曲线 C 不存在两个交点,不合题意,故$e^2\neq2$.

∴$x_1+x_2=\frac{2(e^2-2)}{e^2-2}=2$,$x_1x_2=\frac{4-e^2}{2-e^2}$,

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$.

∴$|AB|^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=8$,

即 $2\left(2^2-4\times\frac{4-e^2}{2-e^2}\right)=8$, ∴$e^2=4$.

将 $e^2=4$ 代入①,化简得

$$\frac{9}{4}(x-\frac{4}{3})^2-\frac{3}{4}y^2=1.$$

故满足条件的圆锥曲线 C 存在,是中心在$(\frac{4}{3},0)$焦点在 x 轴上的双曲线,其方程为$\frac{9}{4}(x-\frac{4}{3})^2-\frac{3}{4}y^2=1$.

【解后感言】 由于题中未指明具体的圆锥曲线类型,故应用二次曲线的统一定义化为离心率 e 来处理.本例集对称问题、弦长问题、参数问题、探究问题于一体,思维含量高,应注意理解和消化.



四、弦的中点问题

解题秘言：直线与二次曲线相交形成的弦的中点问题是高考试题中常常涉及的一类题目. 涉及弦长的中点问题，常用“点差法”设而不求，将弦所在直线的斜率，弦的中点坐标联系起来相互转化.

设直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点，坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$$

两式相减，得 $\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=-\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}$，

即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}$.

故 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 也有类似的结论 $k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

抛物线 $y^2=2px$ 也有类似的结论 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}=\frac{p}{y_0}$.

例1 (2008 年北京高考理 · T19) 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A,C 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，对角线 BD 所在直线的斜率为 1.

(1) 当直线 BD 过点 $(0,1)$ 时，求直线 AC 的方程；

(2) 当 $\angle ABC=60^\circ$ 时，求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

【规范解析】 (1) 由题意得直线 BD 的方程 $y=x+1$.

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$.

于是可设直线 AC 的方程为 $y=-x+n$.

由 $\begin{cases}x^2+3y^2=4\\ y=-x+n\end{cases}$，得 $4x^2-6nx+3n^2-4=0$.

因为 A,C 在椭圆上，

所以 $\Delta=-12n^2+64>0$，解得 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}<n<\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

设 A,C 两点坐标分别为 $(x_1,y_1)(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{3n}{2}$，$x_1x_2=\frac{3n^2-4}{4}$，

$y_1=-x_1+n$，$y_2=-x_2+n$，所以 $y_1+y_2=\frac{n}{2}$.

所以 AC 的中点坐标为 $(\frac{3n}{4},\frac{n}{4})$，

由四边形 $ABCD$ 为菱形可知，

点 $(\frac{3n}{4},\frac{n}{4})$ 在直线 $y=x+1$ 上，

所以 $\frac{n}{4}=\frac{3n}{4}+1$，解得 $n=-2$，

所以直线 AC 的方程为 $y=-x-2$.

即 $x+y+2=0$.

(2)因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC=60°$，

所以 $|AB|=|BC|=|CA|$，

所以菱形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}|AC|^2$.

由(1)可得 $|AC|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$=\frac{-3n^2+16}{2}$，

所以 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(-3n^2+16)\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}<n<\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

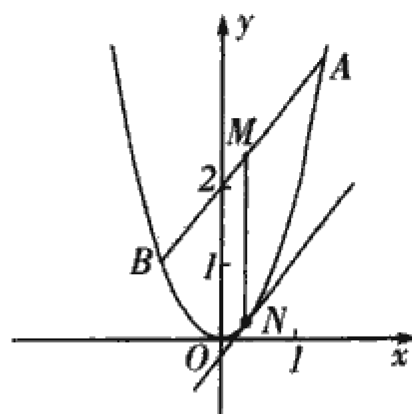
所以当 $n=0$ 时，菱形 $ABCD$ 的面积取得最大值 $4\sqrt{3}$.

例2 (2008年陕西高考文·T21、理·T20)已知抛物线 $C:y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A,B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N.

(1)证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

(2)是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

【规范解析】 方法一：(1)如图，设 $A(x_1,2x_1^2)$，$B(x_2,2x_2^2)$.



把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得

$2x^2-kx-2=0$.

由根与系数的关系得

$x_1+x_2=\frac{k}{2}$，$x_1x_2=-1$，

$\therefore x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$,

$\therefore N$ 点的坐标为$(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8})$.

设抛物线在点 N 处的切线 l 的方程为 $y-\frac{k^2}{8}=m\left(x-\frac{k}{4}\right)$,

将 $y=2x^2$ 代入上式得 $2x^2-mx+\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}=0$,

$\because$ 直线 l 与抛物线 C 相切.

$\therefore \Delta=m^2-8\left(\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}\right)=m^2-2mk+k^2=(m-k)^2=0$,

$\therefore m=k$,即 $l/\!/AB$.

(2)假设存在实数 k,使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$,

则 $NA\perp NB$,

又$\because M$ 是 AB 的中点,$\therefore |MN|=\frac{1}{2}|AB|$.

由(1)知 $y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)$

$=\frac{1}{2}[k(x_1+x_2)+4]=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2}+4\right)=\frac{k^2}{4}+2$.

$\because MN\perp x$ 轴,

$\therefore |MN|=|y_M-y_N|=\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}=\frac{k^2+16}{8}$.

又$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

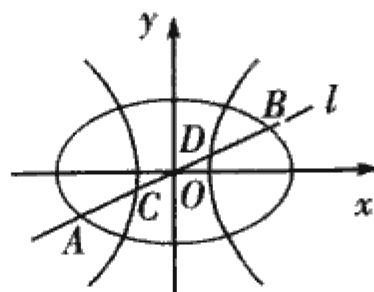
$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2-4\times(-1)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$.

$\therefore \frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$,

解得 $k=\pm2$,即存在 $k=\pm2$,使$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

例3 设直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 相交于 A,B 两点,l 又与双曲线 $x^2-y^2=1$ 相交于 C,D 两点,C,D 三等分线段 AB,求直线 l 的过程.



【解】 如图所示,设 l 与椭圆、双曲线的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,x_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_1)$

则$\begin{cases}\dfrac{x_i^2}{25}+\dfrac{y_i^2}{16}=1\\ x_j^2-y_j^2=1\end{cases}(i=1,2,j=3,4)$.

由 i 的两个式子相减及 j 的两个式子相减，得

$$\begin{cases}16(x_2+x_1)(x_2-x_1)+25(y_2+y_1)(y_2-y_1)=0\\(x_4+x_3)(x_4-x_3)-(y_4+y_3)(y_4-y_3)=0\end{cases}$$

∵C,D 是 AB 的三等分点，

∴CD 是中点(x_0,y_0)与 AB 的中点重合，且$|AB|=3|CD|$.

∴$x_0=\dfrac{x_2+x_1}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}$，$y_0=\dfrac{y_2+y_1}{2}=\dfrac{y_3+y_4}{2}$.

$x_2-x_1=3(x_4-x_3)$，$y_2-y_1=3(y_4-y_3)$.

∴$\begin{cases}16x_0(x_4-x_3)=-25y_0(y_4-y_3) & ①\\ x_0(x_4-x_3)=y_0(y_4-y_3) & ②\end{cases}$

若 $x_0y_0\neq0$，则 $x_2=x_1$，$y_2=y_1$ 故 $x_3=x_4$，$y_4=y_3$.

∵A,B,C,D 为不同点，

∴$x_i\neq x_j$，$y_i\neq y_j$，$i,j=1,2,3,4$，且 $i\neq j$.

由①÷②得 $16=-25$，矛盾.　　∴$x_0y_0=0$.

(1)当 $x_0=0$，$y_0\neq0$ 时，由②得 $y_4=y_3\neq0$，此时 $l/\!/x$ 轴.

设 l 的方程为 $y=b$，分别代入椭圆、双曲线方程得

$$x_{1,2}=\pm\frac{5}{4}\sqrt{16-b^2},x_{3,4}=\pm\sqrt{b^2+1}.$$

∵$x_2-x_1=3(x_4-x_3)$，即$\dfrac{10}{4}\sqrt{16-b^2}=6\sqrt{b^2+1}$，

∴$b=\pm\dfrac{16}{13}$.

∴l 的方程为 $y=\pm\dfrac{16}{13}$.

(2)当 $y_0=0$，$x_0\neq0$ 时，由②得 $x_4=x_3\neq0$，此时 $l/\!/y$ 轴.

设 l 的方程为 $x=c$，分别代入椭圆、双曲线方程得

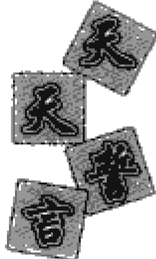
$$y_{1,2}=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-c^2},y_{3,4}=\pm\sqrt{c^2-1}.$$

∵$y_2-y_1=3(y_4-y_3)$，即$\dfrac{8}{5}\sqrt{25-c^2}=6\sqrt{c^2-1}$，

∴$c=\pm\dfrac{25}{\sqrt{241}}$.　　∴$l$ 的方程为 $x=\pm\dfrac{25}{\sqrt{241}}$.

(3)当 $x_0=0$，$y_0=0$ 时，这时 l 通过坐标原点且不与 x 轴垂直.

设 l 的方程为 $y=kx$，分别代入椭圆、双曲线方程得



$$x_{1,2}=\pm\frac{20}{\sqrt{16+25k^2}},x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}.$$

$\because x_2-x_1=3(x_4-x_3)$, $\quad\therefore k=\pm\frac{16}{25}$.

$\therefore l$ 的方程为 $y=\pm\frac{16}{25}x$.

综合(1)(2)(3),直线 l 的方程为

$y=\pm\frac{16}{25}x$ 或 $y=\pm\frac{16}{13}$或 $x=\pm\frac{25}{\sqrt{241}}$.

【解后感言】 本题融椭圆、双曲线、直线、等比分点和多重分类讨论于一题,是直线与圆锥曲线相交问题的典型试题,由于本例系广东省高考压轴题,思维容量当然较高,值得认真品味.

五、借助于曲线系

解题秘言:当直线与二次曲线满足某些特定条件时,其实质就是求某曲线系中特定的一条曲线或求两曲线系的交集,因此,我们可以借助于曲线系的思想方法,先利用其中的某些条件写出具有一般特征的曲线系方程,然后再根据其余的条件求出待定的系数,使相关的问题获解.

例 1 一双曲线与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$共渐近线,且与直线 $x-y-1=0$ 相切,求此双曲线的方程.

【解】 设所求的双曲线方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=\frac{\lambda}{16}$,即

$$x^2-4y^2=\lambda. \qquad ①$$

由方程组$\begin{cases}x^2-4y^2=\lambda\\x-y-1=0\end{cases}$消去 x,得

$$3y^2-2y+(\lambda-1).$$

因为此双曲线与直线相切,因此由 $\Delta=4-4\times3(\lambda-1)=0$,解得

$$\lambda=\frac{4}{3}.$$

将 $\lambda=\frac{4}{3}$代入①得,$3x^2-12y^2=4$.

故所求的双曲线方程为 $3x^2-12y^2=4$.

【解后感言】 方程①就是与$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$共渐近线的双曲线系,这里实质就是待定参数 λ.

例2 已知椭圆的离心率是$\frac{1}{2}$，焦点在x轴上，且被直线$y=\frac{1}{2}x+2$截得的弦长为$3\sqrt{5}$，求椭圆的标准方程.

【解】 $\because \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}$，

又其焦点在x轴上，

$\therefore$可设椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=\lambda(\lambda>0)$，即$3x^2+4y^2-12\lambda=0$.

将$y=\frac{1}{2}x+2$代入椭圆方程，整理得$x^2+2x+4-3\lambda=0$.

由韦达定理知：$x_1+x_2=-2, x_1x_2=4-3\lambda$.

由弦长公式，有

$$\begin{aligned}3\sqrt{5}&=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|\\&=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\&=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}\cdot\sqrt{(-2)^2-4(4-3\lambda)}\\&=\sqrt{5(3\lambda-3)}\end{aligned}$$

解得$\lambda=4$.

故所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=4$，即$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

【解后感言】 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda>0)$表示具有相同离心率的圆锥曲线系.

例3 已知点$P(3,4)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的一点，$F_1$，$F_2$为椭圆的两焦点，若$PF_1\perp PF_2$，试求：(Ⅰ)椭圆的方程；(Ⅱ)$\triangle PF_1F_2$的面积.

【解】 (Ⅰ)令$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则$b^2=a^2-c^2$.

$\because PF_1\perp PF_2$，　$\therefore k_{PF_1}\cdot k_{PF_2}=-1$，

即$\frac{4}{3+c}\cdot\frac{4}{3-c}=-1$，解之得$c=5$，

$\therefore$椭圆方程可设为$\frac{x^2}{t+25}+\frac{y^2}{t}=1$.

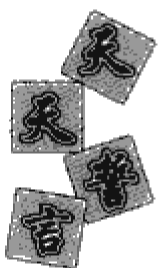
$\because$点$P(3,4)$在椭圆上，

$\therefore \frac{9}{t+25}+\frac{16}{t}=1$，解之得$t=20$.

故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$.

(Ⅱ)由焦半径公式有

$|PF_1|=a+ex=3\sqrt{5}+\frac{5}{3\sqrt{5}}\times 3=4\sqrt{5}$，

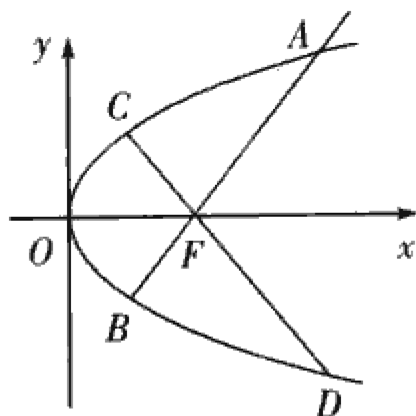


$|PF_2|=a-ex=3\sqrt{5}-\dfrac{5}{3\sqrt{5}}\times 3=2\sqrt{5}$.

$\therefore S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=20$.

【解后感言】 共焦点圆锥曲线系$\dfrac{x^2}{c^2+t}+\dfrac{y^2}{t}=1$，当$t>0$时，表示共焦点$(\pm c,0)$的椭圆系，当$-c^2<t<0$时，表示共焦点$(\pm c,0)$的双曲线系；当$t<-c^2$时，无轨迹，运用共焦点曲线系建立方程时，一是要注意焦点所在的坐标轴；二是要注意参数t的取值范围.

例4 如图所示，已知抛物线$y^2=2px(p>0)$，过焦点F任作两条互相垂直的直线与抛物线分别相交于两点A,B和C,D. 问这四点能否共圆？若共圆，求出所共圆的方程.



【解】 点F的坐标为$\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，将抛物线方程变形为

$$y^2-2px=0 \quad ①$$

∵两直线互相垂直且与抛物线都有两个交点，

∴两直线的斜率均存在且不为零.

设直线AB的方程为$y=k\left(x-\dfrac{p}{2}\right)(k\neq 0)$，

则直线CD的方程为$y=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$. 即

$$AB:2kx-2y-pk=0 \quad ②$$

$$CD:2x+2ky-p=0 \quad ③$$

由②×③并整理，可得AB与CD共同满足的二次曲线方程为：

$$4kx^2-4ky^2+4(k^2-1)xy-4pkx+2p(1-k^2)y+p^2k=0. \quad ④$$

设$\lambda\neq 0$，将④$+\lambda$①并整理，得A,B,C,D所满足的曲线系方程为$4kx^2+(\lambda-4k)y^2+4(k^2-1)xy-2p(\lambda+2k)x+2p(1-k^2)y+p^2k=0$. ⑤

要使A,B,C,D四点共圆，只需⑤为圆的方程，故

$$\begin{cases}k^2=1\\4k=\lambda-4k\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=\pm 1\\\lambda=\pm 8\end{cases}$$

此时⑤可化为$x^2+y^2-5px+\dfrac{p^2}{4}=0$，

即$\left(x-\dfrac{5}{2}p\right)^2+y^2=6p^2$.

故当$k=\pm 1$时，四点A,B,C,D共圆，且所共圆的方程为

$$\left(x-\dfrac{5}{2}p\right)^2+y^2=6p^2.$$

【解后感言】 本例通过构造曲线系，绕开求交点，设而不求，体现了整体思想的渗透与运用，这在解析几何中是一种应用非常广泛的解题技巧，要注意掌握并学会运用.

实战秘修十五

1. 已知直线 l 过点 $(-2,0)$，当直线 l 与圆 $x^2+y^2=2x$ 有两个交点时，其斜率 k 的取值范围是 ( )

   A. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　B. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

   C. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$

2. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A,B 两点，它们的横坐标之和等于 5，则这样的直线 ( )

   A. 有且仅有一条　　B. 有且仅有两条

   C. 有无穷多条　　D. 不存在

3. (2008 年天津高考理 · T5)设椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-1}=1(m>1)$ 上一点 P 到其左焦点的距离为 3，到右焦点的距离为 1，则 P 到右准线的距离为 ( )

   A. 6　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

4. (2008 年福建高考理 · T11)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1、F_2，若 P 为其上一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围为 ( )

   A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

5. (2008 年浙江高考理 · T12)已知 F_1、F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点. 若 $|F_2A|+|F_2B|=12$，则 $|AB|=$________.

6. 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q，若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点，则直线 l 的斜率的取值范围是 ( )

   A. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $[-2,2]$

   C. $[-1,1]$　　D. $[-4,4]$

7. 直线 $y=kx+1$，当 k 变化时，此直线被椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 截得的最大弦长是 ( )

   A. 4　　B. 2

   C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. 不能确定

8. (2008 年全国高考Ⅰ理 · T15)在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，$\cos B=-\frac{7}{18}$. 若以 A、B 为焦点的椭圆经过点 C，则该椭圆的离心率 $e=$________.

9. 双曲线的虚轴长为 4，离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{2}$，F_1，F_2 分别是它的左、右焦点，若过 F_1 的直线与双曲线的左支交于 A，B 两点，且 $|AB|$ 是 $|AF_2|$ 与 $|BF_2|$ 的等差中项，则 $|AB|$ 等于________.

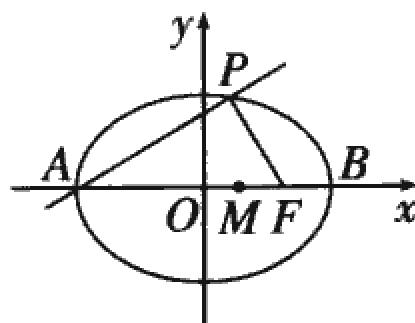
10. 已知双曲线 $x^2-y^2=4$，直线 $l: y=k(x-1)$，讨论直线与双曲线公共点的个数.

11. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点在抛物线 $y=2x^2$ 上，l 是 AB 的垂直平分线.

(1)当且仅当 x_1+x_2 取何值时，直线 l 经过抛物线的焦点 F？证明你的结论；

(2)当直线 l 的斜率为 2 时，求 l 在 y 轴上截距的取值范围.

12. 如右图，点 A，B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点，点 F 是椭圆的右焦点. 点 P 在椭圆上，且位于 x 轴上方，$PA\perp PF$.



(1)求点 P 的坐标；

(2)设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点，M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$，求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.

13. 抛物线 C 的方程为 $y=ax^2(a<0)$，过抛物线 C 上一点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 作斜率为 k_1，k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点(P，A，B 三点互不相同)，且满足 $k_2+\lambda k_1=0(\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -1)$.

(1)求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程；

(2)设直线 AB 上一点 M，满足 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$，证明线段 PM 的中点在 y 轴上；

(3)当 $\lambda=1$ 时，若点 P 的坐标为 $(1,-1)$，求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点分别是 F_1，F_2，离心率为 e. 直线 $l: y=ex+a$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，M 是直线 l 与椭圆 C 的一个公共点，P 是点 F_1 关于直线 l 的对称点. 设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(1)证明 $\lambda=1-e^2$；

(2)确定 λ 的值，使得 $\triangle PF_1F_2$ 是等腰三角形.

15. 已知椭圆的中心为坐标原点 O，焦点在 x 轴上. 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A，B 两点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $a=(3,-1)$ 共线.

(1)求椭圆的离心率；

(2)设 M 为椭圆上任意一点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$.

证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

16. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点，而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

(1)求双曲线 C_2 的方程；

(2)若直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点，且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$(其中 O 为原点). 求 k 的取值范围.

实战秘修十五答案与提示

1. C　直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，即 $kx-y+2k=0$，依圆心(1,0)到直线的距离小于半径知 $\frac{|k-0+2k|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，解得 $-\frac{\sqrt{2}}{4}<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. B　焦点 $F(1,0)$，由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x.\end{cases}$ 知 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

由题意知 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}=5$，$\therefore 3k^2=4$，$\therefore k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. B　由椭圆的第一定义，$2a=4$，即 $m^2=4$，

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$\therefore e=\frac{1}{2}$.

设 P 到右准线的距离为 d，

由椭圆的第二定义，$\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$，$\therefore d=2$，故选 B.

4. B　$\because |PF_1|-|PF_2|=|PF_2|=2a$，而双曲线右支上到右焦点距离最近的点为右顶点，$\therefore$ 有 $c-a\leqslant 2a$，$\therefore 1<e\leqslant 3$，故选 B.

5. 8　由椭圆的定义得 $\begin{cases}|AF_1|+|AF_2|=10,\\|BF_1|+|BF_2|=10,\end{cases}$

两式相加得 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=20$，

即 $|AB|+12=20$，$\therefore |AB|=8$.

6. C　设过 Q 点的直线斜率为 k，则过 Q 点的直线 l 方程为 $y=k(x+2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x+2)\\y^2=8x\end{cases}$ 整理得 $ky^2-8y+16k=0$.

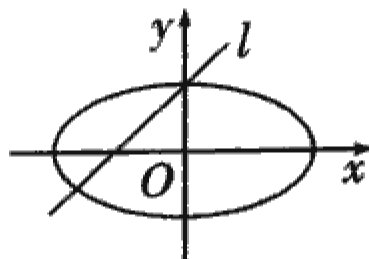
$\because$ 直线与抛物线有交点，$\therefore \Delta\geqslant 0$.

当 $k\neq 0$ 时，由 $\Delta\geqslant 0$，得 $-1\leqslant k\leqslant 1$ 且 $k\neq 0$.

当 $k=0$ 时，l 与抛物线仍有交点.

$\therefore k\in[-1,1]$.

7. C　如右图，当直线 $l\perp x$ 轴时截得弦长为 2，当直线过椭圆左顶点时，所截得弦长为 $\sqrt{5}>2$. 直线 l 与 x 轴重合时，截得弦长为 4.



$\because l$ 过(0,1)点，$\therefore l$ 不可能与 x 轴重合.

$\therefore$ 排除 A、B，观察图形，D 显然不正确.

8. $\frac{3}{8}$　设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$c^2=a^2-b^2$，由已知可得$|AB|=|BC|=2c$，则$|AC|=2a-2c$，在$\triangle ABC$中运用余弦定理有$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$，

即$(2a-2c)^2=(2c)^2(2c)^2-2\cdot 2c\cdot 2c\cdot\left(-\frac{7}{18}\right)$，

整理得$16c^2+18ac-9a^2=0$，$\therefore e=\frac{3}{8}$. 故填$\frac{3}{8}$.

9. $8\sqrt{2}$　$\because b^2=4, e=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore a=2\sqrt{2}$. 又$2|AB|=|AF_2|+|BF_2|$，

$\therefore |AB|=|AF_2|-|AF_1|+|BF_2|-|BF_1|=4a=8\sqrt{2}$.

10. 联立方程组$\begin{cases}y=k(x-1) & ①\\ x^2-y^2=4 & ②\end{cases}$

将①代入②得$(1-k^2)x^2+2k^2x-k^2-4=0$.　③

(1)当$1-k^2=0$，即$k=\pm1$时，方程③可化为$2x=5$，方程组有一解.

故直线与双曲线有一个公共点，此时直线与渐近线平行；

(2)当$1-k^2\neq0$，即$k\neq\pm1$时，$\Delta=4(4-3k^2)$.

若$\begin{cases}4-3k^2>0\\ 1-k^2\neq0\end{cases}$即$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<\frac{2\sqrt{3}}{3}$且$k\neq\pm1$，

方程③有两解，故直线与双曲线有两个交点.

(3)若$\begin{cases}4-3k^2=0\\ 1-k^2\neq0\end{cases}$　即$k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则$\Delta=0$，方程组有一解，

故直线与双曲线有一个公共点(相切情况).

(4)若$\begin{cases}4-3k^2<0\\ 1-k^2\neq0\end{cases}$　即$k<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$k>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则方程组无解，

故直线与双曲线无交点.

综上，当$k=\pm1$或$k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，直线与双曲线有一个公共点；

当$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<k<-1$或$-1<k<1$或$1<k<\frac{2\sqrt{3}}{2}$时，直线与双曲线有两个公共点；

当$k<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$或$k>\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，直线与双曲线无公共点.



11. (1)$F\in l\Leftrightarrow|FA|=|FB|$

$\Leftrightarrow A,B$两点到抛物线的准线的距离相等，

∵抛物线准线是x轴的平行线，$y_1\geqslant0$，$y_2\geqslant0$，依题意y_1，y_2不同时为0，

∴上述条件等价于$y_1=y_2\Leftrightarrow x_1^2=x_2^2\Leftrightarrow(x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$；

∵$x_1\neq x_2$，∴上述条件等价于$x_1+x_2=0$.

即当且仅当$x_1+x_2=0$时，l经过抛物线的焦点F.

(2)设l在y轴上的截距为b，依题意得l的方程为$y=2x+b$；过点A,B的直线方程可写为$y=-\frac{1}{2}x+m$，所以x_1，x_2满足方程

$2x^2+\frac{1}{2}x-m=0$，

得$x_1+x_2=-\frac{1}{4}$；

A,B为抛物线上不同的两点等价于方程$2x^2+\frac{1}{2}x-m=0$的判别式

$\triangle=\frac{1}{4}+8m>0$，即$m>-\frac{1}{32}$.

设AB的中点N的坐标为(x_0,y_0)，则

$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{1}{8}$，

$y_0=-\frac{1}{2}x_0+m=\frac{1}{16}+m$.

由$N\in l$，得$\frac{1}{16}+m=-\frac{1}{4}+b$，

于是$b=\frac{5}{16}+m>\frac{5}{16}-\frac{1}{32}=\frac{9}{32}$.

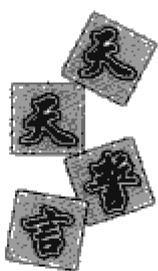
即得l在y轴上截距的取值范围为$\left(\frac{9}{32},+\infty\right)$.

12. (1)由已知可得点$A(-6,0)$，$F(4,0)$，

设点P的坐标是(x,y)，则$\overrightarrow{AP}=(x+6,y)$，$\overrightarrow{FP}=(x-4,y)$，

由已知得$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1,\\(x+6)(x-4)+y^2=0.\end{cases}$

则$2x^2+9x-18=0$，$x=\frac{3}{2}$或$x=-6$.



由于 $y>0$，只能 $x=\frac{3}{2}$，于是 $y=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$.

(2)直线 AP 的方程是 $x-\sqrt{3}y+6=0$，设点 M 的坐标是 $(m,0)$ 则 M 到直线 AP 的距离是 $\frac{|m+6|}{2}$，于是 $\frac{|m+6|}{2}=|m-6|$，

又 $-6\leqslant m\leqslant 6$，解得 $m=2$，

椭圆上的点 (x,y) 到点 M 的距离 d 为

$$\begin{aligned}d^2&=(x-2)^2+y^2\\&=x^2-4x+4+20-\frac{5}{9}x^2\\&=\frac{4}{9}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+15,\end{aligned}$$

由于 $-6\leqslant x\leqslant 6$，$\therefore$ 当 $x=\frac{9}{2}$ 时，d 取得最小值 $\sqrt{15}$.

13. (1)由抛物线 C 的方程 $y=ax^2(a<0)$ 得，焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{4a}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{1}{4a}$.

(2) 设直线 PA 的方程为 $y-y_0=k_1(x-x_0)$，

直线 PB 的方程为 $y-y_0=k_2(x-x_0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 和点 $A(x_1,y_1)$ 的坐标是方程组

$$\begin{cases}y-y_0=k_1(x-x_0) & ①\\ y=ax^2 & ②\end{cases}$$

的解，将②式代入①式得

$ax^2-k_1x+k_1x_0-y_0=0$，

于是 $x_1+x_0=\frac{k_1}{a}$，

故 $x_1=\frac{k_1}{a}-x_0$ ③

又点 $P(x_0,y_0)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的坐标是方程组

$$\begin{cases}y-y_0=k_2(x-x_0) & ④\\ y=ax^2 & ⑤\end{cases}$$

的解，将⑤式代入④式得

$$ax^2-k_2x+k_2x_0-y_0=0,$$

于是 $x_2+x_0=\frac{k_2}{a}$，故 $x_2=\frac{k_2}{a}-x_0$.

由已知得 $k_2=-\lambda k_1$，则

$$x_2=-\frac{\lambda}{a}k_1-x_0 \qquad ⑥$$

设点 M 的坐标为 (x_M,y_M)，由 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{MA}$，则

$$x_M=\frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}.$$

将③式和⑥式代入上式得 $x_M=\frac{-x_0-\lambda x_1}{1+\lambda}=-x_0$，

即 $x_M+x_0=0$.

所以线段 PM 的中点在 y 轴上.

(3)因为点 $P(1,-1)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上，

所以 $a=-1$，抛物线方程为 $y=-x^2$.

由③式知 $x_1=-k_1-1$，代入 $y=-x^2$，得 $y_1=-(k_1+1)^2$.

将 $\lambda=1$ 代入⑥式得 $x_2=k_1-1$，代入 $y=-x^2$，得 $y_2=-(k_1-1)^2$.

因此，直线 PA，PB 分别与抛物线 C 的交点 A，B 的坐标为

$A(-k_1-1,-k_1^2-2k_1-1)$，$B(k_1-1,-k_1^2+2k_1-1)$.

于是 $\overrightarrow{AP}=(k_1+2,k_1^2+2k_1)$，$\overrightarrow{AB}=(2k_1,4k_1)$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2k_1(k_1+2)+4k_1(k_1^2+2k_1)=2k_1(k_1+2)(2k_1+1)$.

因 $\angle PAB$ 为钝角且 P，A，B 三点互不相同，故必有 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}<0$，即

$$k_1(k_1+2)(2k_1+1)<0.$$

求得 k_1 的取值范围为 $k_1<-2$ 或 $-\frac{1}{2}<k_1<0$.

又点 A 的纵坐标 y_1 满足 $y_1=-(k_1+1)^2$，故

当 $k_1<-2$ 时，$y_1<-1$；

当 $-\frac{1}{2}<k_1<0$ 时，$-1<y_1<-\frac{1}{4}$.

所以，$\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围为

$$(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\frac{1}{4}\right).$$

14. (1)**证法一** 因为 A,B 分别是直线 $l:y=ex+a$ 与 x 轴、y 轴的交点，所以 A,B 的坐标分别是 $\left(-\frac{a}{e},0\right),(0,a)$.

由 $\begin{cases}y=ex+a,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-c,\\ y=\frac{b^2}{a}.\end{cases}$ 这里 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

所以点 M 的坐标是 $(-c,\frac{b^2}{a})$.

由 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，得 $\left(-c+\frac{a}{e},\frac{b^2}{a}\right)=\lambda\left(\frac{a}{e},a\right)$.

即 $\begin{cases}\frac{a}{e}-c=\lambda\frac{a}{e}\\ \frac{b^2}{a}=\lambda a.\end{cases}$ 解得 $\lambda=1-e^2$.

证法二 因为 A,B 分别是直线 $l:y=ex+a$ 与 x 轴、y 轴的交点，所以 A,B 的坐标分别是 $\left(-\frac{a}{e},0\right),(0,a)$.

设 M 的坐标是 (x_0,y_0)，

由 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，得 $(x_0+\frac{a}{e},y_0)=\lambda\left(\frac{a}{e},a\right)$，

所以 $\begin{cases}x_0=\frac{a}{e}(\lambda-1),\\ y_0=\lambda a.\end{cases}$

因为点 M 在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

即
$$\frac{\left[\frac{a}{e}(\lambda-1)\right]^2}{a^2}+\frac{(\lambda a)^2}{b^2}=1,$$

所以
$$\frac{(1-\lambda)^2}{e^2}+\frac{\lambda^2}{1-e^2}=1.$$
$$e^4-2(1-\lambda)e^2(1-\lambda)^2=0,$$

解得 $e^2=1-\lambda$，即 $\lambda=1-e^2$.

(2)**解法一** 因为 $PF_1\perp l$，所以 $\angle PF_1F_2=90^\circ+\angle BAF_1$ 为钝角. 要使 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，必有 $|PF_1|=|F_1F_2|$，即 $\frac{1}{2}|PF_1|=c$.

设点 F_1 到 l 的距离为 d，由

$\frac{1}{2}|PF_1|=d=\frac{|e(-c)+0+a|}{\sqrt{1+e^2}}=\frac{|a-ec|}{\sqrt{1+e^2}}=c$，

得 $\frac{1-e^2}{\sqrt{1+e^2}}=e$. 所以 $e^2=\frac{1}{3}$.

于是 $\lambda=1-e^2=\frac{2}{3}$.

即当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形.

解法二 因为 $PF_1\perp l$，所以 $\angle PF_1F_2=90^\circ+\angle BAF_1$ 为钝角.

要使 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，必有 $|PF_1|=|F_1F_2|$，

设点 P 的坐标是 (x_0,y_0)，则

$$\begin{cases}\dfrac{y_0-0}{x_0+c}=-\dfrac{1}{e}\\ \dfrac{y_0+0}{2}=e\,\dfrac{x_0-c}{2}+a\end{cases} \text{解得} \begin{cases}x_0=\dfrac{e^2-3}{e^2+1}c,\\ y_0=\dfrac{2(1-e^2)a}{e^2+1}.\end{cases}$$

由 $|PF_1|=|F_1F_2|$ 得

$$\left[\frac{(e^2-3)c}{e^2+1}+c\right]^2+\left[\frac{2(1-e^2)a}{e^2+1}\right]^2=4c^2,$$

两边同时除以 $4a^2$，化简得 $\frac{(e^2-1)^2}{e^2+1}=e^2$. 从而 $e^2=\frac{1}{3}$.

于是 $\lambda=1-e^2=\frac{2}{3}$.

即当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形.

15. (1)设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F(c,0)$，则直线 AB 的方程为

$$y=x-c,$$

代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，化简得

$$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2c^2-a^2b^2=0.$$

令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=\frac{2a^2c}{a^2+b^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$.

由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，$a=(3,-1)$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 a 共线，得

$$3(y_1+y_2)+(x_1+x_2)=0.$$

又 $y_1=x_1-c$，$y_2=x_2-c$，

$$\therefore \quad 3(x_1+x_2-2c)+(x_1+x_2)=0,$$

$$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{3c}{2}.$$

即 $\frac{2a^2c}{a^2+b^2}=\frac{3c}{2}$，所以 $a^2=3b^2$.

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{6}a}{3}$,



故离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)由(1)知 $a^2=3b^2$,所以椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,可化为 $x^2+3y^2=3b^2$.

设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$,由已知得$(x,y)=\lambda(x_1,y_2)+\mu(x_2,y_2)$,

∴ $\begin{cases} x=\lambda x_1+\mu x_2, \\ y=\lambda y_1+\mu y_2, \end{cases}$

∵$M(x,y)$在椭圆上,

∴ $$(\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2.$$

即 $\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2$ ①

由(1)知 $x_1+x_2=\frac{3}{2}c, a^2=\frac{3}{2}c^2, b^2=\frac{1}{2}c^2$.

$\therefore x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{3}{8}c^2$.

$\therefore x_1x_2+3y_1y_2=x_1x_2+3(x_1-c)(x_2-c)$

$=4x_1x_2-3(x_1+x_2)c+3c^2$

$=\frac{3}{2}c^2-\frac{9}{2}c^2+3c^2=0$.

又 $x_1^2+3y_1^2=3b^2, x_2^2+3y_2^2=3b^2$,

代入①得 $\lambda^2+\mu^2=1$. 故 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值,定值为 1.

16. (1)设双曲线 C_2 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,则 $a^2=4-1=3$.

再由 $a^2+b^2=c^2$,得 $b^2=1$.

故 C_2 的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)将 $y=kx+\sqrt{2}$代入$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,得

$$(1+4k^2)x^2+8\sqrt{2}kx+4=0,$$

由直线 l 与椭圆 C_1 恒有两个不同的交点得

$\Delta_1=(8\sqrt{2})^2k^2-16(1+4k^2)=16(4k^2-1)>0$,

即 $k^2>\frac{1}{4}$ ①

将 $y=kx+\sqrt{2}$代入$\frac{x^2}{3}-y^2=1$,得

$$(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0.$$

由直线 l 与双曲线 C_2 恒有两个不同的交点 A,B 得

$\begin{cases} 1-3k^2\neq 0 \\ \Delta_2=(-6\sqrt{2}k)^2+36(1-3k^2)=36(1-k^2)>0 \end{cases}$

即 $k^2 \neq \frac{1}{3}$ 且 $k^2 < 1$ ②

设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 则

$$x_A + x_B = \frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}, x_A x_B = \frac{-9}{1-3k^2},$$

由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 6$，得 $x_A x_B + y_A y_B < 6$，而

$x_A x_B + y_A y_B = x_A x_B + (kx_A + \sqrt{2})(kx_B + \sqrt{2})$

$= (k^2+1)x_A x_B + \sqrt{2}k(x_A + x_B) + 2$

$= (k^2+1) \cdot \frac{-9}{1-3k^2} + \sqrt{2}k \cdot \frac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2} + 2$

$= \frac{3k^2+7}{3k^2-1},$

于是 $\frac{3k^2+7}{3k^2-1} < 6$，即 $\frac{15k^2-13}{3k^2-1} > 0$.

解此不等式得

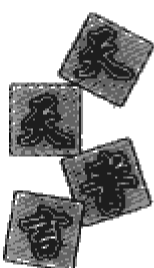
$k^2 > \frac{13}{15}$ 或 $k^2 < \frac{1}{3}$ ③

由①，②，③得

$$\frac{1}{4} < k^2 < \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{13}{15} < k^2 < 1.$$

故 k 的取值范围为

$$\left(-1, -\sqrt{\frac{13}{15}}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{13}{15}}, 1\right).$$



第十六章 对称问题巧亮相 闪金光

对称问题在近几年的各类试题中时有涉及，在高考试题中更占有一定的比例．一提到对称，大家很容易想到图形的对称，即我们常说的轴对称图形和中心对称图形，也就是关于直线的对称问题和关于点的对称问题．常见的题型分为两类，一类是解析几何中的对称问题，另一类是抽象函数中的对称问题．对称问题常涉及如下一些结论：

1．关于解析几何中的对称问题的结论

设方程 $f(x,y)=0$

(1) $f(-x,y)=0$ 与 $f(x,y)=0$ 关于 y 轴对称；

(2) $f(x,-y)=0$ 与 $f(x,y)=0$ 关于 x 轴对称；

(3) $f(-x,-y)=0$ 与 $f(x,y)=0$ 关于原点对称；

(4) $f(y,x)=0$ 与 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x$ 对称；

(5) $f(-y,-x)=0$ 与 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=-x$ 对称．

2．关于抽象函数中的对称问题的有关结论

(1)函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称；

(2)函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图象关于 x 轴对称；

(3)函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$ 的图象关于原点对称；

(4)函数 $f(x)$ 在定义域内若对任意 x 都有 $f(a+x)=f(a-x)$（a 为常数），则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；

(5)函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(m-x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{m}{2}$ 对称；

(6)函数 $y=f(x)$ 与 $y=2b-f(2a-x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称．

在解题过程中若能灵活地运用上面的结论会给解题带来很大的方便．

一、轴对称问题

解题秘言：有关轴对称和轴对称图形的知识我们在平面几何中就接触过，关键是抓住其对应点的连结线段被对称轴垂直平分这条性质．历年来的高考试题中，直接的或隐含的有关轴对称的考题还不少，我们仅就高考中出现的这类题型进行归纳和探讨．

1．关于坐标轴对称

因为坐标平面上任意一点 $P(x,y)$ 关于 x 轴的对称点为 $P'(x,-y)$，关于 y 轴的对称点为 $P''(-x,y)$，所以曲线 $f(x,y)=0$ 关于 x 轴的对称曲线为 $f(x,-y)=0$，关于 y 轴的对称曲线为 $f(-x,y)=0$．

例1 (2008年福建高考文·T12)已知函数 $f(x)=x^3+mx^2+nx-2$ 的图象过点$(-1,-6)$,且函数 $g(x)=f'(x)+6x$ 的图象关于 y 轴对称

(1)求 m、n 的值及函数 $y=f(x)$的单调区间;

(2)若 $a>0$,求函数 $y=f(x)$在区间$(a-1,a+1)$内的极植.

【规范解析】 (1)由函数 $f(x)$的图象过点$(-1,-6)$,

得 $m-n=-3$ ①

由 $f(x)=x^3+mx^2+nx-2$,

得 $f'(x)=3x^2+2mx+n$,

则 $g(x)=f'(x)+6x=3x^2+(2m+6)x+n$;

而 $g(x)$图象关于 y 轴对称,

所以 $g(-x)=g(x)$,即 $3x^2-(2m+6)x+n=3x^2+(2m+6)x+n$

解之得,$m=-3$ ②

把②代入①得 $n=0$.

于是 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

由 $f'(x)>0$ 得 $x>2$ 或 $x<0$,

故 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,0)$,$(2,+\infty)$;

由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<2$,

故 $f(x)$的单调递减区间是$(0,2)$,

(2)由(1)得 $f'(x)=3x(x-2)$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=2$.

当 x 变化时,$f'(x)$、$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由此可得:

当 $0<a<1$ 时,$f(x)$在$(a-1,a+1)$内有极大值 $f(0)=-2$,无极小值;

当 $a=1$ 时,$f(x)$在$(a-1,a+1)$内无极值;

当 $1<a<3$ 时,$f(x)$在$(a-1,a+1)$内有极小值 $f(2)=-6$,无极大值;

当 $a\geqslant 3$ 时,$f(x)$在$(a-1,a+1)$内无极值.

综上得:当 $0<a<1$ 时,$f(x)$有极大值-2,无极小值;当 $1<a<3$ 时,$f(x)$有极小值-6,无极大值;

当 $a=1$ 或 $a\geqslant 3$ 时,$f(x)$无极值.

例2 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射，其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切. 求光线 l 所在直线的方程.

【解】 已知圆 C 的方程是：$(x-2)^2+(y-2)^2=1$，关于 x 轴对称的圆 C' 的方程为：$(x-2)^2+(y+2)^2=1$.

设光线 l 所在直线方程为

$$y-3=k(x+3)$$

由题设知对称圆的圆心 $C'(2,-2)$ 到直线 l 的距离应为 1，即

$$d=\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$$

解得 $k=-\frac{3}{4}$ 或 $k=-\frac{4}{3}$.

故 l 的直线方程为

$y-3=-\frac{3}{4}(x+3)$ 或 $y-3=-\frac{4}{3}(x+3)$.

即 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$.

【解后感言】 这里无论是求关于 x 轴对称的对称圆的方程还是求对称圆的圆心，都只要以 $-y$ 代 y 即得.

2. **关于平行于坐标轴的直线对称**

设坐标平面上的任意一点 $P(x,y)$ 关于直线 $x=m$ 对称的点为 P'，由坐标平移公式可知，P' 的坐标应为 $(-(x-m)+m,y)$，即点 $P(x,y)$ 与 $P'(2m-x,y)$ 关于直线 $x=m$ 对称. 同理可知，点 $P(x,y)$ 与 $P''(x,2n-y)$ 关于直线 $y=n$ 对称.

所以 $f(x,y)=0$ 关于直线 $x=m$ 的对称曲线为 $f(2m-x,y)=0$，关于直线 $y=n$ 的对称曲线为 $f(x,2n-y)=0$.

例3 (2007 年天津高考理 · T7) 在 **R** 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=f(2-x)$. 若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，则 $f(x)$ ( )

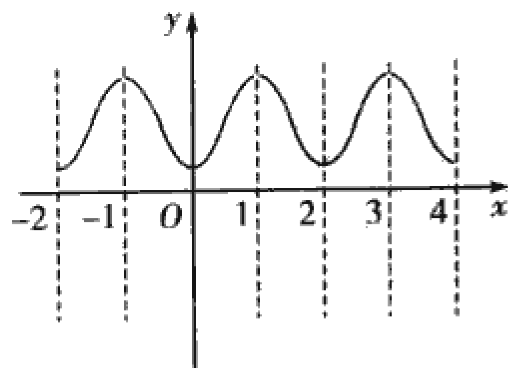
A. 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是增函数

B. 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数

C. 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，在区间 $[3,4]$ 上是增函数

D. 在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，在区间 $[3,4]$ 上是减函数

【解析】 这是抽象函数问题，根据题意画出满足条件的图象，根据图象可以直观地发现函数所具有的性质.



$\because f(x)=f(2-x)$，

$\therefore f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

又 $f(x)$ 关于 y 轴对称，根据题意画出示意图：

【答案】 B

例4 (2007年江苏高考·T16)设函数 $f(x)$ 定义在实数集上,它的图象关于直线 $x=1$ 对称,且当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)=3^x-1$,则有 ( )

A. $f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})<f\left(\frac{2}{3}\right)$

B. $f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)$

C. $f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)$

D. $f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{1}{3}\right)$

【解析】 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

$\therefore f(x)=f(2-x)$.

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(2-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\right),f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(2-\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$.

又$\because x\geqslant 1$ 时,$f(x)=3^x-1$ 为单调增函数,

且$\frac{4}{3}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$,

$\therefore f\left(\frac{4}{3}\right)<f\left(\frac{3}{2}\right)<f\left(\frac{5}{3}\right)$.

【答案】 B

3. 关于象限角平分线对称

设坐标平面上的任意一点 $P(x,y)$ 关于直线 $y=x$ 对称的点为 P',则 P' 的坐标为 (y,x);关于 $y=-x$ 对称的点为 P'',则 P'' 的坐标为
$(-y,-x)$.

所以 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x$ 的对称曲线为 $f(y,x)=0$;关于 $y=-x$ 的对称曲线为 $f(-y,-x)=0$.

例5 (2008年安徽高考理·T9)在同一平面直角坐标系中,函数 $y=g(x)$ 的图象与 $y=e^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,而函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称.若 $f(m)=-1$,则 m 的值为 ( )

A. $-e$　　　　B. $-\frac{1}{e}$

C. e　　　　D. $\frac{1}{e}$

【规范解析】 方法一:因 $y=g(x)$ 的图象与 $y=e^x$ 的图象关于 $y=x$ 对称,$\therefore y=g(x)=\ln x$,又$\because y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

$\therefore y=f(x)=\ln(-x)$,由 $f(m)=-1$ 得 $\ln(-m)=-1$.

$\therefore -m=e^{-1}$ 即 $m=-\frac{1}{e}$.

方法二：$\because f(m)=-1$，$\therefore y=f(x)$经过$(m,-1)$点，

$\because y=f(x)$的图象与$y=g(x)$的图象关于y轴对称，

$\therefore y=g(x)$经过$(-m,-1)$点，

又$\because y=g(x)$的图象与$y=e^x$的图象关于$y=x$对称，

$\therefore y=e^x$必经过点$(-1,-m)$因此$-m=e^{-1}$，

解这个方程得$m=-\frac{1}{e}$.

【答案】 B

例 9 (2008年天津高考理·$T_1$3)已知圆C的圆心与抛物线$y^2=4x$的焦点关于直线$y=x$对称.直线$4x-3y-2=0$与圆C相交于A,B两点，且$|AB|=6$，则圆C的方程为________.

【规范解析】 抛物线$y^2=4x$的焦点坐标为$(1,0)$，

由题意得，圆C的圆心坐标为$(0,1)$，

圆心到直线$4x-3y-2=0$的距离

$d=\frac{|4\times0-3\times1-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$，

$\therefore$圆C的半径为$\sqrt{1^2+(\frac{6}{2})^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore$圆的方程为$x^2+(y-1)^2=(\sqrt{10})^2=10$.

【答案】 $x^2+(y-1)^2=10$

例 10 (2007年四川高考理T8、文T10)已知抛物线$y=-x^2+3$上存在关于直线$x+y=0$对称的相异两点A、B，则$|AB|$等于 ( )

A. 3 B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

【规范解析】 设$A(x_1,x_1+b)$、$B(x_2,x_2+b)$，AB：$y=x+b$，

则$x_1+x_2=-[(x_1+b)+(x_2+b)]$，$\therefore b=-(x_1+x_2)$.

将$y=x+b$代入$y=-x^2+3$，得$x^2+x+b-3=0$.

$\therefore x_1+x_2=-1$. $\therefore b=1$. $\therefore x^2+x-2=0$，$x_1x_2=-2$.

$\therefore |AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\sqrt{2}$.

【答案】 C

4. 关于一般直线的对称

关于一般直线的对称问题，一类是点关于直线的对称问题，另一类是曲线关于直线的对称问题.曲线关于直线的对称问题常转化为点关于直线的对称问题.

一般地，点关于直线的对称问题的解法为：若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$关于直线l：$A_x+By+C=0$对称，则可得方程组



$$\begin{cases} A\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+B\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}+C=0 \\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{B}{A} \end{cases}$$

由此解决点关于直线的对称问题.

例 9 （2008年天津高考文·T15）已知圆 C 的圆心与点 $P(-2,1)$ 关于直线 $y=x+1$ 对称，直线 $3x+4y-11=0$ 与圆 C 相交于 A,B 两点，且 $|AB|=6$，则圆 C 的方程为________.

【规范解析】 设圆心坐标为 (x_0,y_0)，则由已知得

$$\begin{cases} \dfrac{y_0-1}{x_0+2}\cdot 1=-1 \\ \dfrac{y_0+1}{2}=\dfrac{x_0-2}{2}+1 \end{cases},$$

即 $\begin{cases} x_0+y_0+1=0 \\ x_0-y_0-1=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=-1 \end{cases}$，

∴圆心坐标为 $(0,-1)$.

又∵圆心到直线 $3x+4y-11=0$ 的距离

$d=\dfrac{|3\times 0+4\times(-1)-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，

直线 $3x+4y-11=0$ 截圆 C 所得弦长为 6，

∴圆 C 的半径为 $\sqrt{3^2+(\dfrac{6}{2})^2}=3\sqrt{2}$，

∴圆 C 的方程为 $x^2+(y+1)^2=(3\sqrt{2})^2=18$.

【答案】 $x^2+(y+1)^2=18$

例 10 （2008年湖南高考文·T19）已知椭圆的中心在原点，一个焦点是 $F(2,0)$，且两条准线间的距离为 $\lambda(\lambda>4)$.

(1)求椭圆的方程；

(2)若存在过点 $A(1,0)$ 的直线 l，使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上，求 λ 的取值范围.

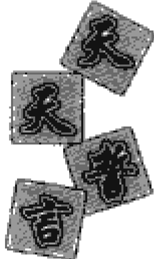
【规范解析】 (1)设椭圆的方程为

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由条件知 $c=2$，且 $\dfrac{2a^2}{c}=\lambda$，所以 $a^2=\lambda$.

$b^2=a^2-c^2=\lambda-4$，

故椭圆的方程是 $\dfrac{x^2}{\lambda}+\dfrac{y^2}{\lambda-4}=1(\lambda>4)$.



(2)依题意，直线 l 的斜率存在且不为 0，

设为 k，则直线 l 的方程是 $y=k(x-1)$，设点 $F(2,0)$ 关于直线 l 的对称点为 $F'(x_0,y_0)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{y_0}{2}=k\left(\dfrac{x_0+2}{2}-1\right)\\ \dfrac{y_0}{x_0-2}\cdot k=-1\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{2}{1+k^2}\\ y_0=\dfrac{2k}{1+k^2}\end{cases}$

因为点 $F'(x_0,y_0)$ 在椭圆上，所以

$$\frac{\left(\frac{2}{1+k^2}\right)^2}{\lambda}+\frac{\left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2}{\lambda-4}=1,$$

即 $\lambda(\lambda-4)k^4+2\lambda(\lambda-6)k^2+(\lambda-4)^2=0$.

设 $k^2=t$，则 $\lambda(\lambda-4)t^2+2\lambda(\lambda-6)t+(\lambda-4)^2=0$.

因为 $\lambda>4$，所以 $\dfrac{(\lambda-4)^2}{\lambda(\lambda-4)}>0$.

于是，当且仅当 $\begin{cases}\Delta=[2\lambda(\lambda-6)]^2-4\lambda(\lambda-4)^3\geqslant 0\\ -\dfrac{2\lambda(\lambda-6)}{\lambda(\lambda-4)}>0\end{cases}$ (＊)

上述方程存在正实根，即直线 l 存在，

解(＊)得 $\begin{cases}0\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{16}{3}\\ 4<\lambda<6\end{cases}$

所以 $4<\lambda\leqslant\dfrac{16}{3}$，即 λ 的取值范围是 $4<\lambda\leqslant\dfrac{16}{3}$.

5. **求对称轴的方程**

解题秘言：一般地，求二次曲线的对称轴的问题，只要将曲线方程化为标准形式就不难解决. 对于抽象函数有时则需运用前面归纳的有关抽象函数对称问题的一些结论.

例 1 (2008 年安徽高考文・T8)函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴方程可能是 ( )

A. $x=-\frac{\pi}{6}$　　B. $x=-\frac{\pi}{12}$

C. $x=\frac{\pi}{6}$　　D. $x=\frac{\pi}{12}$



【规范解析】 方法一：由 $y=\sin x$ 的对称轴方程是

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{12}$，故选 D.

【答案】 D

【解后感言】 本题的解法是求对称轴方程的通法之一. 作为选择题，本题还可用特殊值法来求.

方法二：$x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}=0$，其正弦值为 0，

$x=-\frac{\pi}{12}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，其正弦值不等于 1 或 -1.

$x=\frac{\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，其正弦值不等于 1 或 -1.

而当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，这时 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，故选 D.

例 12 (2008 年安徽高考文 · T17) 已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和图象的对称轴方程；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ 上的值域.

【规范解析】 (1) $\because f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)$

$=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\sin^2x-\cos^2x$

$=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\cos2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

$\therefore$ 最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ 函数图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

(2) $\because x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$.

因为 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

所以当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 1.

又∵ $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

∴当 $=-\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

例 13 直线 $3x+2y-1=0$ 关于直线 l 对称的直线方程为：$x-y-2=0$，求 l 的方程.

【解】 由 $\begin{cases}3x+2y-1=0\\x-y-2=0\end{cases}$ 得两直线的交点坐标为 $(1,-1)$.

设所求的直线 l 的方程为：$y+1=k(x-1)$. 依 l 为两已知直线夹角的平分线，知

$$\frac{k-1}{1+k}=\frac{-\frac{3}{2}-k}{1-\frac{3}{2}k}$$

解得 $k=5\pm\sqrt{26}$

∴ l 的方程为：$y+1=(5\pm\sqrt{26})(x-1)$.

【解后感言】 因为相交两直线其对称轴为互相垂直的两条直线，故有两解. 本例也可用直线系方程来解，但运算量比此法还大，读者可试试.

二、中心对称问题

解题秘言：中心对称问题要抓住两对称点被其中心平分这一性质. 求已知曲线 $f(x,y)=0$ 关于点 $Q(m,n)$ 的对称曲线，也只要在曲线 $f(x,y)=0$ 上取点 $P(x',y')$，找出 P 关于 Q 的对称点 $P'(x,y)$，建立 x,y 与 x',y' 之间的关系方程，视 x',y' 为参数，代入已知曲线方程消去 x',y'，即得所求的曲线方程.

例 1 （2008 年宁夏高考理 · T21）设函数 $f(x)=ax+\frac{1}{x+b}(a,b\in\mathbf{Z})$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=3$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）证明：函数 $y=f(x)$ 的图像是一个中心对称图形，并求其对称中心；

（Ⅲ）证明：曲线 $y=f(x)$ 上任一点的切线与直线 $x=1$ 和直线 $y=x$ 所围三角形的面积为定值，并求出此定值.



【规范解析】（Ⅰ）$f'(x)=a-\frac{1}{(x+b)^2}$，

于是$\begin{cases}2a+\frac{1}{2+b}=3\\a-\frac{1}{(2+b)^2}=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{9}{4}\\b=-\frac{8}{3}\end{cases}$.

因 $a,b\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$.

（Ⅱ）已知函数 $y_1=x$，，$y_2=\frac{1}{x}$都是奇函数.

所以函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$也是奇函数，其图像是以原点为中心的中心对称图形.

而 $f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}+1$.

可知，函数 $g(x)$的图像按向量$\overrightarrow{a}=(1,1)$平移，即得到函数 $f(x)$的图像，故函数 $f(x)$的图像是以点$(1,1)$为中心的中心对称图形.

（Ⅲ）在曲线上任取一点$\left(x_0,x_0+\frac{1}{x_0-1}\right)$.

由 $f'(x_0)=1-\frac{1}{(x_0-1)^2}$知，过此点的切线方程为

$y-\frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}=\left[1-\frac{1}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)$.

令$=1$ 得 $y=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，切线与直线 $x=1$ 交点为$\left(1,\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$.

令 $y=x$ 得 $y=2x_0-1$，切线与直线 $y=x$ 交点为$(2x_0-1,2x_0-1)$.

直线 $x=1$ 与直线 $y=x$ 的交点为$(1,1)$.

从而所围三角形的面积为$\frac{1}{2}\left|\frac{x_0+1}{x_0-1}-1\right|\left|2x_0-1-1\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0-1}\right|\left|2x_0-2\right|=2$.

所以，所围三角形的面积为定值 2.

例 2 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{3}{4},0\right)$对称，且满足 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，$f(-1)=1$，$f(0)=-2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$的值为（　　）

A. -2　　B. -1

C. 0　　D. 1

【解】 由 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$，知

$$f(x+3)=f\left(x+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f(x)$$



∴函数 $y=f(x)$ 的周期为 $T=3$

又∵函数图象关于点，$\left(-\frac{3}{4},0\right)$对称

∴若(x,y)为 $y=f(x)$ 上的点，则(x,y)关于$\left(-\frac{3}{4},0\right)$的对称点$\left(-\frac{3}{2}-x,-y\right)$也在 $y=f(x)$ 图象上

∴$-f(x)=f\left(-\frac{3}{2}-x\right)$

∴由题意知 $f\left(x+\frac{3}{2}\right)=f\left(-x-\frac{3}{2}\right)$

∵$x+\frac{3}{2}\in\mathbf{R}$　∴$f(x)$为偶函数

又 $f(-1)=1$　∴$f(1)=1,f(2)=f(-1+3)=f(-1)=1$

∵$f(0)=-2$　∴$f(3)=-2$　∴$f(1)+f(2)+f(3)=0$

∴原式$=669[f(1)+f(2)+f(3)]+f(1)=f(1)=1$

∴选 D.

【解后感言】 对于求解曲线 $f(x,y)=0$ 或函数 $y=f(x)$ 关于点 $Q(m,n)$ 的对称问题，一般方法是：设 $P(x,y)$ 是所求曲线上任一点，其关于点 Q 的对称点 $P'(x',y')$ 在已知曲线上.

例3 设函数 $f(x)=x+\frac{1}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的图象为 C_1，C_1 关于点 $A(2,1)$ 对称的图象为 C_2，C_2 对应的函数为 $g(x)$，求函数 $g(x)$ 的解析式及定义域.

【解】 设 $P'(x',y')$ 为 C_1 上任意一点，$P'(x',y')$ 关于点 $A(2,1)$ 的对称点为 $P(x,y)$，则有

$$\begin{cases}\frac{x'+x}{2}=2\\\frac{y'+y}{2}=1\end{cases}\quad 即\begin{cases}x'=4-x\\y'=2-y\end{cases}\qquad ①$$

又点 P' 在 C_1 上，所以 $y'=x'+\frac{1}{x'}$　②

由①②得：$y=x-2+\frac{1}{x-4}$

∵$x'\neq0$　∴$x\neq4$

即 $g(x)=x-2+\frac{1}{x-4},x\in(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$.

【解后感言】 若将曲线方程 $F(x,y)=0$ 中的 x,y 分别用 $2m-x,2n-y$ 代替，且 $F(2m-x,2n-y)=F(x,y)$（即方程在代换后不变），则该曲线是中心对称曲线，点 $M(m,n)$ 是它的对称中心. 如 $y=x+\frac{1}{x}$ 是关于原点$(0,0)$对称的中心对称曲线.

三、用对称思想解题

解题秘言:对称问题其实在数学中是广泛存在的,如果能注意发现和挖掘,在解题时常能获得意想不到的简便解法.

例1 解关于 x,y,z 的方程组 $\begin{cases}x+ay+a^2z=a^3\\x+by+b^2z=b^3\\x+cy+c^2z=c^3\end{cases}$ (a,b,c 互不相等.)

【解】 易见 a,b,c 均是方程 $t^3-zt^2-yt-x=0$ 的根.依韦达定理,有

$\begin{cases}a+b+c=z\\ab+bc+ca=-y\\abc=x\end{cases}$ 即原方程的解为 $\begin{cases}x=abc\\y=-(ab+bc+ca)\\z=a+b+c\end{cases}$

【解后感言】 本题如果用消元法解,计算量较大.这里注意到未知数 x,y,z 及系数 a,b,c 在问题中的对称地位,巧妙地运用其对称关系,逆用方程根的定义及韦达定理,使问题的解法简捷、清晰.

例2 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对于任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$,那么 ( )

A. $f(2)<f(1)<f(4)$　　B. $f(1)<f(2)<f(4)$

C. $f(2)<f(4)<f(1)$　　D. $f(4)<f(2)<f(1)$

【解】 由 $f(2+t)=f(2-t)$ 知二次函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称.

$\therefore f(1)=f(3)$

又曲线开口向上,$f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数

$\therefore f(2)<f(3)<f(4)$,即 $f(2)<f(1)<f(4)$

故选 A.

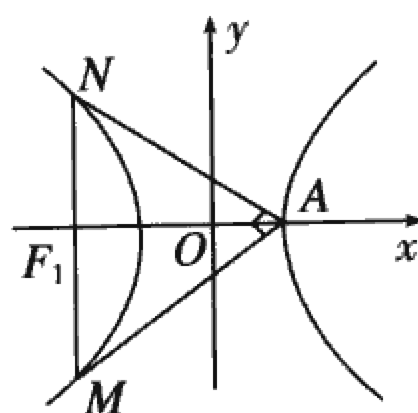
【解后感言】 利用数形结合及找出函数图象的对称轴是解题的关键.本题充分利用对称思想使问题得以迅速解决.

例3 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M,N 两点,以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点,则双曲线的离心率等于________.

【解】 把 $x=-c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$,则 $|MF_1|=|NF_1|=\frac{b^2}{a}$.

由于以 MN 为直径的圆过右顶点 $A(a,0)$,则 $\angle MAN=90°$,又由于 M 和 N 两点关于 x 轴对称,则 $\angle MAF_1=\angle NAF_1=45°$,所以 $|AF_1|=$
$|MF_1|=|NF_1|$,即

$a-(-c)=\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}$



$\Rightarrow c^2-ac-2a^2=0\Rightarrow\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}-2=0$

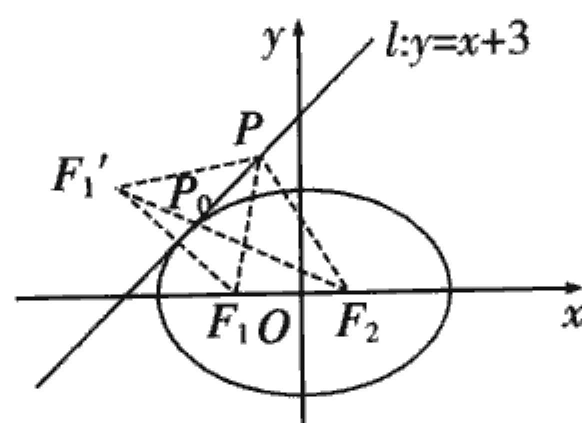
即 $e^2-e-2=0$

解得 $e=2$.

【解后感言】 对于二次曲线,利用它化为标准形式后的对称轴和对称中心来研究问题极为方便,应注意这一技巧.

例 4 在直线 $l:y=x+3$ 上取一点 P,过点 P 且以双曲线 $12x^2-4y^2=3$ 的焦点为焦点作椭圆,求椭圆长轴长的最小值及此时 P 点的坐标与椭圆方程.

【解】 易求得双曲线的两焦点分别为 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,由此设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ $(a>0)$.



如图示:易求得 F_1 关于直线 l 的对称点为 $F_1'(-3,2)$. 则直线 l 与直线 $F_1'F_2:y=-\frac{1}{2}(x-1)$ 的交点是 $P_0\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$.

由椭圆定义及平面几何的结论得

$$2a=|F_1P|+|F_2P|=|F_1'P|+|F_2P|$$
$$\geqslant|F_1'F_2|=\sqrt{(1+3)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$$

当且仅当点 P 重合于点 P_0 时,上式取"="号.

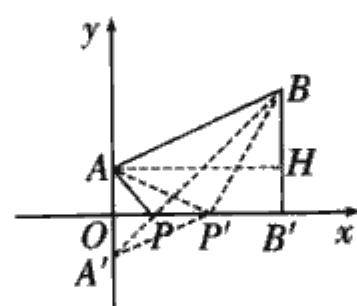
故椭圆长轴长的最小值为 $2\sqrt{5}$.

此时 P 点坐标为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$,椭圆方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

【解后感言】 用对称思想解题,不仅可以利用对称的性质沟通已知与未知,使分散的条件相对集中,促成问题的解决,而且可以简化计算,提高解题速度.

例 5 小河同侧有两个村庄 A,B,两村庄计划在河上共建一水电站发电供两村使用,已知 A,B 两村到河边垂直距离分别为 300 m 和 700 m,且两村相距 500 m,问水电站建于何处,送电到两村电线用料最省?

【解】 以小河 l 所在的直线为 x 轴,过 A 点与 l 垂直的直线为 y 轴建立平面直角坐标系,如图,作 A 关于 x 轴的对称点 A',连 $A'B$. 设 $A'B$ 与 x 轴交于 P 点,则 P 点即为所求. 即 $|PA|+|PB|$ 为最小(若在 l 上任取一点 P',则 $|P'A|+|P'B|>|A'B|=|PA|+|PB|$).



令 $A(0,300)$，$A'(0,-300)$，过 B 点作 $BB'\perp x$ 轴于点 B'，过 A 作 $AH\perp BB'$ 于 H.

$\because |AO|=300$，$|BB'|=700$

$\therefore |BH|=400$

又 $|AB|=500$，　$\therefore |AH|=300$　$\therefore B(300,700)$

$\therefore$ 直线 $A'B$ 的方程为

$$\frac{y-700}{-300-700}=\frac{x-300}{0-300}\quad 即\ y=\frac{10}{3}x-300$$

$\therefore$ 易求直线 $A'B$ 与 x 轴交点的坐标为 $(90,0)$，此即点 P 坐标.

$\therefore |OP|=90(\mathrm{m})$

答：水电站应建在河边距离 A 点到小河所作垂线的垂足处 90 米远时用料最省.

【解后感言】 一般地，已知两点 A,B，在直线 l 上求一点 P，使

(1) $|PA|+|PB|$ 最小值问题：若 A,B 在直线 l 的同侧，作 A(或 B) 关于 l 的对称点 A'(或 B')，连结 $A'B$(或 AB')，与 l 的交点即为所求. 若 A,B 在 l 的异侧，直接连结 AB，与 l 的交点即为所求.

(2) $||PA|-|PB||$ 的最大值问题：若 A,B 在直线 l 的同侧，AB 所在的直线与 l 的交点即为所求. 若 A,B 在直线 l 的异侧，作 A(或 B) 关于直线 l 的对称点 A'(或 B')，连结 $A'B$(或 AB')，$A'B$ 或 AB' 所在的直线与 l 的交点即为所求.

实战秘修十六

1. 设函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=\log_2(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $f(x)=$ (　　)

A. $y=\log_2(1+x)$　　B. $y=\log_2(x-1)$

C. $y=\log_2(x-2)$　　D. $y=\log_2(2-x)$

2. (2008 年北京高考理 · T7) 过直线 $y=x$ 上的一点作圆 $(x-5)^2+(y-1)^2=2$ 的两条切线 l_1、l_2 当直线 l_1、l_2 关于 $y=x$ 对称时，它们之间的夹角为 (　　)

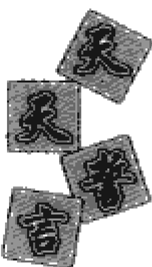
A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

3. (2008 湖北高考理 · T5) 将函数 $y=3\sin(x-\theta)$ 的图象 F 按向量 $\left(\frac{\pi}{3},3\right)$ 平移得到图象 F'，若 F' 的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{4}$，则 θ 的一个可能取值是 (　　)

A. $\frac{5}{12}\pi$　　B. $-\frac{5}{12}\pi$

C. $\frac{11}{12}\pi$　　D. $-\frac{11}{12}\pi$



4.(2008年全国Ⅰ高考文·T8)若函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x)=$ ( )

A. e^{2x-2}　　B. e^{2x}

C. e^{2x+1}　　D. e^{2x+2}

5. 若函数 $y=f(x)$ 的图象和 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象关于点 $M\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，则 $f(x)$ 的表达式是 ( )

A. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

C. $-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x+a}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象的对称中心坐标为(0,2)，则 a 的值为 ( )

A. -1　　B. 0

C. 2　　D. -2

7. 已知 A 点是圆 $x^2+y^2-2ax+4y-6=0$ 上任一点，A 点关于直线 $x+2y+1=0$ 的对称点也在圆上，那么实数 a 等于________.

8. 将一张坐标纸折叠一次，使得点(0,2)与点(−2,0)重合，点(2005,2006)与点(m，n)重合，则 $n-m=$________.

9. 若光线从点 $A(3,5)$ 射到直线 $3x-y+4=0$ 之后反射到点 $B(3,9)$，则此光线所经过的路程长是________.

10. 直线 $2x+3y-6=0$ 关于点(1,−1)对称的直线是________.

11. 曲线 $y^2=4x$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线方程是________.

12. 已知圆 C：$x^2+y^2+4x-12y+39=0$ 和直线 l：$3x-4y+5=0$. 求圆 C 关于直线 l 对称的圆 C' 的方程.

13. 曲线 C_1 的方程为 $y=f(x)$(定义在 **R** 上有反函数)，若曲线 C_2 和 C_1 关于 y 轴对称，曲线 C_3 和 C_2 关于直线 $2x+2y-5=0$ 对称，求曲线 C_3 的方程.

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$.

(1)求出公差 d 的取值范围；

(2)指出 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中哪一个值最大，并说明理由.

15. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为负数，且对于任意实数 x 有 $f(2-x)=f(2+x)$. 求不等式 $f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right]<\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right)\right]$ 的解.

16. 已知函数 $f(x)$ 对一切实数 x 都满足 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$，并且方程 $f(x)=0$ 有三个实根，求这三个实根的和.

17. 已知直线 l: $x+y-9=0$ 及椭圆 C: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. 求以 C 的焦点为焦点，与直线 l 有公共点，且长轴最短的椭圆的方程.

18. 已知直线 l: $2x-y-2=0$ 及双曲线 C: $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. 求以 C 的焦点为焦点，与直线 l 有公共点，且实轴最长的双曲线方程.

19.（第九届美国奥林匹克试题）设 $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$，试证明：

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

实战秘修十六答案与提示

1. B　在 $y=\log_2(1-x)$ 上取点 $(0,0)$. 此点关于 $x=1$ 对称点为 $(2,0)$ 将 $(2,0)$ 点代入只有 B 符合要求.

2. C　设过直线 $y=x$ 上一点 P 作圆的切线，圆心为 $Q(5,1)$，∵直线 l_1、l_2 关于 $y=x$ 对称，∴直线 PQ 与 l: $y=x$ 垂直，点 Q 到直线 l 的距离 $d=\frac{|5-1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，又圆的半径为 $\sqrt{2}$，∴l_1、l_2 与直线 PQ 的夹角均是 $30°$. ∴l_1 与 l_2 的夹角为 $2\times 30°=60°$，故选 C.

3. A　解法一：函数 $y=3\sin(x-\theta)$ 按向量 $\left(\frac{\pi}{3},3\right)$ 平移得到 $y=3\sin\left[x-\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right]+3$，则 $\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\theta=-k\pi-\frac{7}{12}\pi$，当 $k=-1$ 时，$\theta=\frac{5}{12}\pi$，故选 A.

解法二：验证，若 $\theta=\frac{5}{12}\pi$，$y=3\sin\left(x-\frac{5}{12}\pi\right)$ 按向量 $\left(\frac{\pi}{3},3\right)$ 平移为 $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}-\frac{5}{12}\pi\right)+3=3\sin\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)+3$.

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y=3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+3=0$ 为最小值，符合要求，故选 A.

4. A　由 $y=\ln\sqrt{x+1}$，得 $y-1=\ln\sqrt{x}$，

即 $\sqrt{x}=e^{y-1}$，∴$x=e^{2y-2}$，

∴与 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称的图象的函数为 $y=e^{2x-2}$.

5. C 设 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$图象上任一点为$(x,y)$，它关于点 $M(\frac{\pi}{4},0)$对称的点为(x',y')，

则$\begin{cases}\frac{x+x'}{2}=\frac{\pi}{4}\\ \frac{y+y'}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}-x'\\ y=-y'\end{cases}$

$\therefore -y'=\sin(\frac{\pi}{2}-x'+\frac{\pi}{4})=\cos(x'-\frac{\pi}{4})$

$\therefore y'=-\cos(x'-\frac{\pi}{4})$.

6. D ∵原函数 $f(x)=\frac{1}{x+a}$关于$(-a,0)$中心对称，

∴反函数 $f^{-1}(x)$图象关于$(0,-a)$中心对称

$\therefore -a=2,a=-2$.

7. 3 由圆的性质知，直线 $x+2y+1=0$ 为圆的对称轴.

即圆心$(a,-2)$一定在直线上 $\therefore a+2\times(-2)+1=0$ $\therefore a=3$.

8. 1 依题意，$(2005,2006)$与(m,n)关于 $y=-x$ 对称，

$\therefore m=-2006,n=-2005$ $\therefore n-m=1$.

9. $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ 点 $A(3,5)$关于直线 $3x-y+4=0$ 的对称点为(x_1,y_1)

则有$\begin{cases}\frac{y_1-5}{x_1-3}=-\frac{1}{3}\\ 3\times\frac{3+x_1}{2}-\frac{5+y_1}{2}+4=0\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_1=-\frac{9}{5}\\ y_1=\frac{33}{5}\end{cases}$

∴所求路程长为$\sqrt{(3+\frac{9}{5})^2+(9-\frac{33}{5})^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

10. $2x+3y+8=0$ 设所求直线上任意一点坐标为(x,y)，它关于点$(1,-1)$对称的点为(x',y').

则$\begin{cases}\frac{x+x'}{2}=1\\ \frac{y+y'}{2}=-1\end{cases}$ 得$\begin{cases}x'=2-x\\ y^1=-2-y\end{cases}$

又∵点(x',y')在直线 $2x+3y-6=0$ 上，

$\therefore 2(2-x)+3(-2-y)-6=0$

即 $2x+3y+8=0$ 为所求直线方程.

11. $y^2=16-4x$ 设 $P(x,y)$ 是所求曲线上的点，它关于 $x=2$ 的对称点为 $Q(x',y')$.

$\therefore x'=4-x, y'=y$　又点 Q 在 $y^2=4x$ 上，

$\therefore y^2=16-4x$ 为所求曲线方程.

12. $\odot C$ 的圆心为 $(-2,6)$，半径为点 $(-2,6)$ 关于直线 $3x-4y+5=0$ 的对称点为 $(4,-2)$，所以 $\odot C'$ 的圆心为 $(4,-2)$，于是 C' 的方程为 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$.

13. 曲线 C_2 的方程为

$$y=f(-x) \quad ①$$

由对称轴方程 $2x+2y-5=0$ 得 $x=-y+\frac{5}{2}$，$y=-x+\frac{5}{2}$，将它们同时代入①，得 $-x+\frac{5}{2}=f\left(y-\frac{5}{2}\right)$.

则 $y=f^{-1}\left(-x+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}$ 是曲线 C_3 的方程.

14. (1) $-\frac{24}{7}<d<-3$.

(2)由等差数列的对称性，知

$$\begin{cases} S_{12}=\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}=\dfrac{12(a_6+a_7)}{2}>0 \\ S_{13}=\dfrac{13(a_1+a_{13})}{2}=\dfrac{13\cdot 2a_7}{2}<0 \end{cases}$$

由(1)知 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 S_6 最大.

15. 由题设知二次函数 $f(x)$ 的图象是以 $x=2$ 为对称轴，开口向下的抛物线.

又
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left[2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$$

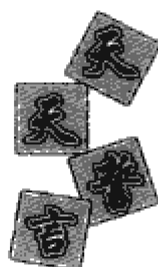
$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x^2+x+\frac{1}{2})$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-x+\frac{5}{8})$ 的值都在 $(-\infty,2)$ 内.

而 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 内是单调增函数，所以由原不等式，有

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right)$$

于是
$$x^2+x+\frac{1}{2}>2x^2-x+\frac{5}{8}>0$$

解得
$$1-\frac{\sqrt{14}}{4}<x<1+\frac{\sqrt{14}}{4}.$$



16. 由 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{1}{2}-x\right)$ 知函数图象的对称轴是 $x=\frac{1}{2}$. 因为 $f(x)$ 有三个实根,所以 $x=\frac{1}{2}$ 定是一个根,其余的两个实根关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称,所以三根之和为 $\frac{3}{2}$.

17. 焦点 $F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$,依题意应在 l 上找一点 P 使 $|PF_1|+|PF_2|$ 最短,只需求 F_2 关于 l 的对称点 $F(9,6)$,于是 $|2a|_{\min}=|FF_1|=6\sqrt{5}$,即 $a^2=45$,$c^2=9$,得所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$.

18. 焦点 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,同上题,只需找 l 上一点 P,使 P 到 F_1,F_2 的距离之差(∵F_1,F_2 在 l 两旁)最长,求 F_2 关于 l 的对称点 $F\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$,得

$|2a|_{\max}=|FF_1|=\frac{4}{5}\sqrt{10}$,$a^2=\frac{8}{5}$,$c^2=4$.

所求双曲线方程为 $\frac{5x^2}{8}-\frac{5y^2}{12}=1$.

19. 依原式的对称性,不妨设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$.

则 $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}$

证原不等式只需证

$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1$

$\Leftrightarrow(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\frac{1-c}{a+b+1}\Leftrightarrow(1-a)(1-b)\leqslant\frac{1}{a+b+1}$

$\Leftrightarrow(1-a)(1-b)(a+b+1)\leqslant 1$.

因为 $(1-a)(1-b)(a+b+1)\leqslant(1-a)(1-b)(1+a)(1+b)\leqslant(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1$

故原不等式成立.

第十七章 轨迹方程的探求试评说

求平面上动点的轨迹方程不仅是教学大纲要求掌握的主要内容之一，也是高考考查的重点内容之一.

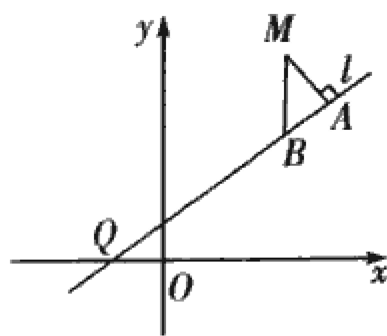
轨迹即点的集合，而方程为实数对的集合. 求符合某种条件的动点轨迹的方程，其实质就是利用已知的点的坐标间的特性(运动规律)去寻求变量间关系的方程. 因此，求轨迹方程的基本指导思想，就是充分利用题设中的几何条件，通过"解析化"将其转化为代数方程.

由于动点运动规律所给出的条件千差万别，因此求动点轨迹方程的方法也多种多样，这里介绍几种常用的方法.

一、直接法

解题秘言：如果动点满足的几何条件本身就是一些几何量的等量关系，或这些几何条件简单明了且易于表达，我们只须把这种关系"翻译"成含 x,y 的等式就得到曲线的轨迹方程. 由于这种求轨迹方程的过程不需其他步骤，也不需要特殊的技巧，所以称之为直接法.

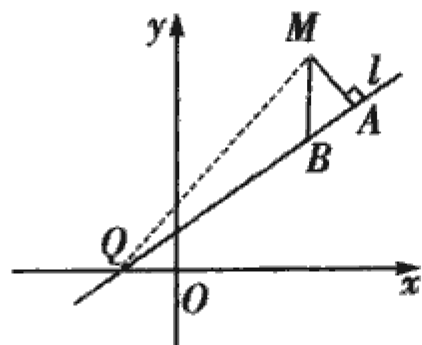
例 1 (2008 年浙江高考理·T20)已知曲线 C 是到点 $P(-\frac{1}{2},\frac{3}{8})$ 和到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 距离相等的点的轨迹. l 是过点 $Q(-1,0)$ 的直线，M 是 C 上(不在 l 上)的动点；A、B 在 l 上，$MA\perp l$，$MB\perp x$ 轴(如图).



(1)求曲线 C 的方程；

(2)求出直线 l 的方程，使得 $\frac{|QB|^2}{|QA|}$ 为常数.

【规范解析】 (1)设 $N(x,y)$ 为 C 上的点，则



$$|NP|=\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2},$$

N 到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 的距离为 $|y+\frac{5}{8}|$，

由题设得 $\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2}=|y+\frac{5}{8}|$，

化简，得曲线 C 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x^2+x)$.

(2)**方法一**：设 $M(x,\frac{x^2+x}{2})$，由 l 过点 $Q(-1,0)$，设直线 l：$y=kx+k$，

则 $B(x,kx+k)$，从而

$|QB|=\sqrt{1+k^2}|x+1|$，

在 $Rt\triangle QMA$ 中，因为

$|QM|^2=(x+1)^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$，

$|MA|^2=\frac{(x+1)^2\left(k-\frac{x}{2}\right)^2}{1+k^2}$，

所以 $|QA|^2=|QM|^2-|MA|^2$

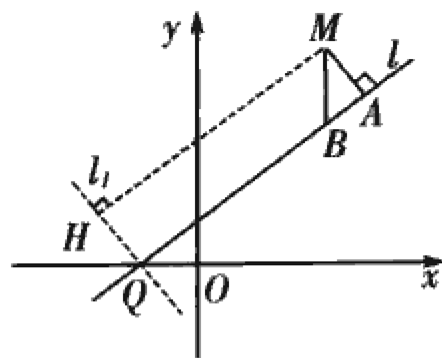
$=\frac{(x+1)^2}{4(1+k^2)}(kx+2)^2$

$|QA|=\frac{|x+1|\cdot|kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}}$，

$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|}\cdot\left|\frac{\frac{x+1}{2}}{x+\frac{2}{k}}\right|$，

当 $k=2$ 时，$\frac{|QB|^2}{|QA|}=5\sqrt{5}$，

从而所求直线 l 方程为 $2x-y+2=0$.



方法二：设 $M\left(x,\frac{x^2+x}{2}\right)$，直线 l：$y=kx+k$，则 $B(x,kx+k)$，从而 $|QB|=\sqrt{1+k^2}|x+1|$，

过 $Q(-1,0)$ 作垂直于 l 的直线 l_1：$y=-\frac{1}{k}(x+1)$，

因为 $|QA|=|MH|$，所以

$|QA|=\frac{|x+1|\cdot|kx+2|}{2\sqrt{1+k^2}}$

$\frac{|QB|^2}{|QA|}=\frac{2(1+k^2)\sqrt{1+k^2}}{|k|}\cdot\left|\frac{\frac{x+1}{2}}{x+\frac{2}{k}}\right|$，

当 $k=2$ 时，$\frac{|QB|^2}{|QA|}=5\sqrt{5}$，

从而所求直线 l 方程为 $2x-y+2=0$.

【解后感言】 从本例可见直接法求轨迹的一般步骤为：

①必要时建立直角坐标系，设动点坐标为(x,y)；

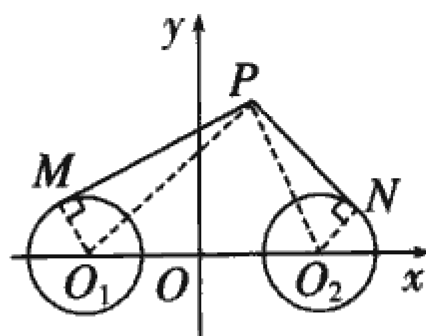
②根据题设条件直接列出几何关系式(或等量关系式)；

③将上述关系式转化为方程式$F(x,y)=0$；

④整理，化简方程式为轨迹方程；

⑤必要时应进行讨论，并指出轨迹的具体几何意义.

例 2 如图所示，圆 O_1 和圆 O_2 的半径都等于 1，$O_1O_2=4$. 过动点 P 分别作圆 O_1，圆 O_2 的切线 PM,PN (M,N 为切点)，使得 $PM=\sqrt{2}PN$. 试建立平面直角坐标系，并求动点 P 的轨迹方程.



【解】 如图所示，以 O_1O_2 的中点 O 为原点，O_1O_2 所在的直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $O_1(-2,0)$，$O_2(2,0)$.

由已知 $PM=\sqrt{2}PN$，得 $PM^2=2PN^2$.

因为两圆的半径均为 1，所以

$$PO_1^2-1=2(PO_2^2-1)$$

设 $P(x,y)$，则

$$(x+2)^2+y^2-1=2[(x-2)^2+y^2-1]$$

即$(x-6)^2+y^2=33$

所以所求轨迹方程为：$(x-6)^2+y^2=33$.

【解后感言】 这里基本上是按上述的直接法求轨迹的一般程序进行操作，其中坐标系建立得当，往往使计算量减少.

例 3 已知点 $A(-2,0)$，$B(3,0)$，动点 $P(x,y)$满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2$，则点 P 的轨迹是 ( )

A. 圆　　B. 椭圆

C. 双曲线　　D. 抛物线

【解】 设坐标系内 x,y 轴上的单位向量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$，点 $P(x,y)$对应的向量$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，则 $A(-2,0)$，$B(3,0)$对应的向量分别为$\overrightarrow{OA}=-2\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}$.

$$\therefore\ \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=-2\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}=-(2+x)\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=3\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}=(3-x)\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}.$$

又$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2$

$\therefore -(2+x)(3-x)+y^2=x^2$，即 $y^2=x+6$.

由圆锥曲线的定义知 P 点对应的轨迹是抛物线. 故选 D.

【解后感言】 这类由向量关系式给出求轨迹题，往往是直接计算就行，是再直接不过的“直接法”.

二、定义法

解题秘言:若动点轨迹的条件符合某一基本轨迹的定义(如圆、椭圆、双曲线、抛物线的定义),则可以根据定义直接求出动点的轨迹方程.

例1 (2008年北京高考理·T4)若点 P 到直线 $x=-1$ 的距离比它到点(2,0)的距离小1,则点 P 的轨迹为 ( )

A. 圆　　B. 椭圆

C. 双曲线　　D. 抛物线

【规范解析】 ∵点 P 到直线 $x=-1$ 的距离比它到点(2,0)的距离小1,

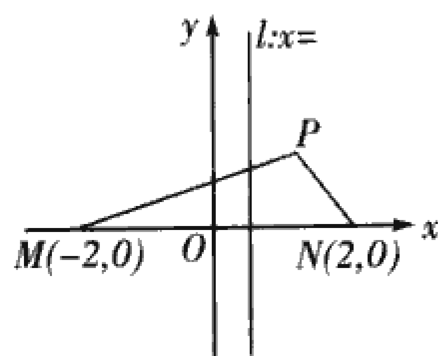
∴点 P 到直线 $x=-2$ 的距离等于它到点(2,0)的距离,

∴动点 P 的轨迹是抛物线.

【答案】 D

【解后感言】 这里是根据抛物线的定义知 P 点的轨迹曲线,其中化 P 到直线 $x=-1$ 的距离为 P 到直线 $x=-2$ 的距离是解决本题的关键.

例2 (2008年重庆高考文·T21)如图,$M(-2,0)$ 和 $N(2,0)$ 是平面上的两点,动点 P 满足:$||PM|-|PN||=2$.



(1)求点 P 的轨迹方程;

(2)设 d 为点 P 到直线 $l: x=\frac{1}{2}$ 的距离,

若 $|PM|=2|PN|^2$,求 $\frac{|PM|}{d}$ 的值.

【规范解析】 (1)∵$M(-2,0)$,$N(2,0)$,

$||PM|-|PN||=2<|MN|=4$,

∴P 点轨迹是以 M,N 为焦点,实轴长 $2a=2$ 的双曲线.

∴$a=1$,$c=2$,

∴$b^2=c^2-a^2=3$,

∴双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)方法一,由(1)及图,易知

故 $x_1+x_2=\frac{2a^2k^2}{b^2+a^2k^2}$,$x_1x_2=\frac{a^2k^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$.

因为恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$,



所以 $x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2<(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，

得 $x_1x_2+y_1y_2<0$ 恒成立.

$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$=(1+k^2)x_1x_2-k^2(x_1+x_2)+k^2$

$=(1+k^2)\dfrac{a^2k^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}-k^2\dfrac{2a^2k^2}{b^2+a^2k^2}+k^2$

$=\dfrac{(a^2-a^2b^2+b^2)k^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$.

由题意得 $(a^2-a^2b^2+b^2)k^2-a^2b^2<0$ 对 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立.

①当 $a^2-a^2b^2+b^2>0$ 时，不合题意；

②当 $a^2-a^2b^2+b^2=0$ 时，$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；

③当 $a^2-a^2b^2+b^2<0$ 时，

$a^2-a^2(a^2-1)+(a^2-1)<0, a^4-3a^2+1>0$，

解得 $a^2>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a^2<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$（舍去），

即 $a>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，因此 $a>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

综合(i)(ii)，a 的取值范围为 $(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$.

【规范解析】 本小题主要考查平面向量，椭圆的定义、标准方程及直线与椭圆位置关系等综合运用解析几何知识解决问题的能力.

【思路探索】 (1)由题知，曲线 C 为椭圆，利用定义写出方程.

(2) $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

解方程求出 k，利用弦长公式求出 $|\overrightarrow{AB}|$.

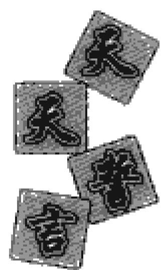
【规范解析】 (1)设 $P(x,y)$，由椭圆定义可知，点 P 的轨迹 C 以 $(0,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$ 为焦点的椭圆，它的短半轴

$b=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，

故曲线 C 的方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

其坐标满足 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+1\end{cases}$，

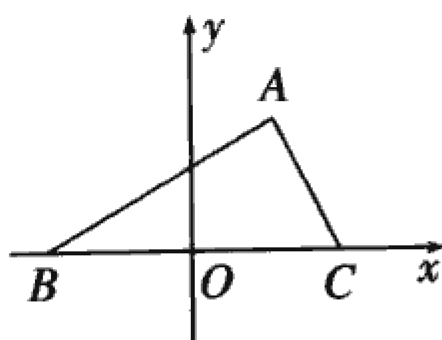


三、参数法

解题秘言:有时动点本身所满足的条件式中就含有一个参数(如角度、斜率、比值或时间等),或动点的运动过程受到某一个变量的制约,我们设这个变量为参数建立轨迹的参数方程,然后消去这个参数,即得轨迹的普通方程.

例1 在△ABC中固定底边BC且$|BC|=a$,如果三内角满足:$\sin C-\sin B=\frac{1}{2}\sin A$,试求顶点A的轨迹方程.

【解】 以BC的中点O为原点,BC所在直线为x轴,建立如图所示的直角坐标系,则$B\left(-\frac{a}{2},0\right)$,$C\left(\frac{a}{2},0\right)$.



设A点坐标为(x,y),由正弦定理及$\sin C-\sin B=\frac{1}{2}\sin A$得

$$c-b=\frac{1}{2}a,\text{即}|AB|-|AC|=\frac{1}{2}a(\text{定值})$$

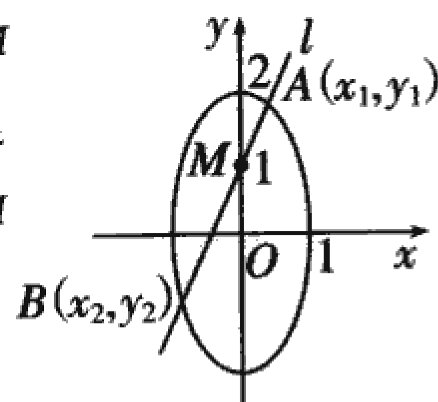
由双曲线的定义知:点A的轨迹为以B,C为焦点、焦距为a、实轴长为$\frac{a}{2}$的双曲线的右支(不包括C点).

∵虚轴长$2b=2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

故得轨迹方程为$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2}=1$.

【解后感言】 本例的题设条件中就含有△ABC的相关角,这里利用正弦定理的边角互化,变为边的关系式,然后依定义法得A的轨迹方程.

例2 如图所示,设椭圆方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1$,过点$M(0,1)$的直线l交椭圆于点A,B,O是坐标原点,点P满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,点N的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.当$l$绕点M旋转时,求



(Ⅰ)动点P的轨迹方程;

(Ⅱ)$|\overrightarrow{NP}|$的最小值与最大值.

【解】 (Ⅰ)直线l过点$M(0,1)$,若其斜率存在,设为k,则l的方程为$y-1=k(x-0)$,即$y=kx+1$.

又l与椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1$相交于两点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$

消去 y 得 $x^2+\dfrac{1}{4}(kx+1)^2=1$，即

$$(4+k^2)x^2+2kx-3=0.$$

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{2k}{4+k^2}$，

$$y_1+y_2=kx_1+1+kx_2+1=k(x_1+x_2)+2=\frac{8}{4+k^2}.$$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\dfrac{-k}{4+k^2},\dfrac{4}{4+k^2}\right)$.

设 P 点的坐标为(x,y)，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{-k}{4+k^2} \\ y=\dfrac{4}{4+k^2} \end{cases}$$

消去参数 k 得 $y=\dfrac{4}{4+\dfrac{16x^2}{y^2}}$，即 $4x^2+y^2-y=0$.

若直线斜率不存在，则 A，B 中点坐标为原点$(0,0)$，它也满足方程 $4x^2+y^2-y=0$，

$\therefore$点 P 的轨迹方程为 $4x^2+y^2-y=0$，即

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

（Ⅱ）由点 P 的轨迹方程知 $x^2\leqslant\dfrac{1}{16}$，即$-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}$.

$\therefore |\overrightarrow{NP}|^2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}-4x^2$

$$=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{7}{12}.$$

$\therefore$当 $x=\dfrac{1}{4}$时，$|\overrightarrow{NP}|$取得最小值$|\overrightarrow{NP}|_{\min}$，即

$$|\overrightarrow{NP}|_{\min}=\sqrt{-3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}.$$

当 $x=-\dfrac{1}{6}$时，$|\overrightarrow{NP}|$取最大值$|\overrightarrow{NP}|_{\max}$，即

$$|\overrightarrow{NP}|_{\max}=\sqrt{-3\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{7}{12}}=\frac{\sqrt{21}}{6}.$$

【解后感言】 这里是以直线的斜率 k 为参数来求轨迹的，也是轨迹方程中涉及直线时最常用的一种方法.

四、相关点法

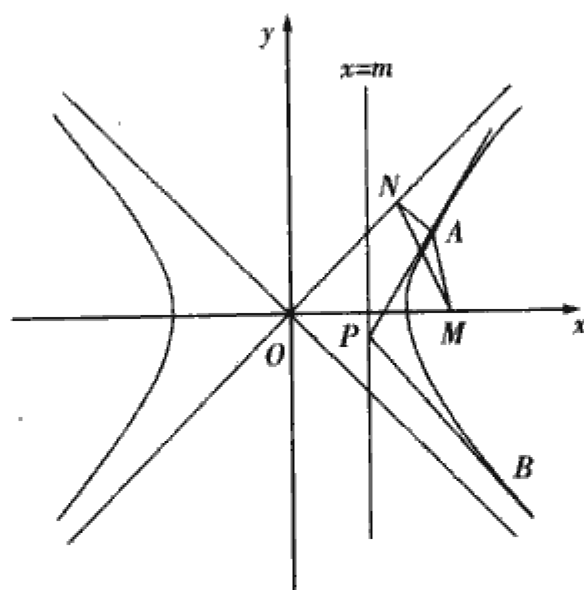
解题秘言：有些问题中，其动点满足的条件不便用等式列出，但动点是随着另一动点(称之为相关点)运动的.如果相关点所满足的条件是明显的，或是可分析的，这时我们可以用动点坐标表示相关点坐标，根据相关点所满足的方程或关系式，即可求得动点的轨迹方程，这种求轨迹的方法叫做相关点法或代入法.

例1 (2008年江西高考理·T21)设点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $x=m(y\neq\pm m,0<m<1)$ 上，过点 P 作双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两条切线 PA,PB，切点为 A,B，定点 $M\left(\frac{1}{m},0\right)$.

(1)过点 A 作直线 $x-y=0$ 的垂线，垂足为 N，试求 $\triangle AMN$ 的重心 G 所在的曲线方程；

(2)求证：A,M,B 三点共线.

【规范解析】 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由已知得



$y_1y_2\neq0$ 且 $x_1{}^2-y_1{}^2=1,x_2{}^2-y_2{}^2=1$.

(1)直线 AN 的方程为：$y-y_1=-x+x_1$，

由 $\begin{cases}y-y_1=-x+x_1,\\x-y=0\end{cases}$ 得

$N\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_2+y_2}{2}\right)$.

设重心为 $G(x,y)$，

所以 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\left(x_1+\frac{1}{m}+\frac{x_1+y_1}{2}\right),\\y=\frac{1}{3}\left(y_1+0+\frac{x_1+y_1}{2}\right),\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{9x-3y-\frac{3}{m}}{4},\\y_1=\dfrac{9y-3x+\frac{1}{m}}{4},\end{cases}$

由 $x_1{}^2-y_1{}^2=1$ 得

$\left(3x-3y-\frac{1}{m}\right)\left(3x+3y-\frac{1}{m}\right)=2$，

即 $\left(x-\frac{1}{3m}\right)^2-y^2=\frac{2}{9}$ 为重心 G 所在曲线方程.

(2)设切线 PA 的方程 $y-y_1=k(x-x_1)$，

由$\begin{cases} y-y_1=k(x-x_1), \\ x^2-y^2=1, \end{cases}$得$(1-k^2)x^2-2k(y_1-kx_1)x-(y_1-kx_1)^2-1=0$,

由$\Delta=4k^2(y_1-kx_1)^2+4(1-k^2)(y_1-kx_1)^2+4(1-k^2)=0$,得 $k=\frac{x_1}{y_1}$,

所以 PA 方程为 $y_1y=x_1x-1$,

同理 PB 方程为 $y_1y=x_2x-1$.

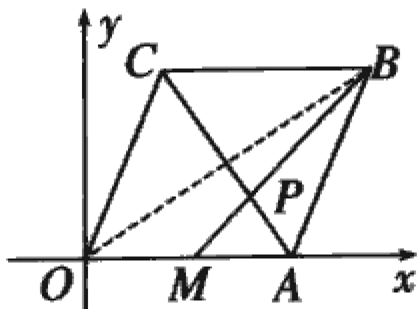
又 $P(m,y_0)$在 PA,PB 上,所以 $y_1y_0=mx_1-1, y_2y_0=mx_2-1$,

即点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$都在直线 $y_0y=mx-1$ 上.

又 $M\left(\frac{1}{m},0\right)$也在直线 $y_0y=mx-1$ 上,所以 A,M,B 三点共线.

【解后感言】 通常在相关点法中,设轨迹点 G 的坐标为(x,y),而相关点(如本例中 A 和 B)的坐标不宜设得过多,以免增加消参的难度(这里可视相关点的坐标 x_1、y_1 为参数),最后因为 $A(x_1,y_1)$在双曲线上,代入即得点 G 的轨迹方程.

例2 已知定点 $O(0,0)$和 $A(6,0)$,M 为 OA 的中点,以 OA 为一边作菱形 $OABC$,MB 与 AC 交于点 P,当菱形变动时,求 P 点的轨迹方程.



【思路探索】 如图所示,连 OB,易见 P 为$\triangle ABO$ 的重心,选 B 为相关点(也可由 AC 平分$\angle OAB$ 知$\frac{BP}{PM}=2$).

【解】 设动点 $P(x,y)$,相关点 $B(x',y')$,由 $A(6,0)$知 $M(3,0)$. 易知$\frac{|MP|}{|PB|}=\frac{1}{2}$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{3+\frac{1}{2}x'}{1+\frac{1}{2}} \\ y=\dfrac{0+\frac{1}{2}y'}{1+\frac{1}{2}} \end{cases} 得 \begin{cases} x'=3x-6 \\ y'=3y \end{cases}$$

$\because |AB|=|OA|=6$

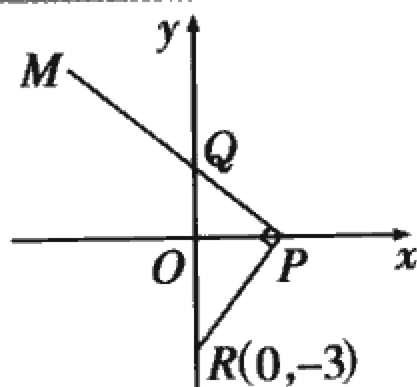
$\therefore \sqrt{(x'-6)^2+(y'-0)^2}=6$,即 $\sqrt{(3x-6-6)^2+(3y-0)^2}=6$.

整理得$(x-4)^2+y^2=4$.

$\because P$ 不可能在 x 轴上.

$\therefore$所求轨迹方程为$(x-4)^2+y^2=4$ 去掉$(6,0)$和$(2,0)$两点.

【解后感言】 本例中相关点 $B(x',y')$的变化引起轨迹点 $P(x,y)$变化,在消去 x',y'时,不是根据 B 在某曲线上,而是$|AB|=6$,因此不要误认为相关点都是在某曲线上.



例3 如图所示，已知$\angle RPM=\frac{\pi}{2}$，定点R的坐标为$(0,-3)$，直角顶点P在x轴上，线段PM交y轴于点Q，且$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QM}$，当$P$在$x$轴上移动时，求动点$M$的轨迹$E$.

【解】 设点M,P,Q的坐标分别为$M(x,y)$，$P(x_1,0)$，$Q(0,y_2)$，易知$x_1\neq0$.

$\because PQ\perp RP$，

$\therefore \frac{y_2}{-x_1}\cdot\frac{3}{x_1}=-1$，即$3y_2=x_1^2$. ①

又$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{QM}$，

$$\therefore\begin{cases}0=\dfrac{x_1+\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}}\\ y_2=\dfrac{0+\frac{1}{2}y}{1+\frac{1}{2}}\end{cases}\text{整理得}\begin{cases}x_1=-\dfrac{x}{2} & ②\\ y_2=\dfrac{y}{3} & ③\end{cases}$$

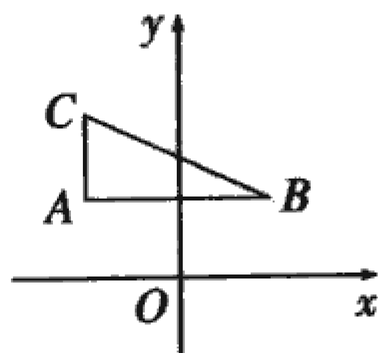
将②③代入①得$y=\frac{1}{4}x^2(x\neq0)$.

$\therefore$轨迹E是开口向上，顶点在原点(除去原点)的抛物线.

【解后感言】 这里先确定一个较易求得的点的轨迹$3y_2=x_1^2$，再以此作为主动点，所求的轨迹上的点为从动点，建立联系，从而得到所求点的轨迹方程. 这也是处理相关点问题的常用方法.

五、交轨法

解题秘言：若动点是两条曲线的交点，则动点坐标(由辅助量表示)满足两条曲线的方程. 将方程联立，消去辅助量，可求得动点的轨迹方程.



例1 如图所示，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$A(-\sqrt{2},1)$，$B(\sqrt{2},1)$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$. 动点$P$在曲线$E(y\geqslant1)$上运动；若曲线$E$过点$C$且满足$|PA|+|PB|$的值为常数.

(Ⅰ)求曲线E的方程；

(Ⅱ)设直线l的斜率为1，若直线l与曲线E有两个不同的交点P,Q，求线段PQ的中点M的轨迹方程.

【解】 (Ⅰ)∵$|AB|=2\sqrt{2}$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB|=\sqrt{2}$,

∴$|AC|=1$.

又$|BC|^2=|AC|^2+|AB|^2$,

∴$|BC|=3$.

又$|PA|+|PB|=|AC|+|BC|=4>2\sqrt{2}$,

∴P点在以A,B为焦点,半长轴为$a=2$,半焦距为$c=\sqrt{2}$,半短轴$b=\sqrt{2}$的椭圆E上,

∴曲线E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1(y\geqslant 1)$.

(Ⅱ)设直线l的方程为$y=x+m$, ①

将之代入E的方程,消去x得

$$3y^2-2(m+2)y+m^2-2=0.$$

令$f(y)=3y^2-2(m+2)y+m^2-2$,则方程$f(y)=0$有两个不小于1且不相等的实根,

$$\therefore\begin{cases}\Delta=4(m+2)^2-12(m^2-2)>0\\ f(1)=m^2-2m-3\geqslant 0\\ 1<\frac{m+2}{3}<1+\sqrt{2}\end{cases}\quad \text{解之得 } 3\leqslant m<1+\sqrt{6}$$

设PQ的中点坐标为$M(x,y)$,P,Q两点的坐标分别为$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则

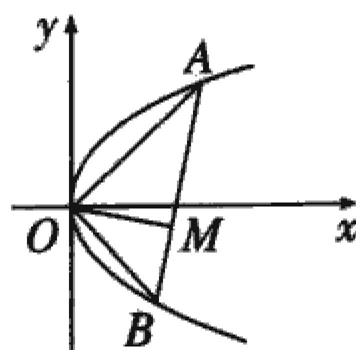
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m+2}{3}, \quad ②$$

∴$\frac{5}{3}\leqslant y<1+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由①②消去m得点M的轨迹方程为

$$y=-\frac{1}{2}x+1\left(\frac{5}{3}\leqslant y<1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

【解后感言】 此题关键在于由已知条件求出点M满足的两条曲线方程①,②,然后消去辅助量m,得到点M的轨迹方程.



例2 如图所示,设点A,B为抛物线$y^2=4px(p>0)$上原点以外的两个动点,已知$OA\perp OB$,$OM\perp AB$,M是垂足,求点M的轨迹方程,并说明它表示的曲线类型.

【解】 设直线OA的方程为$y=kx$,则直线OB的方程为

$$y=-\frac{1}{k}x.$$

由$\begin{cases}y=kx,\\ y^2=4px\end{cases}$得$A$点坐标为$\left(\frac{4p}{k^2},\frac{4p}{k}\right)$.

同理,求得B点坐标为$(4pk^2,-4pk)$.

∴直线AB的斜率为$\dfrac{\frac{4p}{k}+4pk}{\frac{4p}{k^2}-4pk^2}=\dfrac{k}{1-k^2}$.

∴直线AB的方程为$y+4pk=\dfrac{k}{1-k^2}(x-4pk^2)$,即

$$y=\frac{k}{k^2-1}(4p-x) \quad ①$$

∵直线OM的斜率为$\dfrac{k^2-1}{k}$,

∴直线OM的方程为 $y=\dfrac{k^2-1}{k}x$. ②

∵动点$M(x,y)$的坐标满足方程①和②,由①×②消去辅助变量k得

$$y^2=x(4p-x).$$

∴动点M的轨迹方程为$(x-2p)^2+y^2=4p^2(x\neq0)$,它表示以$(2p,0)$为圆心,$2p$为半径的圆(去掉原点).

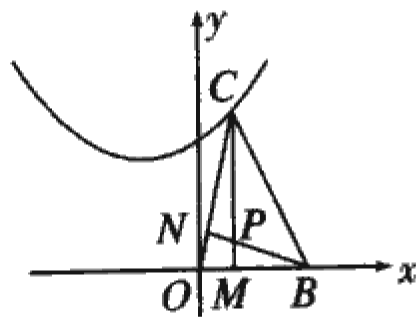
【解后感言】 本题首先引进辅助变量k,用交轨法求出A,B的坐标,然后求出直线AB与OM的方程,再利用交轨法消去辅助变量k,得动点M的轨迹方程.至于如何消去辅助变量,当然是越简单越好,如本例①×②就最优.

当然,本题也可以用向量法来解.亲爱的读者,你可以一试身手吗?

六、向量法

解题秘言:当轨迹点与相关点中出现诸多的共线点、定比分点或垂直关系时,常可以用向量法来处理.

例1 如图所示,已知$\triangle OBC$的顶点$O(0,0)$,$B(2,0)$,点C在抛物线$y=x^2+2x+3$上运动,M,N分别在OB,OC上且满足$OM:MB=1:2$,$ON:NC=1:3$,BN与CM交于点P.



(Ⅰ)求点P的轨迹方程;

(Ⅱ)求$\triangle OPB$面积最小时C点的坐标.

【思路探索】 这里有诸多的共线点及定比分点情况出现,较适合于向量法.

【解】 (Ⅰ)设$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$,依题意知

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$.

设$\overrightarrow{OP}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}.$$

$\because B,P,N$三点共线，$\therefore\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{BN}$共线，

$\therefore\frac{m-1}{-1}=\frac{n}{\frac{1}{4}}$，即$1-m=4n$. ①

$\because M,C,P$三点共线，$\therefore\overrightarrow{MP}$与$\overrightarrow{MC}$共线，

又$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\left(m-\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\therefore\frac{m-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}=\frac{n}{1}$，即$1-3m=n$. ②

联立①②，解得$m=\frac{3}{11}$，$n=\frac{2}{11}$，

$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{3}{11}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{OC}$.

设$P(x,y)$，$C(x_0,y_0)$，代入上式，得

$$(x,y)=\frac{3}{11}(2,0)+\frac{2}{11}(x_0,y_0).$$

$\therefore(x,y)=\left(\frac{6}{11}+\frac{2}{11}x_0,\frac{2}{11}y_0\right)$

$\therefore\begin{cases}x=\frac{6}{11}+\frac{2}{11}x_0\\ y=\frac{2}{11}y_0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_0=\frac{11x-6}{2},\\ y_0=\frac{11}{2}y.\end{cases}$

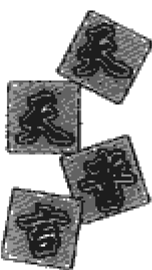
又$y_0=x_0^2+2x_0+3$，$\therefore\frac{11}{2}y=\left(\frac{11x-6}{2}+1\right)^2+2$，

即 $y=\frac{1}{22}(11x-4)^2+\frac{4}{11}$.

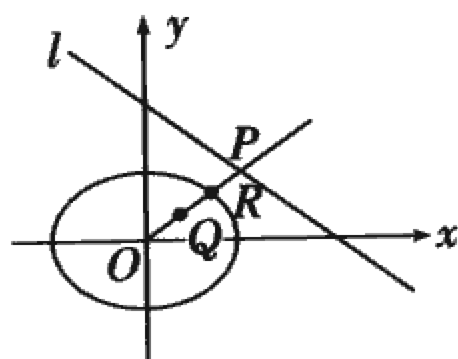
(Ⅱ)$S_{\triangle OPB}=\frac{1}{2}|OB||y_p|=|y_p|$，

$\therefore(S_{\triangle OPB})_{\min}=\frac{4}{11}$.

此时$x=\frac{4}{11}$，故$C(-1,2)$.



【解后感言】 本题若用交轨法解将会十分复杂，而且参数不易消去，这说明向量法的优越性. 向量法较之交轨法更直观，此法常化几何问题为代数(坐标)计算，是新课程后常用的一种方法.



例2 已知椭圆$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$，直线$l$：$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$，$P$是直线$l$上一点，射线$OP$交椭圆于$R$. 又点$Q$在$OP$上且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.

当点P在l上移动时，求点Q的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线.

【解】 依题意可设

$$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OQ}(\lambda_1>0) \quad ①$$

$$\overrightarrow{OR}=\lambda_2\overrightarrow{OQ}(\lambda_2>0) \quad ②$$

将①，②代入$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$得

$$\lambda_1=\lambda_2^2 \quad ③$$

设$Q(x,y)$，$P(x_P,y_P)$，$R(x_R,y_R)$，

由①②得$\begin{cases}x_P=\lambda_1 x\\ y_P=\lambda_1 y\end{cases}$或$\begin{cases}x_R=\lambda_2 x\\ y_R=\lambda_2 y\end{cases}$

因为点P，R分别在已知直线和椭圆上，故分别代入所在的方程得

$$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=\frac{1}{\lambda_1} \quad ④$$

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=\frac{1}{\lambda_2^2} \quad ⑤$$

由③④⑤得

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=\frac{x}{12}+\frac{y}{8}.$$

整理得点Q的轨迹方程为

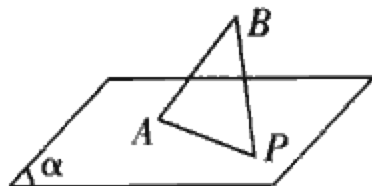
$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1\text{(其中 }x,y\text{ 不同时为 0)}$$

可见它的轨迹是挖去原点的椭圆.

【解后感言】 这是全国高考的压轴题，由于其相关点P，R分别在直线和椭圆上，给设参消参带来很繁的运算，当年难到了绝大多数考生，这里P，Q，R共线这一条件，用向量法处理，简单直观，思路清晰明了，再一次说明向量这一工具的优越性和应用的潜力.

实战秘修十七

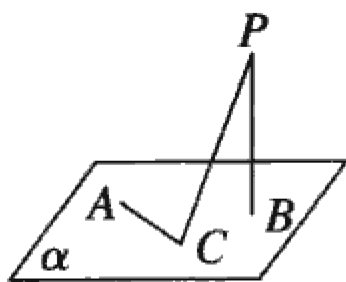
1. (2008年浙江高考理·T10)如图,AB是平面α的斜线段,A为斜足,若点P在平面α内运动,使得$\triangle ABP$的面积为定值,则动点P的轨迹是 ( )



A. 圆　　B. 椭圆

C. 一条直线　　D. 两条平行直线

2. 如图,已知定点A和B都在平面α内,定点$P\notin\alpha$,$PB\perp\alpha$,C是α内异于A和B的动点,且$PC\perp AC$,那么,动点C在平面α内的轨迹是 ( )



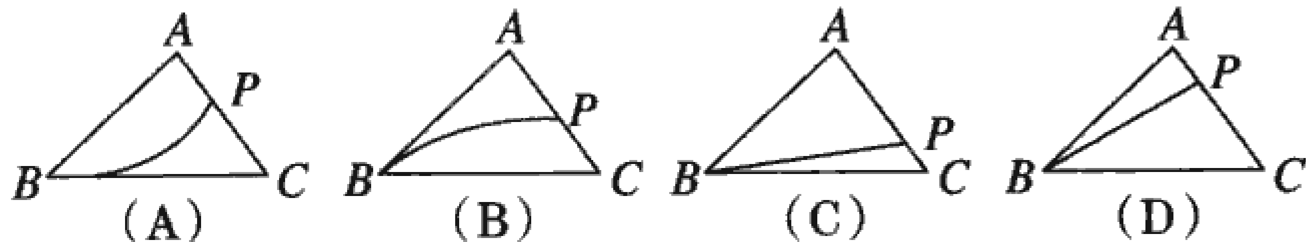
A. 一条线段,但要去掉两个点

B. 一个圆,但要去掉两个点

C. 一个椭圆,但要去掉两个点

D. 半圆,但要去掉两个点

3. 若三棱锥A-BCD的侧面ABC内一动点P到底面BCD的距离与到棱AB的距离相等,则动点P的轨迹与$\triangle ABC$组成的图形可能是 ( )



4. 已知点P是抛物线$y=2x^2+1$的动点,定点$A(0,-1)$,若点M分$\overrightarrow{PA}$所成的比为2,则点M的轨迹方程是________.

5. 直角坐标平面xOy中,若定点$A(1,2)$与动点$P(x,y)$满足$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$,则点$P$的轨迹方程是________.

6. 以下四个关于圆锥曲线的命题中,是真命题的序号为________(写出所有真命题的序号).

①设A,B为两个定点,k为非零常数,若$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=k$,则动点$P$的轨迹为双曲线;

②过定圆C上一定点A作圆的动弦AB,O为坐标原点,若$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,则动点$P$的轨迹为椭圆;

③方程$2x^2-5x+2=0$的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率;

④双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$与椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$有相同的焦点.

7. 设 P 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上一动点，O 为坐标原点，M 为线段 OP 的中点，则点 M 的轨迹方程是__________.

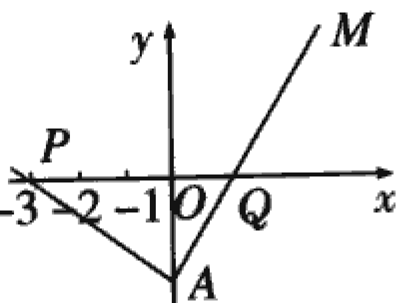
8. 已知点 $A(-\sqrt{3},0)$ 和 $B(\sqrt{3},0)$，动点 C 到 A,B 两点的距离之差的绝对值为 2，点 C 的轨迹与直线 $y=x-2$ 交于 D,E 两点，求线段 DE 的长.

9. (2007 天津，22)设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，A 是椭圆上的一点，$AF_2\perp F_1F_2$，原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\frac{1}{3}|OF_1|$.

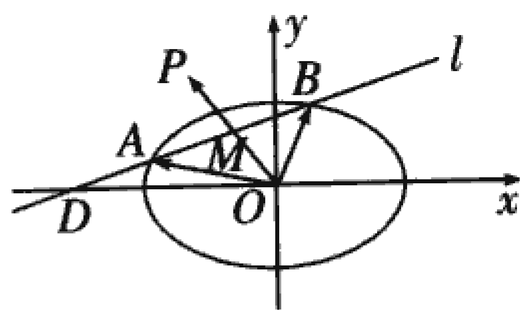
(1)证明 $a=\sqrt{2}b$；

(2)(理)设 Q_1,Q_2 为椭圆上的两个动点，$OQ_1\perp OQ_2$，过原点 O 作直线 Q_1Q_2 的垂线 OD，垂足为 D，求点 D 的轨迹方程.

10. 如图，已知三角形 PAQ 的顶点 $P(-3,0)$ 与点 A 分别在 x 轴与 y 轴上，点 Q 在 x 轴正半轴上，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，$\overrightarrow{QM}=2\overrightarrow{AQ}$，当点 A 在 y 轴上移动时，求动点 M 的轨迹方程.



11. 如图，已知过点 $D(-2,0)$ 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于不同的两点 A,B，点 M 是弦 AB 的中点.

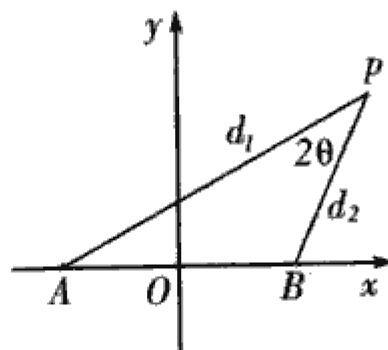


(1)若 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，求点 P 的轨迹方程；(2)求 $\frac{|MD|}{|MA|}$ 的取值范围.

12. (2007 江西，理 21)设动点 P 到点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2，$\angle APB=2\theta$，且存在常数 $\lambda(0<\lambda<1)$，使得 $d_1d_2\sin^2\theta=\lambda$.

(1)证明动点 P 的轨迹 C 为双曲线，并求出 C 的方程；

(2)过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M、N 两点，试确定 λ 的范围，使 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，其中点 O 为坐标原点.



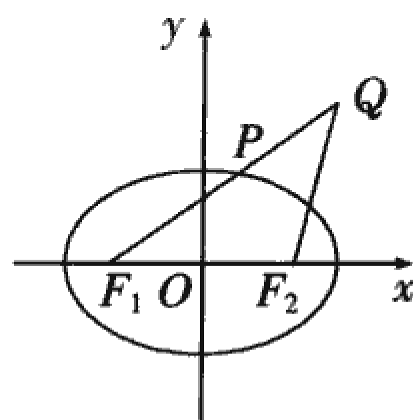
13. 已知动圆过定点$\left(\frac{p}{2},0\right)$，且与直线$x=-\frac{p}{2}$相切，其中$p>0$.

(1)求动圆圆心的轨迹C的方程；

(2)设A,B是轨迹C上异于原点O的两个不同点，直线OA和OB的倾斜角分别为α和β，当α,β变化且$\alpha+\beta$为定值$\theta(0<\theta<\pi)$时，证明直线AB恒过定点，并求出该定点的坐标.

14. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别是$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$Q$是椭圆外的动点，满足$|\overrightarrow{F_1Q}|=2a$，点$P$是线段$F_1Q$与该椭圆的交点，点$T$在线段$F_2Q$上，并且满足

$$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0,|\overrightarrow{TF_2}|\neq 0.$$

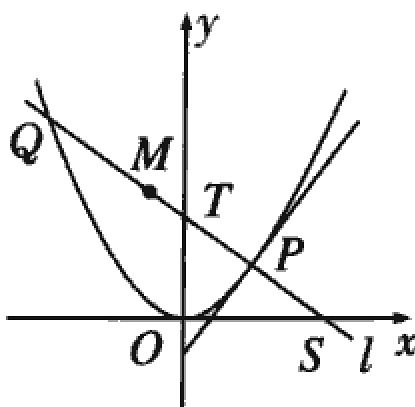


(1)设x为点P的横坐标，证明$|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$；

(2)求点T的轨迹C的方程；

(3)试问：在点T的轨迹C上，是否存在点M，使$\triangle F_1MF_2$的面积$S=b^2$. 若存在，求$\angle F_1MF_2$的正切值；若不存在，请说明理由.

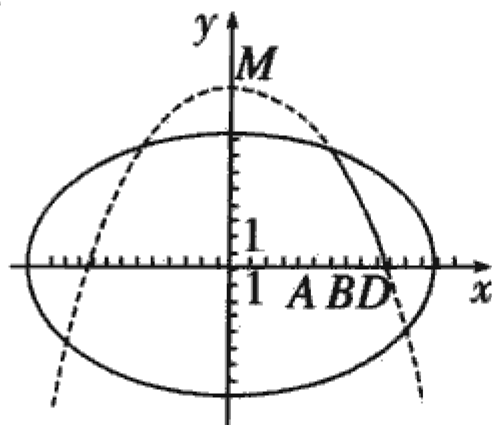
15. 如图，P是抛物线$C:y=\frac{1}{2}x^2$上一点，直线l过点P且与抛物线C交于另一点Q.



(1)若直线l与过点P的切线垂直，求线段PQ中点M的轨迹方程；

(2)若直线l不过原点且与x轴交于点S，与y轴交于点T，试求$\left|\frac{ST}{SP}\right|+\left|\frac{ST}{SQ}\right|$的取值范围.

16. 学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验. 设计方案如图：航天器运行(按顺时针方向)的轨迹方程为$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$，变轨(即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线)后返回的轨迹是以y轴对称轴、$M\left(0,\frac{64}{7}\right)$为顶点的抛物线的实线部分，降落点为$D(8,0)$，观测点$A(4,0)$、$B(6,0)$同时跟踪航天器.



(1)求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程；

(2)试问：当航天器在x轴上方时，观测点A,B测得离航天器的距离分别为多少时，应向航天器发出变轨指令？

实战秘修十七答案与提示

1. B $\because\triangle ABP$ 的面积为定值，AB 为定长，$\therefore$点 P 到 AB 的距离 d 为定值，若点 P 在空间运动，则点 P 的轨迹是：以 AB 为轴线，以 d 为半径的圆柱面，此圆柱面被平面 α 所截得椭圆（$\because AB$ 是 α 的斜线段），因此点 P 的轨迹为椭圆. 故选 B.

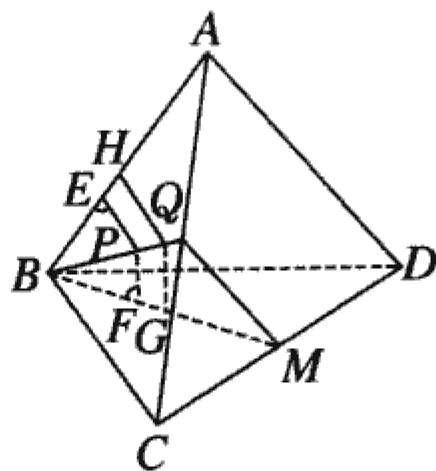
2. B 连结 BC,AB，取 AB 中点为 O.

$\because PB\perp\alpha, AC\perp PC$ 且 $AC\subsetneqq\alpha$，$\therefore BC\perp AC$. $\therefore\triangle ABC$ 为 $\mathrm{Rt}\triangle$.

又 O 为 AB 中点，$\therefore OC=\frac{1}{2}AB$ 为定值.

$\therefore$由圆的定义知，C 点轨迹是一个圆，但要去掉两个点 A,B

3. D 作 $PF\perp$平面 BCD，$PE\perp AB$，且 $PF=EP$，连结 BF 延长交 CD 于 M，



$\therefore\angle ABP=\angle PBM$.

由点 P 与 BM 确定一个平面 PBM.

$\because$平面 ABC 与平面 BPM 有公共点 B,P，

$\therefore BP=$平面 $ABC\cap$平面 BPM.

$\because PF\perp$平面 BCD，

$\therefore$平面 $BPM\perp$平面 BCM.

在 BP 上任取一点 Q，作 $QG\perp$平面 BCD，$QH\perp AB$，则 $G\in BM$，且 $QG=QH$.

$\therefore$点 P 的轨迹应是一条线段.

又$\because$点 P 到 BC 的距离大于 P 到平面 BCD 的距离，$\therefore$选 D.

4. $18x^2-3y-1=0$ 利用定比分点公式用代入法即可求得.

5. $x+2y-4=0$ $\because\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\overrightarrow{OA}=(1,2)$，

$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=(x,y)\cdot(1,2)=x+2y=4$.

6. 填③④ ①当 $k\neq0$ 时，$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=k$，$P$ 的轨迹为双曲线的一支或一条射线（$k=AB$），所以命题为假；

②P 的轨迹为圆，所以命题也为假；

③两根分别为 2 和$\frac{1}{2}$，所以命题为真；

④因为双曲线的实轴和椭圆的长轴均为 x 轴，且 $25+9=34$，$35-1=34$，所以命题为真.

7. $x^2-4y^2=1$ 设 $M(x,y)$，则 $P(2x,2y)$. $\because P$ 点在双曲线上，

$\therefore\frac{(2x)^2}{4}-(2y)^2=1$，即 $x^2-4y^2=1$.

8. 设 $C(x,y)$，则 $||CA|-|CB||=2$.

根据双曲线的定义，可知点 C 的轨迹是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

由 $2a=2,2c=|AB|=2\sqrt{3}$，得 $a^2=1,b^2=2$.

故点 C 的轨迹方程是：$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

联立 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 和 $y=x-2$，整理得 $x^2+4x-6=0$.

$\because \Delta>0$，$\therefore$ 直线与双曲线有两个交点.

设 $D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-4,x_1x_2=-6$.

故 $|DE|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{5}$.

9. (1) **证法一**：由题设 $AF_2\perp F_1F_2$ 及 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，不妨设点 $A(c,y)$，其中 $y>0$，

由于点 A 在椭圆上，有 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即 $\frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解得 $y=\frac{b^2}{a}$，从而得到 $A(c,\frac{b^2}{a})$.

直线 AF_1 的方程为 $y=\frac{b^2}{2ac}(x+c)$，整理得 $b^2x-2acy+b^2c=0$.

由题设，原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\frac{1}{3}|OF_1|$，即 $\frac{c}{3}=\frac{b^2c}{\sqrt{b^4+4a^2c^2}}$，

将 $c^2=a^2-b^2$ 代入上式并化简得 $a^2=2b^2$，即 $a=\sqrt{2}b$.

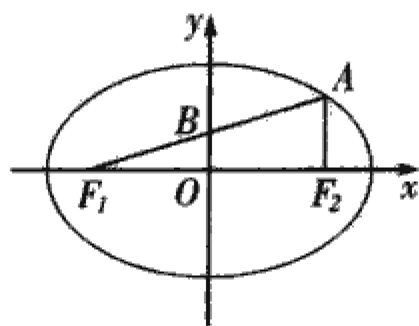
证法二：同证法一，得到点 A 的坐标为 $(c,\frac{b^2}{a})$，

过点 O 作 $OB\perp AF_1$，垂足为 B，易知 $\triangle F_1BO\backsim\triangle F_1F_2A$，

故 $\frac{|BO|}{|OF_1|}=\frac{|F_2A|}{|F_1A|}$.

由椭圆定义得 $|AF_1|+|AF_2|=2a$，

又 $|BO|=\frac{1}{3}|OF_1|$，所以 $\frac{1}{3}=\frac{|F_2A|}{|F_1A|}=\frac{|F_2A|}{2a-|F_2A|}$.



解得 $|F_2A|=\frac{a}{2}$，而 $|F_2A|=\frac{b^2}{a}$，得 $\frac{b^2}{a}=\frac{a}{2}$，即 $a=\sqrt{2}b$.

(2)(理) **解法一**：设点 D 的坐标为 (x_0,y_0)，

当 $y_0\neq0$ 时，由 $OD\perp Q_1Q_2$，知直线 Q_1Q_2 的斜率为 $-\frac{x_0}{y_0}$，所以直线 Q_1Q_2 的方程为 $y=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$，

或 $y=kx+m$，其中 $k=-\frac{x_0}{y_0}$，$m=y_0+\frac{x_0^2}{y_0}$.

点 $Q_1(x_1,y_1)$，$Q_2(x_2,y_2)$的坐标满足方程组

$$\begin{cases} y=kx+m, & ① \\ x^2+2y^2=2b^2. & ② \end{cases}$$

将①式代入②式，得 $x^2+2(kx+m)^2=2b^2$，

整理，得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2b^2=0$，

于是 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2b^2}{1+2k^2}$. ③

由①式得 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=k^2\cdot\frac{2m^2-2b^2}{1+2k^2}+km\cdot\frac{-4km}{1+2k^2}+m^2=\frac{m^2-2b^2k^2}{1+2k^2}$. ④

由 $OQ_1\perp OQ_2$ 知 $x_1x_2+y_1y_2=0$，将③式和④式代入得$\frac{3m^2-2b^2-2b^2k^2}{1+2k^2}=0$，$3m^2=2b^2(1+k^2)$.

将 $k=-\frac{x_0}{y_0}$，$m=y_0+\frac{x_0^2}{y_0}$代入上式，整理得 $x_0^2+y_0^2=\frac{2}{3}b^2$.

当 $y_0=0$ 时，直线 Q_1Q_2 的方程为 $x=x_0$，点 $Q_1(x_1,y_1)$，$Q_2(x_2,y_2)$的坐标满足方程组$\begin{cases} x=x_0, \\ x^2+2y^2=2b^2. \end{cases}$

所以 $x_1=x_2=x_0$，$y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2b^2-x_0^2}{2}}$.

由 $OQ_1\perp OQ_2$ 知 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

即 $x_0^2-\frac{2b^2-x_0^2}{2}=0$，解得 $x_0^2=\frac{2}{3}b^2$.

这时，点 D 的坐标仍满足 $x_0^2+y_0^2=\frac{2}{3}b^2$.

综上，点 D 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\frac{2}{3}b^2$.

解法二：设点 D 的坐标为(x_0,y_0)，直线 OD 的方程为 $y_0x-x_0y=0$，由 $OD\perp Q_1Q_2$，垂足为 D，可知直线 Q_1Q_2 的方程为 $x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$.

记 $m=x_0^2+y_0^2$（显然 $m\neq0$），点 $Q_1(x_1,y_1)$，$Q_2(x_2,y_2)$的坐标满足方程组

$$\begin{cases} x_0x+y_0y=m, & ① \\ x^2+2y^2=2b^2. & ② \end{cases}$$

由①式得 $y_0y=m-x_0x$. ③

由②式得 $y_0^2x^2+2y_0^2y^2=2y_0^2b^2$. ④

将③式代入④式得 $y_0^2x^2+2(m-x_0x)^2=2y_0^2b^2$，

整理得$(2x_0^2+y_0^2)x^2-4mx_0x+2m^2-2b^2y_0^2=0$，



于是 $x_1x_2=\dfrac{2m^2-2b^2y_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}$.　⑤

由①式得 $x_0x=m-y_0y$.　⑥

由②式得 $x_0{}^2x^2+2x_0{}^2y^2=2x_0{}^2b^2$.　⑦

将⑥式代入⑦式得 $(m-y_0y)^2+2x_0{}^2y^2=2x_0{}^2b^2$,

整理得 $(2x_0{}^2+y_0{}^2)y^2-2my_0y+m^2-2b^2x_0{}^2=0$,

于是 $y_1y_2=\dfrac{m^2-2b^2x_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}$.　⑧

由 $OQ_1\perp OQ_2$ 知 $x_1x_2+y_1y_2=0$,将⑤式和⑧式代入得 $\dfrac{2m^2-2b^2y_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}+\dfrac{m^2-2b^2x_0{}^2}{2x_0{}^2+y_0{}^2}=0$, $3m^2-2b^2(x_0{}^2+y_0{}^2)=0$.

将 $m=x_0{}^2+y_0{}^2$ 代入上式,得 $x_0{}^2+y_0{}^2=\dfrac{2}{3}b^2$.

所以点 D 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\dfrac{2}{3}b^2$.

10. 设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, $\overrightarrow{OA}=(0,a)(a<0)$, $\overrightarrow{OQ}=(b,0)(b>0)$,则

$$\overrightarrow{PA}=(3,a),\overrightarrow{AQ}=(b,-a).$$

又 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$,

$\therefore a^2=3b$.　①

又 $\because\overrightarrow{QM}=(x-b,y)$, $\overrightarrow{AQ}=(b,-a)$, $\overrightarrow{QM}=2\overrightarrow{AQ}$,

$\therefore\begin{cases}x=3b,\\y=-2a.\end{cases}$　②

由①②得 $y^2=4x(x\neq0,y>0)$ 为所求轨迹方程.

11. (1)①若直线 $l/\!/x$ 轴,则点 P 为 $(0,0)$;

②若 $l\not\parallel x$ 轴,设直线 l: $x=my-2$,并设点 A,B,M,P 的坐标分别是 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $M(x_0,y_0)$, $P(x,y)$.

联立 $\begin{cases}x=my-2\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+2)y^2-4my+2=0$.　①

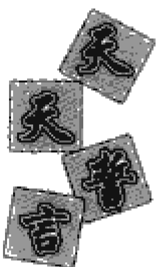
$\because$ 直线 l 与椭圆有两个不同的交点,

$\therefore\Delta=(-4m)^2-8(m^2+2)>0$,即 $8(m^2-2)>0$, $\therefore m^2>2$.

由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 及方程①得

$$y=y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+2},$$

$$x=x_1+x_2=(my_1-2)+(my_2-2)=-\frac{8}{m^2+2},$$



即 $\begin{cases} x=-\dfrac{8}{m^2+2}, \\ y=\dfrac{4m}{m^2+2} \end{cases}$.

由于 $m\neq 0$（否则，直线 l 与椭圆无公共点），将上面方程组两式相除，得

$m=-\dfrac{2y}{x}$，再将 $m=-\dfrac{2y}{x}$ 代入到方程 $x=-\dfrac{8}{m^2+2}$ 整理得

$$x^2+2y^2+4x=0 \quad (-2<x<0).$$

综上，点 P 的轨迹方程为 $x^2+2y^2+4x=0(-2<x<0)$.

(2)①当 $l/\!/x$ 轴时，A,B 分别是椭圆长轴的两个端点，则点 M 在原点 O 处.

$\therefore |MD|=2, |MA|=\sqrt{2}$. $\quad \therefore \dfrac{|MD|}{|MA|}=\sqrt{2}$.

②当 $l\not\parallel x$ 轴时，仍设直线 $l: x=my-2$.

由方程①得 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2m}{m^2+2}$，

$\therefore |MD|=\sqrt{1+m^2}\,|y_0-y_D|=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{2|m|}{m^2+2}$，

$\therefore |MA|=\sqrt{1+m^2}\,|y_0-y_1|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{|y_1-y_2|}{2}$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2-2}}{m^2+2}$.

$\therefore \dfrac{|MD|}{|MA|}=\dfrac{\sqrt{2}|m|}{\sqrt{m^2-2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{m^2}}}$

又 $m^2>2$，$\quad \therefore -\dfrac{2}{m^2}\in(-1,0)$. $\quad \therefore \sqrt{1-\dfrac{2}{m^2}}\in(0,1)$.

$\therefore \dfrac{|MD|}{|MA|}\in(\sqrt{2},+\infty)$，故 $\dfrac{|MD|}{|MA|}$ 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$.

12. **解法一**：(1)在 $\triangle PAB$ 中，$|AB|=2$，则 $2^2=d_1{}^2+d_2{}^2-2d_1d_2\cos 2\theta$，$4=(d_1-d_2)^2+4d_1d_2\sin^2\theta$，即 $|d_1-d_2|=\sqrt{4-4d_1d_2\sin^2\theta}=2\sqrt{1-\lambda}<2$（常数），

点 P 的轨迹 C 是以 A、B 为焦点，实轴长 $2a=2\sqrt{1-\lambda}$ 的双曲线，方程为 $\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

①当 MN 垂直于 x 轴时，MN 的方程为 $x=1$，$M(1,1)$，$N(1,-1)$ 在双曲线上，

即 $\dfrac{1}{1-\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

因为 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

②当 MN 不垂直于 x 轴时，设 MN 的方程为 $y=k(x-1)$.

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$得$[\lambda-(1-\lambda)k^2]x^2+2(1-\lambda)k^2x-(1-\lambda)(k^2+\lambda)=0$,

由题意知$[\lambda-(1-\lambda)k^2]\neq 0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{-2k^2(1-\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$，$x_1x_2$

$=\dfrac{-(1-\lambda)(k^2+\lambda)}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$,

于是 $y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{k^2\lambda^2}{\lambda-(1-\lambda)k^2}$,

因为$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，且 M、N 在双曲线右支上，所以$\begin{cases}x_1x_2+y_1y_2=0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}k^2=\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}\\ k^2>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda^2+\lambda-1}>\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\\ \lambda^2+\lambda-1>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\lambda<\dfrac{2}{3}$. 由①②，知$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\lambda<\dfrac{2}{3}$.

解法二：(1)同解法一.

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，MN 的中点为 $E(x_0,y_0)$.

①当 $x_1=x_2=1$ 时，$|MB|^2=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}-\lambda=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda-1=0$,

因为 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

②当 $x_1\neq x_2$ 时，$\begin{cases}\dfrac{x_1^{\ 2}}{1-\lambda}-\dfrac{y_1^{\ 2}}{\lambda}=1\\ \dfrac{x_2^{\ 2}}{1-\lambda}-\dfrac{y_2^{\ 2}}{\lambda}=1\end{cases}\Rightarrow k_{MN}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$.

又 $k_{MN}=k_{BE}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，所以$(1-\lambda)y_0^{\ 2}=\lambda x_0^{\ 2}-\lambda x_0$.

由$\angle MON=\dfrac{\pi}{2}$，得 $x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=(\dfrac{|MN|}{2})^2$,

由第二定义得$(\dfrac{|MN|}{2})^2=[\dfrac{e(x_1+x_2)-2a}{2}]^2$

$=(\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda}}x_0-\sqrt{1-\lambda})^2=\dfrac{1}{1-\lambda}x_0^{\ 2}+(1-\lambda)-2x_0$,

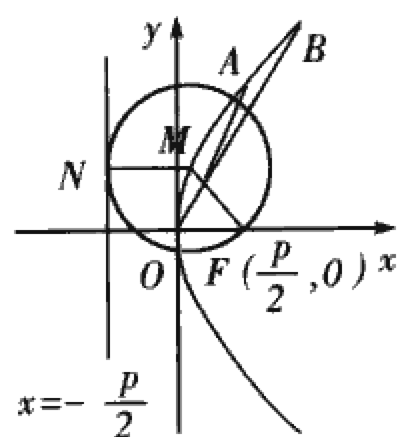
所以$(1-\lambda)y_0^{\ 2}=\lambda x_0^{\ 2}-2(1-\lambda)x_0+(1-\lambda)^2$.

于是由$\begin{cases}(1-\lambda)y_0^{\ 2}=\lambda x_0^{\ 2}-\lambda x_0,\\ (1-\lambda)y_0^{\ 2}=\lambda x_0^{\ 2}-2(1-\lambda)x_0+(1-\lambda)^2,\end{cases}$

得 $x_0=\dfrac{(1-\lambda)^2}{2-3\lambda}$. 因为 $x_0>1$，所以$\dfrac{(1-\lambda)^2}{2-3\lambda}>1$.

又 $0<\lambda<1$，解得$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<\lambda<\dfrac{2}{3}$. 由①②知$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\lambda<\dfrac{2}{3}$.

13.(1)如图,设 M 为动圆圆心,点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$ 记为 F,过点 M 作直线 $x=-\frac{p}{2}$ 的垂线,垂足为 N.



由题意知　　$|MF|=|MN|$,

即动点 M 到定点 F 与定直线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离相等,由抛物线定义知:

点 M 的轨迹为抛物线,其中 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 为焦点,$x=-\frac{p}{2}$ 为准线,所以轨迹方程为

$y^2=2px(p>0)$.

(2)如图,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意得 $x_1\neq x_2$(否则 $\alpha+\beta=\pi$)且 $x_1,x_2\neq 0$.所以直线 AB 的斜率存在,设其方程为 $y=kx+b$.

显然
$$x_1=\frac{y_1^2}{2p},x_2=\frac{y_2^2}{2p}.$$

将 $y=kx+b$ 与 $y^2=2px$ 联立消去 x,得
$$ky^2-2py+2pb=0.$$

由韦达定理知
$$y_1+y_2=\frac{2p}{k},y_1\cdot y_2=\frac{2pb}{k} \qquad (*)$$

1°当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,即 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时,
$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=1,$$
$$\therefore \frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=1,$$
$$\therefore x_1x_2-y_1y_2=0,\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}-y_1y_2=0,$$
$$\therefore y_1y_2=4p^2.$$

由(*)式知 $\frac{2pb}{k}=4p^2$.　$\therefore b=2pk$.

因此直线 AB 的方程可表示为
$$y=kx+2pk,$$
即
$$k(x+2p)-y=0.$$

$\therefore$ 直线 AB 恒过定点 $(-2p,0)$.

2°当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时,由 $\alpha+\beta=\theta$,得

$$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}}{1-\frac{y_1y_2}{x_1x_2}}=\frac{\frac{2p}{y_1}+\frac{2p}{y_2}}{1-\frac{2p}{y_1}\cdot\frac{2p}{y_2}}$$

$$=\frac{2p(y_1+y_2)}{y_1y_2-4p^2}.$$

将(*)式代入上式整理化简,得

$$\tan\theta=\frac{2p}{b-2pk},$$

$$\therefore b=\frac{2p}{\tan\theta}+2pk.$$

此时,直线 AB 的方程可表示为

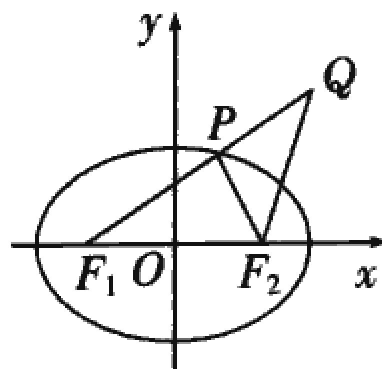
$$y=kx+\frac{2p}{\tan\theta}+2pk,$$

即 $k(x+2p)-\left(y-\frac{2p}{\tan\theta}\right)=0$.

$\therefore$直线 AB 恒过定点$\left(-2p,\frac{2p}{\tan\theta}\right)$.

$\therefore$由 1°,2°知,当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时,直线 AB 恒过定点$(-2p,0)$;当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$时,直线 AB 恒过定点$\left(-2p,\frac{2p}{\tan\theta}\right)$.

14.(1)**证法一** 设点 P 的坐标为(x,y).由 $P(x,y)$在椭圆上,得



$$|\overrightarrow{F_1P}|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$$=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}.$$

由 $x\geqslant=a$,知 $a+\frac{c}{a}x\geqslant-c+a>0$,

所以$|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$.

证法二 设点 P 的坐标为(x,y).记$|\overrightarrow{F_1P}|=r_1$,$|\overrightarrow{F_2P}|=r_2$,

则 $r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$,$r^2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

由 $r_1+r_2=2a$,$r_1{}^2-r_2{}^2=4cx$,得

$$|\overrightarrow{F_1P}|=r_1+a+\frac{c}{a}x.$$

证法三 设点 P 的坐标为 (x,y).

椭圆的左准线方程为 $x+\frac{a^2}{c}=0$.

由椭圆第二定义得 $\frac{|\overrightarrow{F_1P}|}{|x+\frac{a^2}{c}|}=\frac{c}{a}$,

即 $|\overrightarrow{F_1P}|=\frac{c}{a}|x+\frac{a^2}{c}|=|a+\frac{c}{a}x|$.

由 $x\geqslant -a$,知 $a+\frac{c}{a}x\geqslant -c+a>0$,

所以 $|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$.

(2)**解法一** 设点 T 的坐标为 (x,y).

当 $|\overrightarrow{PT}|=0$ 时,点 $(a,0)$ 和点 $(-a,0)$ 在轨迹上.

当 $|\overrightarrow{PT}|\neq 0$ 且 $|\overrightarrow{TF_2}|\neq 0$ 时,

由 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$,得 $\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{TF_2}$

又 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PF_2}$,所以 T 为线段 F_2Q 的中点.

在 $\triangle QF_1F_2$ 中,$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}|F_1Q|=a$,

所以有

$$x^2+y^2=a^2.$$

综上所述,点 T 的轨迹 C 的方程是 $x^2+y^2=a^2$.

解法二 设点 T 的坐标为 (x,y).

当 $|\overrightarrow{PT}|=0$ 时,点 $(a,0)$ 和点 $(-a,0)$ 在轨迹上.

当 $|\overrightarrow{PT}|\neq 0$,且 $\overrightarrow{TF_2}\neq 0$ 时,

由 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$,得 $\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{TF_2}$.

又 $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PF_2}|$ 所以 T 为线段 F_2Q 的中点.

设点 Q 的坐标为 (x',y'),

则

$$\begin{cases} x=\frac{x'+c}{2}, \\ y=\frac{y'}{2}. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} x'=2x-c, \\ y'=2y. \end{cases} \quad ①$$

由 $|\overrightarrow{F_1Q}|=2a$,得

$$(x'+c)^2+y'^2=4a^2. \quad ②$$

将①代②,可得 $x^2+y^2=a^2$.

综上所述,点 T 的轨迹 C 的方程是 $x^2+y^2=a^2$.

(3)**解法一** C 上存在点 $M(x_0,y_0)$ 使 $S=b^2$ 的充要条件是

$$\begin{cases} x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=a^2, & ③ \\ \frac{1}{2}\cdot 2c|y_0|=b^2. & ④ \end{cases}$$

由③得 $|y_0|\leqslant a$，由④得 $|y_0|=\frac{b^2}{c}$.

所以，当 $a\geqslant\frac{b^2}{c}$ 时，存在点 M，使 $S=b^2$；当 $a<\frac{b^2}{c}$ 时，不存在满足条件的点 M.

当 $a\geqslant\frac{b^2}{c}$ 时，$|\overrightarrow{MF_1}|=(-c-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{MF_2}=(c-x_0,-y_0)$，

由
$$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=x_0^{\ 2}-c^2+y_0^{\ 2}=a^2-c^2=b^2,$$
$$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\cos\angle F_1MF_2,$$
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\sin\angle F_1MF_2=b^2,$$

得
$$\tan\angle F_1MF_2=2.$$

解法二 C 上存在点 $M(x_0,y_0)$ 使 $S=b^2$ 的充要条件是

$$\begin{cases} x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=a^2, & ③ \\ \frac{1}{2}\cdot 2c|y_0|=b^2. & ④ \end{cases}$$

由④得 $|y_0|=\frac{b^2}{c}$.

将上式代入③得

$$x_0^{\ 2}=a^2-\frac{b^4}{c^2}=\left(a-\frac{b^2}{c}\right)\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2\geqslant 0.$$

于是，当 $a\geqslant\frac{b^2}{c}$ 时，存在点 M，使 $S=b^2$；当 $a<\frac{b^2}{c}$ 时，不存在满足条件的点 M.

当 $a\geqslant\frac{b^2}{c}$ 时，记 $k_1=k_{F_1M}=\frac{y_0}{x_0+c}$，$k_2=k_{F_2M}=\frac{y_0}{x_0-c}$，

由 $|F_1F_2|<2a$，知 $\angle F_1MF_2<90^\circ$，所以

$$\tan\angle F_1MF_2=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=2.$$

15. (1)设 $p(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，依题意有 $x_1\neq 0$，$y_1>0$，$y_2>0$，由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 得 $y'=x$

∴过点 P 的切线的斜率 $k_P=x_1$

∴直线 l 的斜率 $k_1=-\frac{1}{k_P}=-\frac{1}{x_1}$

∴直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{2}x_1^{\ 2}=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即

$$y=-\frac{1}{x_1}x+\frac{1}{2}x_1^{\ 2}+1 \qquad ①$$

解法一 联立①与 $y=\frac{1}{2}x^2$，消去 y 得 $x^2+\frac{2}{x_1}x-{x_1}^2-2=0$

∵M 是 P,Q 中点，设 $M(x_0,y_0)$

则 $\begin{cases} x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{x_1} \\ y_0=\left(-\frac{1}{x_1}\right)^2+\frac{1}{2}{x_1}^2+1 \end{cases}$

消去 x_1 得 $y_0={x_0}^2+\frac{1}{2{x_0}^2}+1(x_0\neq0)$

∴M 的轨迹方程为 $y=x^2+\frac{1}{2x^2}+1(x\neq0)$

解法二 由 $y_1=\frac{1}{2}{x_1}^2,y_2=\frac{1}{2}{x_2}^2,x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$ 得

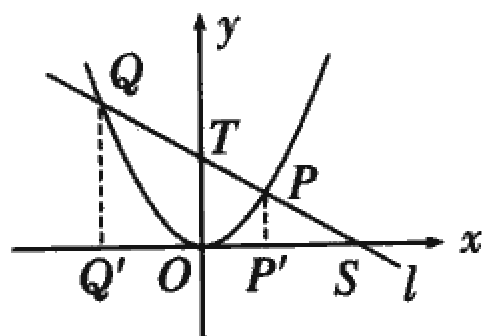
$y_1-y_2=\frac{1}{2}{x_1}^2-\frac{1}{2}{x_2}^2=\frac{1}{2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)=x_0(x_1-x_2)$

则 $x_0=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_1=-\frac{1}{x_1}$

将上式代入①得 $y_0=\left(-\frac{1}{x_1}\right)^2+\frac{1}{2}{x_1}^2+1$

消去 x_1，整理得 $y_0={x_0}^2+\frac{1}{2x_0}+1(x\neq0)$

∴M 的轨迹方程为 $y=x^2+\frac{1}{2x}+1(x\neq0)$



(2)设直线 $l:y=kx+b$，依题意 $k\neq0,b\neq0$. 则 $T(0,b)$分别过 P,Q 作 $PP'\perp x$ 轴，$QQ'\perp y$ 轴，垂足分别为 P',Q'，如图所示. 则

$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=\frac{|OT|}{|PP'|}+\frac{|OT|}{|QQ'|}=\frac{|b|}{y_1}+\frac{|b|}{y_2}$

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=kx+b \end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-2(k^2+b)y+b^2=0$ ②

则 $\begin{cases} y_1+y_2=2(k^2+b) \\ y_1\cdot y_2=b^2 \end{cases}$

解法一

∴$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=|b|\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)\geqslant|b|\cdot2\sqrt{\frac{1}{y_1y_2}}=2$

∴$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$的取值范围是$(2,+\infty)$

解法二

$\therefore \frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=|b|\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=|b|\cdot\frac{2(k^2+b)}{b^2}$

当 $b>0$ 时，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=b\cdot\frac{2(k^2+b)}{b^2}=\frac{2k^2}{b}+2>2$

当 $b<0$ 时，$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=-b\cdot\frac{2(k^2+b)}{b^2}=\frac{2(k^2+b)}{-b}$

∵方程②有两相异实根

$\therefore \Delta=4(k^2+b)^2-4b^2>0$　$\therefore k^2+2b>0$

$\therefore k^2>-2b$　$\therefore \frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}>\frac{2(-2b+b)}{-b}=2$

$\therefore \frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$的取值范围是$(2,+\infty)$

16.(1)设曲线方程为 $y=ax^2+\frac{64}{7}$，由题意可知，$0=a\cdot 64+\frac{64}{7}$.

$\therefore a=-\frac{1}{7}$.

∴曲线方程为 $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}$.

(2)设变轨点为 $C(x,y)$，根据题意可知

$$\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1\\ y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}\end{cases}$$

得 $4y^2-7y-36=0$，

$\therefore y=4$ 或 $y=-\frac{9}{4}$不合题意，舍去

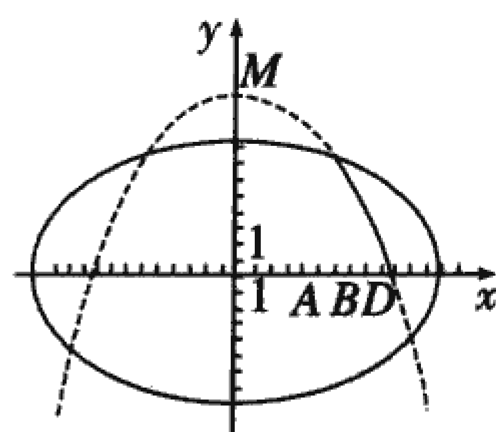
$\therefore y=4$

得 $x=6$ 或 $x=-6$(不合题意，舍去)

∴C点的坐标为$(6,4)$

$|AC|=2\sqrt{5}$，$|BC|=4$.

∴当观测点 A，B 测得 AC，BC 距离分别为 $2\sqrt{5}$，4 时，应向航天器发出变轨指令.



第十八章 求最（极）值的常用方法六露尊容

最值与极值是两个不同的概念，最值是在函数全定义域上的，而极值则是局部性的．这类问题既是高中数学中的难点问题，又是高考中的热点问题．最（极）值问题几乎涉及高中数学的每一个分支，加之又常常有附加条件限制和与实际应用问题联系在一起，更增加了它的难度系数．正因为这类问题知识覆盖面宽、综合性强、解题方法灵活，倍受命题者青睐，被编拟出五花八门的综合题来"考基础、考能力"．因此，我们应该较好地掌握其常用的解题方法和解题技巧．

一、配方法

解题秘言：涉及二次函数时，求最值问题，通常运用配方法求出二次函数的顶点，从而得到最值．

例1 （2008年宁夏高考理·T19）A，B两个投资项目的利润率分别为随机变量X_1和X_2，根据市场分析，X_1和X_2的分布列分别为

X_1	5%	10%
P	0.8	0.2

X_2	2%	8%	12%
P	0.2	0.5	0.3

（Ⅰ）在A，B两个项目上各投资100万元，Y_1和Y_2分别表示投资项目A和B所获得的利润，求方差DY_1，DY_2；

（Ⅱ）将$x(0\leqslant x\leqslant 100)$万元投资$A$项目，$100-x$万元投资$B$项目，$f(x)$表示投资$A$项目所得利润的方差与投资$B$项目所得利润的方差的和．求$f(x)$的最小值，并指出$x$为何值时，$f(x)$取到最小值．（注：$D(aX+b)=a^2DX$）

【规范解析】 （Ⅰ）由题设可知Y_1和Y_2的分布列分别为

Y_1	5	10
P	0.8	0.2

Y_2	2	8	12
P	0.2	0.5	0.3

$EY_1=5\times0.8+10\times0.2=6$,

$DY_1=(5-6)^2\times0.8+(10-6)^2\times0.2=4$,

$EY_2=2\times0.2+8\times0.5+12\times0.3=8$,

$DY_2=(2-8)^2\times0.2+(8-8)^2\times0.5+(12-8)^2\times0.3=12$.

(Ⅱ) $f(x)=D\left(\frac{x}{100}Y_1\right)+D\left(\frac{100-x}{100}Y_2\right)$

$=\left(\frac{x}{100}\right)^2DY_1+\left(\frac{100-x}{100}\right)^2DY_2$

$=\frac{4}{100^2}[x^2+3(100-x)^2]$

$=\frac{4}{100^2}(4x^2-600x+3\times100^2)$

$=\frac{16}{100^2}(x-75)^2+3$.

当 $x=\frac{600}{2\times4}=75$ 时，$f(x)=3$ 为最小值.

例2 (2008年重庆高考理·T4)已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $\frac{m}{M}$ 的值为 ( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【规范解析】 由题意函数的定义域为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant1\}$，

$\because y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}\geqslant0$,

$\therefore y^2=4+2\sqrt{(1-x)(x+3)}=4+2\sqrt{-(x+1)^2+4}$,

当 $x=-1$ 时，$y_{max}^2=8$，$\therefore y_{max}=2\sqrt{2}$,

当 $x=1$ 或 -3 时，$y_{min}^2=4$，$\therefore y_{min}=2$,

$\therefore \frac{m}{M}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【答案】 C

例3 (2008年福建高考理·T17)已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos A)$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1)$，且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$，且 A 为锐角.

(1)求角 A 的大小；

(2)求函数 $f(x)=\cos2x+4\cos A\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的值域.

【规范解析】 (1)由题意得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,

$2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$，$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.



由 A 为锐角得 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $\cos A=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\cos 2x+2\sin x=1-2\sin^2 x+2\sin x$

$=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$.

因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $\sin x\in[-1,1]$，因此，

当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\frac{3}{2}$.

当 $\sin x=-1$ 时，$f(x)$ 有最小值 -3，

所以所求函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

二、函数单调性法

解题秘言：根据函数在其各自的定义区间上的单调性来探求函数的最值是一种最常用的基本方法.

例1 (2007年全国高考Ⅰ·T8)设 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$，则 a 等于…　　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

【规范解析】 当 $a>1$ 时，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上是增函数，$f(2a)-f(a)=\frac{1}{2}$，解之，得 $a=4$.

【答案】 D

例2 设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$，$x\in\mathbf{R}$. 求 $f(x)$ 的最小值.

【解】 (1)当 $x\leqslant a$ 时，

$f(x)=x^2-(x-a)+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a+\frac{3}{4}\right)$.

若 $a\leqslant\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上递减，此时，

$f(x)_{\min}=f(a)=a^2+1$；

若 $a>\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上递减，在 $\left[\frac{1}{2},a\right]$ 上递增，此时

$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+a$.

(2)当 $x\geqslant a$ 时，

$$f(x)=x^2+(x-a)+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-a\right).$$

若 $a<-\frac{1}{2}$，则 $f(x)$在$\left[a,-\frac{1}{2}\right]$上递减，在$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$上递增，此时，

$$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-a;$$

若 $a\geqslant-\frac{1}{2}$，则 $f(x)$在$[a,+\infty)$上递增，此时，

$$f(x)_{\min}=f(a)=a^2+1.$$

综合(1)，(2)可知，$f(x)_{\min}=\begin{cases}\frac{3}{4}-a(a<-\frac{1}{2})\\ a^2+1(|a|\leqslant\frac{1}{2})\\ \frac{3}{4}+a(a>\frac{1}{2})\end{cases}$

【解后感言】 这里是根据二次函数在对称轴的两边的单调函数来解题的，其中对所含参数 a 的讨论要注意理解掌握.

例 3 设函数 $f(x)=\log_3(x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1})$，其中 m 为实数，记集合 $M=\{m|m>1\}$.

(Ⅰ)**证明**：当 $m\in M$ 时，$f(x)$对所有实数 x 都有意义，反之，如果$f(x)$对所有实数 x 都有意义，则 $m\in M$；

(Ⅱ)当 $m\in M$ 时，求 $f(x)$的最小值.

(Ⅰ)**证明**：令 $g(x)=x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}$，即

$$g(x)=(x-2m)^2+m+\frac{1}{m-1}.$$

若 $m\in M$，则 $m>1$，$g(x)\geqslant m+\frac{1}{m-1}>0$，

$\therefore f(x)=\log_3 g(x)$对所有实数 x 都有意义.

反之，若 $f(x)$对所有实数 x 有意义，则对所有实数 x，都有 $g(x)>0$. 特别地，$g(2m)>0$.

$\therefore m+\frac{1}{m-1}>0$，即$\frac{m^2-m+1}{m-1}>0$.

注意到 $m^2-m+1=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，

$\therefore m-1>0$，即 $m>1$. $\therefore m\in M$.

天天向上 言

（Ⅱ）**【解】** 当 $m\in M$ 时，$m>1$，$g(x)\geqslant m+\frac{1}{m-1}$，

$\therefore f(x)=\log_3 g(x)\geqslant\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)$.

$\therefore$ 当 $x=2m$ 时，$f(x)_{\min}=\log_3\left(m+\frac{1}{m-1}\right)$.

【解后感言】 第（Ⅱ）问是利用复合函数的单调性解题. 对于复合函数，如果 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的单调性相同，那么 $y=f[g(x)]$ 是增函数；

如果 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的单调性相反，那么 $y=f[g(x)]$ 是减函数.

三、不等式法

解题秘言：主要是运用均值不等式和柯西不等式求最值.

例1 （2008 年江苏高考 · T11）设 x,y,z 为正实数，满足 $x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是________.

【规范解析】 由 $x-2y+3z=0$ 得 $y=\frac{x+3z}{2}$，代入 $\frac{y^2}{xz}$ 得 $\frac{x^2+9z^2+6xz}{4xz}\geqslant\frac{6xz+6xz}{4xz}=3$，

当且仅当 $x=3z$ 时取"＝".

【答案】 3

例2 （2008 年全国Ⅰ高考理 · T17）设△ABC 的内角 A,B,C 所对的边长分别 a,b,c，且 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$.

（Ⅰ）求 $\tan A\cot B$ 的值；

（Ⅱ）若 $\tan(A-B)$ 的最大值.

【规范解析】 解：(1)根据 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$ 以及正弦定理，

可得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{3}{5}\sin C=\frac{3}{5}\sin(A+B)$，

$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{3}{5}\sin A\cos B+\frac{3}{5}\cos A\sin B$，

因此，有 $\frac{2}{5}\sin A\cos B=\frac{8}{5}\cos A\sin B$，$\tan A\cot B=4$.

(2) $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ 令 $\tan A=x$，

则 $\cot B=\frac{4}{x}$，$\tan B=\frac{x}{4}$，

则 $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{x-\frac{x}{4}}{1+x\cdot\frac{x}{4}}=\frac{3x}{4+x^2}$.

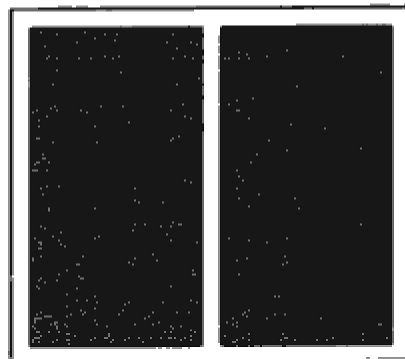
∵ $\tan A$，$\cot B$ 不可能同时取负，因此 $\tan A>0$，即 $x>0$.

故 $\tan(A-B)=\frac{3}{\frac{4}{x}+x}\leqslant\frac{3}{2\sqrt{\frac{4}{x}\cdot x}}=\frac{3}{4}$，

当 $\frac{4}{x}=x$，即 $x=2$ 时取等号，

即当 $\tan A=2$，$\tan B=\frac{1}{2}$ 时，$\tan(A-B)$ 取最大值，为 $\frac{3}{4}$.

例 3 (2008 年湖北高考文 · T19) 如图，要设计一张矩形广告，该广告含有大小相等的左右两个矩形栏目(即图中阴影部分)，这两栏的面积之和为 18 000 cm²，四周空白的宽度为 10 cm，两栏之间的中缝空白的宽度为 5 cm，怎样确定广告的高与宽的尺寸(单位:cm)，能使矩形广告面积最小？



【思路探索】 本题解决的关键是引入变量，建立变量之间的关系.

【规范解析】 方法一：设矩形栏目的高为 a cm，宽为 b cm，则 $ab=9\ 000$ ①

广告的高为 $a+20$，宽为 $2b+25$，其中 $a>0$，$b<0$，

广告的面积 $S=(a+20)(2b+25)$

$=2ab+40b+25a+500$

$=18\ 500+25a+40b$

$\geqslant 18\ 500+2\sqrt{25a\cdot 40b}$

$=18\ 500+2\sqrt{1\ 000ab}=24\ 500$.

当且仅当 $25a=40b$ 时等号成立，此时 $b=\frac{5}{8}a$，代入①式得 $a=120$，从而 $b=75$，

即当 $a=120$，$b=75$ 时，S 取得最小值 24 500，

故广告的高为 140 cm，宽为 175 cm 时，可使广告的面积最小.

方法二：设广告的高和宽分别为 x cm，y cm，则每栏的高和宽分别为 $x-20$，$\frac{y-25}{2}$，其中 $x>20$，$y>25$，

两栏面积之和为 $2(x-20)\frac{y-25}{2}=18\ 000$，

由此得 $y=\frac{18\ 000}{x-20}+25$,

广告的面积 $S=xy=x\left(\frac{18\ 000}{x-20}+25\right)$

$$=\frac{18\ 000x}{x-20}+25x,$$

整理得 $S=\frac{360\ 000}{x-20}+25(x-20)+18\ 500$,

因为 $x-20>0$,

所以 $S\geqslant 2\sqrt{\frac{360\ 000}{x-20}\times 25(x-20)}+18\ 500=24\ 500$,

当且仅当 $\frac{360\ 000}{x-20}=25(x-20)$时等号成立.

此时有$(x-20)^2=14\ 400(x>20)$,

解得 $x=140$,代入 $y=\frac{18\ 000}{x-20}+25$,得 $y=175$,

即当 $x=140$,$y=175$ 时,S 取得最小值 24 500,

故当广告的高为 140 cm,宽为 175 cm 时,可使广告的面积最小.

四、三角函数法

解题秘言:三角函数法主要是利用三角函数的有界性,或利用三角代换来求最值.

例1 (2008 年天津高考文 · T17)已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+2\sin\omega x\cos\omega x+1(x\in\mathbf{R},\omega>0)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$.

(1)求 ω 的值;

(2)求函数 $f(x)$的最大值,并且求使 $f(x)$取得最大值的 x 的集合.

【规范解析】 (1)$f(x)=2\cdot\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\sin 2\omega x+1$

$=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+2$

$=\sqrt{2}\left(\sin 2\omega x\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\omega x\sin\frac{\pi}{4}\right)+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+2.$

由题设,函数 $f(x)$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$,可得$\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}$,

所以 $\omega=2$.

(2)由(1)知，$f(x)=\sqrt{2}\sin(4x+\frac{\pi}{4})+2$，

当 $4x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即 $x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，

$\sin(4x+\frac{\pi}{4})$ 取得最大值 1，

所以函数 $f(x)$ 的最大值是 $2+\sqrt{2}$，

此时 x 的集合为 $\{x|x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$.

【解后感言】 在函数 $f(x)$ 变形时，最终把它化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，这是求三角函数最值的基本方法.

例 2 求函数 $y=\frac{x+2}{1+\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ 的最值.

【解】 令 $x=\sin\theta(0<|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2})$，则

$$y=\frac{2+\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2+\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=2\cdot\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=2\cdot\frac{(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=(1+\tan\frac{\theta}{2})^2.$$

$\because 0<|\frac{\theta}{2}|\leqslant\frac{\pi}{4}$， $\therefore 0<|\tan\frac{\theta}{2}|\leqslant 1$.

$\therefore 0\leqslant y\leqslant 4$ 且，$y\neq 1$. $\therefore y_{\max}=4,y_{\min}=0$.

【解后感言】 对于根式 $\sqrt{1-x^2}$，联想到公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. 可以令 $x=\sin\theta$ $\left(|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$(也可以令 $x=\cos\theta$)化归三角函数来求最值.

例 3 已知实数 x,y 满足 $(x-y)^2+y^2=16$，求 $2x^2+3y^2$ 的最值.

【解】 由已知等式，令 $x-y=4\cos\theta,y=4\sin\theta$，其中 $0\leqslant\theta<2\pi$，则

$2x^2+3y^2=2(4\cos\theta+4\sin\theta)^2+3(4\sin\theta)^2$

$=32+64\sin\theta\cos\theta+48\sin^2\theta$

$=32+32\sin2\theta+24(1-\cos2\theta)$

$=8(4\sin2\theta-3\cos2\theta)+56$.

$\because |4\sin2\theta-3\cos2\theta|\leqslant\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，

$\therefore 16\leqslant 2x^2+3y^2\leqslant 96$.

$\therefore (2x^2+3y^2)_{\max}=96,(2x^2+3y^2)_{\min}=16$.

【解后感言】 这里利用题设的平方和为常数作三角代换，化难为易. 三角不等式 $A\sin x+B\cos x\leqslant\sqrt{A^2+B^2}$ 常用来解答关于三角最值的问题.



例4 已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$和直线$l:4x+5y-40=0$.求椭圆上的点到直线$l$的最大、最小距离.

【解】 设椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=5\cos\alpha\\y=4\sin\alpha\end{cases}(0\leqslant\alpha\leqslant2\pi)$$

则椭圆上任一点$P(5\cos\alpha,4\sin\alpha)$到$l$的距离

$$d=\frac{|4\times5\cos\alpha+5\times4\sin\alpha-40|}{\sqrt{4^2+5^2}}$$

$$=\frac{20|\sin\alpha+\cos\alpha-2|}{\sqrt{41}}$$

$$=\frac{20\sqrt{41}}{41}|\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})-2|$$

当$\alpha=\frac{\pi}{4}$时,$d_{min}=\frac{20\sqrt{41}}{41}(2-\sqrt{2})$,得最近点$P_1$的坐标为$(\frac{5}{2}\sqrt{2},2\sqrt{2})$;当$\alpha=\frac{5\pi}{4}$时,$d_{max}=\frac{20\sqrt{41}}{41}(2+\sqrt{2})$,得最远点$P_2$的坐标为$(-\frac{5}{2}\sqrt{2},-2\sqrt{2})$.

【解后感言】 涉及圆和椭圆的最值问题,和用参数方程化归为三角函数的最值问题是一种常见和有效的解题方法.

五、导数法

解题秘言:导数是求函数极(最)值的最有效,最常用的一种方法,特别是在近两年的高考试题中出题率极高.

例1 (2008年辽宁高考理·T22)设函数$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$.

(1)求$f(x)$的单调区间和极值;

(2)是否存在实数a,使得关于x的不等式$f(x)\geqslant a$的解集为$(0,+\infty)$?若存在,求a的取值范围;若不存在,试说明理由.

【规范解析】 (1)$f'(x)=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=-\frac{\ln x}{(1+x)^2}$.

故当$x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,

当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,

所以$f(x)$在$(0,1)$单调递增,

在$(1,+\infty)$单调递减,

$f(x)$在$(0,+\infty)$的极大值为$f(1)=\ln2$,没有极小值.

(2)①当 $a\leqslant 0$ 时，

由于 $f(x)=\dfrac{(1+x)\ln(1+x)-x\ln x}{1+x}$

$=\dfrac{\ln(1+x)+x[\ln(1+x)-\ln x]}{1+x}>0$，

故关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$.

②当 $a>0$ 时，由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}+\ln(1+\dfrac{1}{x})$

知 $f(2^n)=\dfrac{\ln 2^n}{1+2^n}+\ln(1+\dfrac{1}{2^n})$，其中 n 为正整数，

且有 $\ln(1+\dfrac{1}{2^n})<\dfrac{a}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2^n}<e^{\frac{a}{2}}-1\Leftrightarrow n>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$.

又 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{\ln 2^n}{1+2^n}=\dfrac{n\ln 2}{1+(1+1)^n}<\dfrac{n\ln 2}{\frac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{2\ln 2}{n-1}$.

且 $\dfrac{2\ln 2}{n-1}<\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow n>\dfrac{4\ln 2}{a}+1$.

取整数 n_0 满足 $n_0>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$，$n_0>\dfrac{4\ln 2}{a}+1$，

且 $n_0\geqslant 2$.

则 $f(2^{n_0})=\dfrac{n_0\ln 2}{1+2^{n_0}}+\ln(1+\dfrac{1}{2^{n_0}})<\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}=a$，

即当 $a>0$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集不是 $(0,+\infty)$.

综合①②知，存在 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$，且 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

例2 (2008年浙江高考理·T21)已知 a 是实数，函数 $f(x)=\sqrt{x}(x-a)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)设 $g(a)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最小值.

①写出 $g(a)$ 的表达式；

②求 a 的取值范围，使得 $-6\leqslant g(a)\leqslant -2$.

【思路探索】 对于(1)，求出导数 $f'(x)$，当 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 是增函数，当 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 是减函数，并且注意函数的定义域，对于(2)中的①，根据函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的单调性来求最小值，要注意根据 a 的不同进行讨论.

【规范解析】 (1)函数的定义域为 $[0,+\infty)$，

$f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x-a}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3x-a}{2\sqrt{x}}(x>0)$，

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，

$f(x)$ 有单调递增区间 $[0,+\infty)$.

若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{3}$，

当 $0<x<\frac{a}{3}$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x>\frac{a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，

即 $a>0$ 时，$f(x)$ 有单调递减区间 $\left[0,\frac{a}{3}\right]$，

单调递增区间 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$.

(2)①若 $a\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，

所以 $g(a)=f(0)=0$，

若 $0<a<6$，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{a}{3}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a}{3},2\right]$ 上单调递增，

所以 $g(a)=f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$，

若 $a\geqslant 6$，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，

所以 $g(a)=f(2)=\sqrt{2}(2-a)$，

综上所述，$g(a)=\begin{cases}0 & a\leqslant 0\\ -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} & 0<a<6.\\ \sqrt{2}(2-a) & a\geqslant 6\end{cases}$

②令 $-6\leqslant g(a)\leqslant -2$，

若 $a\leqslant 0$，无解，

若 $0<a<6$，解得 $3\leqslant a<6$，

若 $a\geqslant 6$，解得 $6\leqslant a\leqslant 2+3\sqrt{2}$，

故 a 的取值范围为 $3\leqslant a\leqslant 2+3\sqrt{2}$.

【解后感言】 以上两例较系统地介绍了用导数法求极(最)值的一般解题步骤：

①求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$；

②令 $f'(x)=0$ 求得驻点；

③依驻点将 $f(x)$ 的定义域分成若干区间；

④列表，判定 $f'(x)$ 在各区间的正负号；

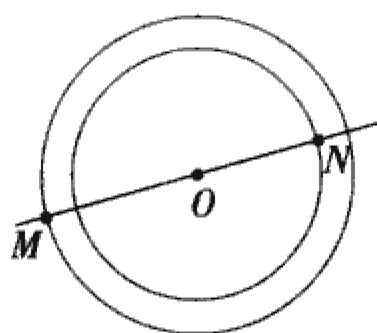
⑤依各区间函数 $f(x)$ 的增减性判定极(最)值点.

六、数形结合法

解题秘言:有些代数和三角问题,若能借助其几何背景,予以几何直观,这时求其最值常能收到直观、明快、化难为易的功效.

例1 (2008年江西高考文·T15)连结球面上两点的线段称为球的一条弦.半径为4的球的两条弦AB、CD的长度分别等于$2\sqrt{7}$、$4\sqrt{3}$,每条弦的两端都在球面上运动,则两弦中点之间距离的最大值为____.

【规范解析】 令M、N分别为弦AB、CD的中点,球心为O由题意知M到O的距离为3,故点M的轨迹是以O为球心,3为半径的球面.



同理,N为以O为球心,2为半径的球面.

截面图如图所示,

当M、O、N共线时,$|MN|$最大或最小,$|MN|_{\max}=|OM|+|ON|=3+2=5$.

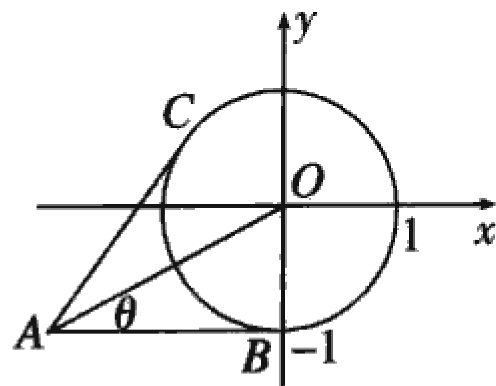
【答案】 5

例2 求$y=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$的最值.

【解】 将函数式变形为$y=\dfrac{\sin x-(-1)}{\cos x-(-2)}$

其几何意义是在直角坐标系中,动点$P(\cos x,\sin x)$和定点$A(-2,-1)$连线的斜率.动点P的轨迹为单位圆,由下图知k_{AB}最小,k_{AC}最大.显然$k_{AB}=0$

又$\tan\theta=\dfrac{|OB|}{|AB|}=\dfrac{1}{2}$



$\therefore \tan\angle BAC=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{4}{3}$,即

$k_{AC}=\dfrac{4}{3}$

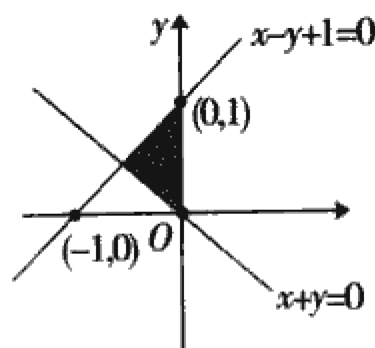
故$y_{\min}=0$,$y_{\max}=\dfrac{4}{3}$

【解后感言】 形如$\dfrac{f(x)-a}{g(x)-b}$的函数式,通常都可视作点$(g(x),f(x))$与点(b,a)的连线的斜率.

例3 （2008年北京高考理·T5）若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3^{x+2y}$ 的最小值是 （ ）

A. 0 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 9

【规范解析】 上述不等式组所表示的可行域如右图阴影部分所示.



令 $t=x+2y$，则当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}t$ 经过原点 $O(0,0)$ 时，$\frac{1}{2}t$ 取最小值，也即 t 有最小值为0，则 $z=3^{x+2y}$ 有最小值为 $3^0=1$.

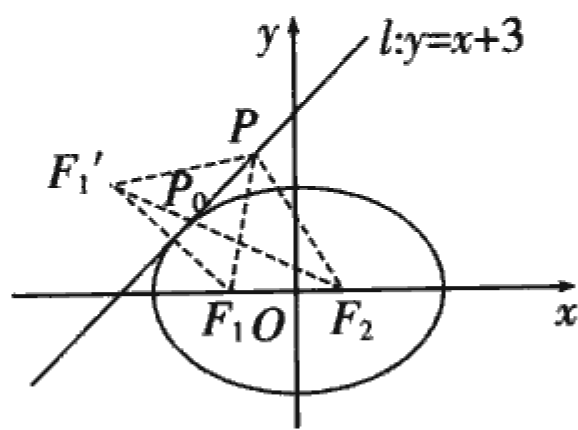
【解后感言】 这里是构造可行域利用线性规划来求最值.

【答案】 B

例4 在直线 $l:y=x+3$ 上取一点 P，过点 P 且以双曲线 $12x^2-4y^2=3$ 的焦点为焦点作椭圆，求椭圆长轴长的最小值及此时 P 点的坐标与椭圆方程.

【解】 易求得双曲线的两焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，由此设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>0)$.

如图示：易求得 F_1 关于直线 l 的对称点为 $F_1'(-3,2)$. 则直线 l 与直线 $F_1'F_2:y=-\frac{1}{2}(x-1)$ 的交点是 $P_0\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$.



由椭圆定义与平面几何的结论得

$2a=|F_1P|+|F_2P|=|F_1'P|+|F_2P|$

$\geqslant|F_1'F_2|=\sqrt{(1+3)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$

当且仅当点 P 重合于点 P_0 时，上式取"="号.

故椭圆长轴长的最小值为 $2\sqrt{5}$.

此时 P 点坐标为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

【解后感言】 这里是运用平面几何中三角形两边之和大于第三边的关系式求最小值. 本题还可运用三角代换法、判别式法来解答.

实战秘修十八

1.(2008 年江苏高考·T13)满足条件 $AB=2,AC=\sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值是________.

2.(2008 年湖南高考理·T6)函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是 ( )

A. 1　　B. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $1+\sqrt{3}$

3. 若动点 (x,y) 在曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 上变化,则 x^2+2y 的最大值为 ( )

A. $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4 & (0<b<4)\\ 2b & (b\geq 4)\end{cases}$　　B. $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4 & (0<b<2)\\ 2b & (b\geq 2)\end{cases}$

C. $\frac{b^2}{4}+4$　　D. $2b$

4. 设 $a,b\in\mathbf{R},a^2+2b^2=6$,则 $a+b$ 的最小值是 ( )

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

C. -3　　D. $-\frac{7}{2}$

5. 若函数 $f(x)=\log_a x(0<a<1)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍,则 $a=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 有极值的充要条件是 ( )

A. $a>0$　　B. $a\geq 0$

C. $a<0$　　D. $a\leq 0$

7. 在 $\triangle ABC$ 中,O 为中线 AM 上的一个动点,若 $AM=2$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值是________.



8.(2008年湖北高考理·T16)已知函数 $f(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$, $g(x)=\cos x\cdot f(\sin x)+\sin x\cdot f(\cos x)$, $x\in\left(\pi,\frac{17\pi}{12}\right)$.

(Ⅰ)将函数 $g(x)$ 化简成 $A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0,\varphi\in[0,2\pi))$ 的形式;

(Ⅱ)求函数 $g(x)$ 的值域.

9. 设函数 $f(x)=-a\sqrt{x^2+1}+x+a$, $x\in(0,1]$, $a\in\mathbf{R}_+$.

(1)若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是增函数,求 a 的取值范围;

(2)求 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值.

10.(2008年山东高考理·T21)已知函数 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+a\ln(x-1)$,其中 $n\in\mathbf{N}^*$, a 为常数.

(Ⅰ)当 $n=2$ 时,求函数 $f(x)$ 的极值;

(Ⅱ)当 $a=1$ 时,证明:对任意的正整数 n,当 $x\geqslant 2$ 时,有 $f(x)\leqslant x-1$.

11. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 4,侧棱长为 8, E,F 分别是 PB,PC 上的点,求 $\triangle AEF$ 的周长的最小值.

12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,过其对角线 BD_1 的平面分别与 AA_1, CC_1 相交于点 E,F,求截面四边形 BED_1F 的面积的最小值.

13. 用总长 14.8 m 的钢条制作一个长方体容器的框架,如果所制作容器的底面的一边比另一边长 0.5 m,那么高为多少时容器的容积最大?并求出它的最大容积.

14. P,Q,M,N 四点都在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上,F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点.已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线, $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线,且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$.
求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

15. 已知 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x^2|x-a|$.

(1)当 $a=2$ 时,求使 $f(x)=x$ 成立的 x 的集合;

(2)求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值.

16. 已知 $a\geqslant 0$,函数

$$f(x)=(x^2-2ax)e^x.$$

(1)当 x 为何值时,$f(x)$ 取得最小值?证明你的结论;

(2)设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是单调函数,求 a 的取值范围.

17. 是否存在同时满足下列条件的双曲线,若存在,求出其方程;若不存在,说明理由.

(1)渐近线方程为 $x\pm 2y=0$;

(2)点 $A(5,0)$ 到双曲线上动点 P 的距离的最小值为 $\sqrt{6}$.

实战秘修十八答案与提示

1. $2\sqrt{2}$ 设 $BC=x$,则 $AC=\sqrt{2}x$,根据面积公式得

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times 2x\sqrt{1-\cos^2 B}$,

根据余弦定理得

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4+x^2-(\sqrt{2}x)^2}{4x}=\frac{4-x^2}{4x}$,

代入上式可得

$S_{\triangle ABC}=x\sqrt{1-\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^2}=\sqrt{\frac{128-(x^2-12)^2}{16}}$.

由三角形三边关系有$\begin{cases}\sqrt{2}x+x>2,\\ x+2>\sqrt{2}x,\end{cases}$

解得 $2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2$,

故当 $x=2\sqrt{3}$时,$S_{\triangle ABC}$取得最大值 $2\sqrt{2}$.

2. C $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

又 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$,

$\therefore (f(x))_{\max}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. 故选 C.

3. A 设$x=2\cos\theta$, $y=b\sin\theta$,则

$$\begin{aligned}x^2+2y&=4\cos^2\theta+2b\sin\theta\\&=-4\sin^2\theta+2b\sin\theta+4\\&=-4(\sin\theta-\frac{b}{4})^2+\frac{b^2}{4}+4.\end{aligned}$$

$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$,

$\therefore$ 当 $0<b<4$ 时,$\sin\theta=\frac{b}{4}$,$(x^2+2y)_{\max}=\frac{b^2}{4}+4$;

当 $b\geqslant 4$ 时,$\sin\theta=1$,$(x^2+2y)_{\max}=2b$.

4. C 设 $a=\sqrt{6}\cos\theta$,$b=\sqrt{3}\sin\theta$,则

$a+b=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=3\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)=3\sin(\varphi+\theta)\geqslant -3$.

5. A $\because 0<a<1$, $\therefore f(x)=\log_a x$ 是单调减函数.

又 $f(a)=3f(2a)$,即 $\log_a a=3\log_a(2a)$.

$\therefore (2a)^3=a>0$,故 $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6. C　$f'(x)=3ax^2+1$，令 $f'(x)=3ax^2+1=0$，则当 $a<0$ 时，存在稳定点 $x_1=\sqrt{\frac{-1}{3a}}$，$x_2=-\sqrt{\frac{-1}{3a}}$. 此时 $f'(x)$ 在 x_1,x_2 的左右均异号，故 $f(x)$ 存在极值. $\therefore a<0$.

7. -2

解法一　如图 1，设 $\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}$，则 $|\boldsymbol{a}|=2$，设 $\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{MC}=-\boldsymbol{b}$.

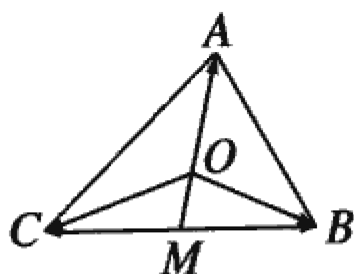


图1

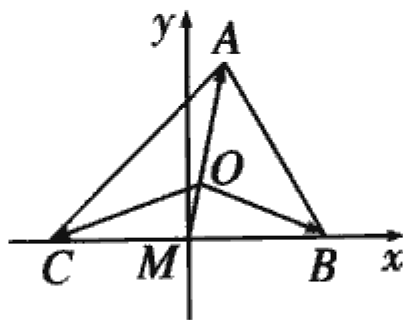


图2

$\because O$ 为中线 AM 上的动点，

$\therefore$ 可令 $\overrightarrow{MO}=t\overrightarrow{MA}=t\boldsymbol{a}$　$(0\leqslant t\leqslant 1)$.

故 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MO}=(1-t)\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})$

$=2\overrightarrow{OM}+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$

$=-2t\boldsymbol{a}+[\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})]=-2t\boldsymbol{a}$，

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=(1-t)\boldsymbol{a}\cdot(-2t\boldsymbol{a})$

$=-2t(1-t)\boldsymbol{a}^2=-8t(1-t)$.

$\because 0\leqslant t\leqslant 1$

$\therefore t(1-t)\leqslant\left[\frac{t+(1-t)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\geqslant -8\times\frac{1}{4}=-2$

最小值是 -2.

解法二　如图 2，以 M 为原点，CB 为 x 轴建立直角坐标系，据题意可设 $A(b,c)$，则 $O(tb,tc)$，其中 $0\leqslant t\leqslant 1$，$b^2+c^2=|AM|^2=4$. 则有

$\overrightarrow{OA}=(1-t)(b,c)$，

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(a-tb,-tc)+(-a-tb,-tc)$

$=-2t(b,c)$

$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-2t(1-t)(b^2+c^2)$

$=-8t(1-t)=-8\left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$\geqslant -8\times\frac{1}{4}=-2$.

8.(Ⅰ)$g(x)=\cos x\cdot\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}+\sin x\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$=\cos x\cdot\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}+\sin x\cdot\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}$

$=\cos x\cdot\frac{1-\sin x}{|\cos x|}+\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{|\sin x|}$.

$\because x\in\left(\pi,\frac{17\pi}{12}\right)$,$\therefore|\cos x|=-\cos x,|\sin x|=-\sin x$.

$\therefore g(x)=\cos x\cdot\frac{1-\sin x}{-\cos x}+\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{-\sin x}$.

$=\sin x+\cos x-2=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$.

(Ⅱ)由 $\pi<x\leqslant\frac{17\pi}{12}$,得$\frac{5\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{3}$.

$\because\sin t$ 在$\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$上为减函数,在$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right]$上为增函数,

又 $\sin\frac{5\pi}{3}<\sin\frac{5\pi}{4}$,

$\therefore\sin\frac{3\pi}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\sin\frac{5\pi}{4}$(当 $x\in\left(\pi,\frac{17\pi}{12}\right]$).

即$-1\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore-\sqrt{2}-2\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2<-3$,

故 $g(x)$的值域为$[-\sqrt{2}-2,-3)$.

9.(1)当 $x\in(0,1]$时,$f'(x)=-a\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1$.

要使 $f(x)$在 $x\in(0,1]$上是增函数,

需使 $f'(x)=-\frac{ax}{\sqrt{x^2+1}}+1\geqslant 0$ 在$(0,1]$上恒成立,

即 $a\leqslant\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$在$(0,1]$上恒成立.

又$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$在$(0,1]$上的最小值为$\sqrt{2}$,且 $a\in\mathbf{R}_+$,

$\therefore 0<a\leqslant\sqrt{2}$为所求.

(2)由(1)知,①当 $0<a\leqslant\sqrt{2}$时,$f(x)$在$(0,1]$上是增函数.

$\therefore[f(x)]_{\max}=f(1)=(1-\sqrt{2})a+1$.

②当 $a>\sqrt{2}$时,令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\in(0,1]$.

∵当 $0<x<\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$时,$f'(x)>0$;

当$\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}<x\leqslant 1$ 时,$f'(x)<0$,

$$\therefore [f(x)]_{\max}=f\left(\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\right)=\frac{(-a^2+1)\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}+a$$

$$=\frac{-a^2+1}{\sqrt{a^2-1}}+a.$$

综上,当 $0<a\leqslant\sqrt{2}$时,$[f(x)]_{\max}=(1-\sqrt{2})a+1$;

当 $a>\sqrt{2}$时,$[f(x)]_{\max}=\frac{-a^2+1}{\sqrt{a^2-1}}+a$.

10.(Ⅰ)由已知得函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x>1\}$,

当 $n=2$ 时,$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+a\ln(x-1)$,

所以 $f'(x)=\frac{2-a(1-x)^2}{(1-x)^3}$.

(ⅰ)当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$ 得

$x_1=1+\sqrt{\frac{2}{a}}>1$,$x_2=1-\sqrt{\frac{2}{a}}<1$,

此时 $f'(x)=\frac{-a(x-x_1)(x-x_2)}{(1-x)^3}$.

当 $x\in(1,x_1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当 $x\in(x_1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

(ⅱ)当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,所以 $f(x)$无极值.

综上所述,$n=2$ 时,

当 $a>0$ 时,$f(x)$在 $x=1+\sqrt{\frac{2}{a}}$处取得极小值,

极小值为 $f\left(1+\sqrt{\frac{2}{a}}\right)=\frac{a}{2}\left(1+\ln\frac{2}{a}\right)$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$无极值.

(Ⅱ)证法一:因为 $a=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)$.

当 n 为偶数时,令 $g(x)=x-1-\frac{1}{(1-x)^n}-\ln(x-1)$,

则 $g'(x)=1+\frac{n}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x-1}$,

$=\frac{x-2}{x-1}+\frac{n}{(x-1)^{n+1}}>0(x\geqslant 2)$.

所以当 $x\in[2,+\infty)$时,$g(x)$单调递增,

又 $g(2)=0$,因此 $g(x)=x-1-\frac{1}{(x-1)^n}-\ln(x-1)\geqslant g(2)=0$ 恒成立,所以

$f(x)\leqslant x-1$ 成立.

当 n 为奇数时,要证 $f(x)\leqslant x-1$,由于$\frac{1}{(1-x)^n}<0$,

所以只需证 $\ln(x-1)\leqslant x-1$,

令 $h(x)=x-1-\ln(x-1)$.

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}\geqslant 0(x\geqslant 2)$,

所以当 $x\in[2,+\infty)$时,$h(x)=x-1-\ln(x-1)$单调递增,

又 $h(2)=1>0$,所以当 $x\geqslant 2$ 时,恒有 $h(x)>0$,

即 $\ln(x-1)<x-1$ 命题成立.

综上所述,结论成立.

证法二:当 $a=1$ 时,$f(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)$.

当 $x\geqslant 2$ 时,对任意的正整数 n,恒有$\frac{1}{(1-x)^n}\leqslant 1$,

故只需证明 $1+\ln(x-1)\leqslant x-1$.

令 $h(x)=x-1-[1+\ln(x-1)]$

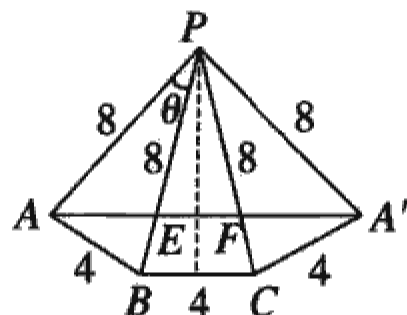
$=x-2-\ln(x-1)$,$x\in[2,+\infty)$.

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$,

当 $x\geqslant 2$ 时,$h'(x)\geqslant 0$,故 $h(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增,因此当 $x\geqslant 2$ 时,$h(x)\geqslant h(2)=0$,

即 $1+\ln(x-1)\leqslant x-1$ 成立.

故当 $x\geqslant 2$ 时,有$\frac{1}{(1-x)^n}+\ln(x-1)\leqslant x-1$,即 $f(x)\leqslant x-1$.



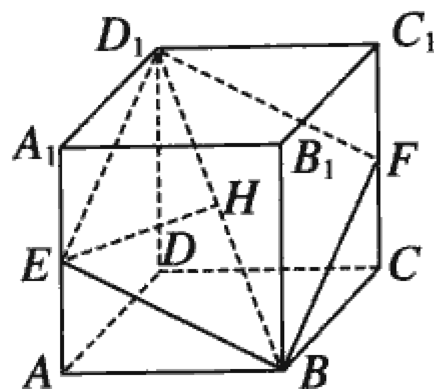
11. 如图,沿 PA 展平正棱锥的侧面,则原$\triangle AEF$ 的周长最小值等于线段 AA'的长.

设$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA'=\theta$,则

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}$,$\sin\frac{3\theta}{2}=3\sin\frac{\theta}{2}-4\sin^3\frac{\theta}{2}=\frac{11}{16}$.

$\therefore AA'=2\cdot(PA\cdot\sin\frac{3\theta}{2})=2\cdot 8\cdot\frac{11}{16}=11.$

12. 如图，由面面平行的性质定理知



$$BF//D_1E, BE//D_1F,$$

$\therefore$四边形 BED_1F 是平行四边形.

作 $EH\perp BD_1$ 于 H，

$\because S_{\square BED_1F}=2\cdot S_{\triangle BED_1}=BD_1\cdot EH=EH\cdot\sqrt{3}a$，

$\therefore$要求四边形 BED_1F 面积的最小值，只要求 EH 的最小值，即是两异面直线 AA_1 与 BD_1 的距离，也就是点 A 到平面 BDD_1B_1 的距离.

$\because EH_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，　$\therefore S_{\square BED_1F}$的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$.

13. 设容器底面长方形的宽为 x，长为 $x+0.5$，则容器的高为

$$h=\frac{14.8}{4}-x-(x+0.5)=3.2-2x(0<x<1.6).$$

故容器的体积 $V(x)=x(x+0.5)(3.2-2x)=-2x^3+2.2x^2+1.6x(0<x<1.6)$，

则
$$V'(x)=-6x^2+4.4x+1.6.$$

令 $V'(x)=0$，则有 $15x^2-11x-4=0$. 解得

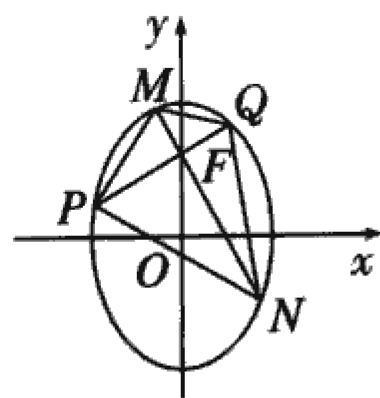
$$x=-\frac{4}{15}(\text{舍去})\text{或 }x=1.$$

故 $V(1)=1.8$ 是 $V(x)$在$(0,1.6)$内的唯一极值.

经验证知当 x 在$(0,1.6)$内比 1 过小或过大时，$V(x)<1.8$，故 $V(1)$是 $V(x)$在$(0,1.6)$内的最大值，此时，$h=3.2-2x=1.2(\text{m})$.

故当容器的高为 1.2m 时，容器的容积最大，最大容积是 1.8m^3.

14. 如图，由条件知 MN 和 PQ 是椭圆的两条弦，相交于焦点 $F(0,1)$，且 $PQ\perp MN$，直线 PQ、NM 中至少有一条存在斜率，不妨设 PQ 的斜率为 k. 又 PQ 过点 $F(0,1)$，故 PQ 方程为 $y=kx+1$.



将此式代入椭圆方程得

$$(2+k^2)x^2+2kx-1=0.$$

设 P,Q 两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则

$$x_1=\frac{-k-\sqrt{2k^2+2}}{2+k^2}, x_2=\frac{-k+\sqrt{2k^2+2}}{2+k^2},$$

从而$|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\frac{8(1+k^2)^2}{(2+k^2)^2}$

亦即$|PQ|=\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2+k^2}$.

①当 $k\neq 0$ 时，MN 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，同上可推得

$$|MN|=\frac{2\sqrt{2}\left[1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2\right]}{2+(-\frac{1}{k})^2}.$$

故四边形面积

$$S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|MN|=\frac{4(1+k^2)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{(2+k^2)\left(2+\frac{1}{k^2}\right)}=\frac{4\left(2+k^2+\frac{1}{k^2}\right)}{5+2k^2+\frac{2}{k^2}}.$$

令 $u=k^2+\frac{1}{k^2}$，得

$$S=\frac{4(2+u)}{5+2u}=2\left(1-\frac{1}{5+2u}\right).$$

因为 $u=k^2+\frac{1}{k^2}\geqslant 2$，

当 $k=\pm 1$ 时，$u=2,S=\frac{16}{9}$.

又 S 是以 u 为自变量的增函数，

所以
$$\frac{16}{9}\leqslant S\leqslant 2.$$

②当 $k=0$ 时，MN 为椭圆长轴，则

$$|MN|=2\sqrt{2},|PQ|=\sqrt{2},S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|MN|=2.$$

综合①，②知，四边形 $PMQN$ 面积的最大值为 2，最小值为 $\frac{16}{9}$.

15. (1)由题意，$f(x)=x^2|x-2|$.

当 $x<2$ 时，$f(x)=x^2(2-x)=x$，解得 $x=0$ 或 $x=1$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=x^2(x-2)=x$，解得 $x=1+\sqrt{2}$.

综上，所求解集为 $\{0,1,1+\sqrt{2}\}$.

(2)设此最小值为 m.

①当 $a\leqslant 1$ 时，在区间 $[1,2]$ 上，

$$f(x)=x^3-ax^2.$$

因为 $f'(x)=3x^2-2ax=3x(x-\frac{2}{3}a)>0,x\in(1,2)$，

则 $f(x)$ 是区间 $[1,2]$ 上的增函数，所以

$$m=f(1)=1-a.$$

②当 $1<a\leqslant 2$ 时，在区间 $[1,2]$ 上，$f(x)=x^2|x-a|\geqslant 0$，由 $f(a)=0$ 知 $m=f(a)=0$.

③当 $a>2$ 时，在区间 $[1,2]$ 上，

$$f(x)=ax^2-x^3.$$



$f'(x)=2ax-3x^2=3x\left(\frac{2}{3}a-x\right)$.

若 $a\geqslant 3$,在区间 $(1,2)$ 内 $f'(x)>0$,从而 $f(x)$ 为区间 $[1,2]$ 上的增函数,由此得 $m=f(1)=a-1$.

若 $2<a<3$,则 $1<\frac{2}{3}a<2$.

当 $1<x<\frac{2}{3}a$ 时,$f'(x)>0$,从而 $f(x)$ 为区间 $\left[1,\frac{2}{3}a\right]$ 上的增函数;

当 $\frac{2}{3}a<x<2$ 时,$f'(x)<0$,从而 $f(x)$ 为区间 $\left[\frac{2}{3}a,2\right]$ 上的减函数.

因此,当 $2<a<3$ 时,

$$m=f(1)=a-1 \text{ 或 } m=f(2)=4(a-2).$$

当 $2<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时,$4(a-2)\leqslant a-1$,

故 $$m=4(a-2);$$

当 $\frac{7}{3}<a<3$ 时,$a-1<4(a-2)$,

故 $$m=a-1.$$

综上所述,所求函数的最小值

$$m=\begin{cases}1-a, & \text{当 } a\leqslant 1 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } 1<a\leqslant 2 \text{ 时};\\ 4(a-2), & \text{当 } 2<a\leqslant\frac{7}{3} \text{ 时};\\ a-1, & \text{当 } a>\frac{7}{3} \text{ 时}.\end{cases}$$

16.(1)对函数 $f(x)$ 求导数,得

$f'(x)=(x^2-2ax)e^x+(2x-2a)e^x=[x^2+2(1-a)x-2a]e^x$.

令 $f'(x)=0$,得 $[x^2+2(1-a)x-2a]e^x=0$,

从而 $$x^2+2(1-a)x-2a=0.$$

解得 $$x_1=a-1-\sqrt{1+a^2},$$

$$x_2=a-1+\sqrt{1+a^2},\text{其中 } x_1<x_2.$$

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

即 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取到极大值,在 $x=x_2$ 处取到极小值.

$\because a\geqslant 0$. $\therefore x_1<-1$,$x_2\geqslant 0$,$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上为减函数,在 $(x_2,+\infty)$ 上为增函数.

而当 $x<0$ 时，$f(x)=x(x-2a)e^x>0$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=0$.

所以当 $x=a-1+\sqrt{1+a^2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

(2)由(1)知，$f(x)$ 在$[-1,1]$上为单调函数的充要条件是 $x_2\geqslant 1$，即

$$a-1+\sqrt{1+a^2}\geqslant 1.$$

解得 $a\geqslant\frac{3}{4}$

即 a 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

17. ∵双曲线的渐近线为 $x\pm 2y=0$，

∴可设双曲线方程为 $x^2-4y^2=t(t\neq 0)$.

①若 $t>0$，则 $x\in(-\infty,-\sqrt{t}\,]\cup[\sqrt{t},+\infty)$，故

$$|AP|=\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\sqrt{(x-5)^2+\frac{x^2-t}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{4}x^2-10x+25-\frac{t}{4}}.$$

设 $f(x)=\frac{5}{4}x^2-10x+25-\frac{t}{4}$，则抛物线 $f(x)$ 的对称轴为 $x=4$.

若 $\sqrt{t}\leqslant 4$，即 $0<t\leqslant 16$ 时，$f(x)_{\min}=\dfrac{4\times\frac{5}{4}(25-\frac{t}{4})-100}{4\times\frac{5}{4}}=6$，解得

$t=-4$(舍去).

若 $\sqrt{t}>4$，则 $x=\sqrt{t}$ 时，$f(x)$ 有最小值.

∵$\sqrt{\frac{5}{4}t-10\sqrt{t}+25-\frac{t}{4}}=|\sqrt{t}-5|=\sqrt{6}$　∴$t=(5+\sqrt{6})^2$.

此时，双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{(5+\sqrt{6})^2}-\dfrac{y^2}{\frac{(5+\sqrt{6})^2}{4}}=1$.

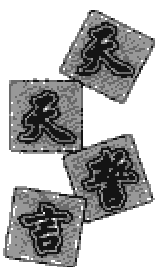
②若 $t<0$，则 $x\in\mathbf{R}$. 仍由 $|AP|=\sqrt{\frac{5}{4}x^2-10x+25-\frac{t}{4}}$ 知，当 $x=4$ 时，$|AP|$ 达到最小值.

∴$\sqrt{\frac{5}{4}\times 16-10\times 4+25-\frac{t}{4}}=\sqrt{6}$.　解得 $t=-4$.

此时，双曲线方程为 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$.

综合①②可知，适合条件的双曲线方程是：

$$\frac{x^2}{(5+\sqrt{6})^2}-\frac{y^2}{\frac{(5+\sqrt{6})^2}{4}}=1 \text{ 与 } y^2-\frac{x^2}{4}=1.$$



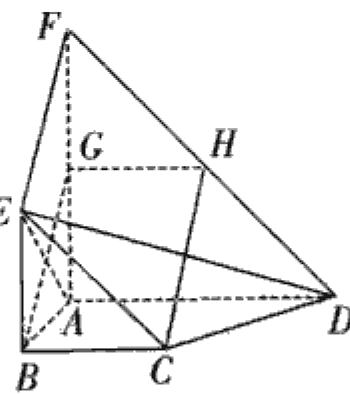
第十九章 探究性问题的解题方法细思量 更难忘

探究性问题，不叫探索性问题，它是一种开放性的题型.常见的探究性问题有：从给定的题设探求相应的结论；由给定的题断反溯应具备的条件；改变题设或题断的某个部分，考察整个问题将会产生什么变化.在命题用语上，常以“试探求”、“试猜测”、“试推测”、“试判断”、“是否”、“能否”等字词出现.由于这类题型没有明确的结论，解题方向不明，自由度大，需要通过对问题的观察、分析、比较、概括等处理过程，方能得出结论，然后再对所得出的结论予以证明.其难度大，思维含量高，是训练和考查学生的数学思维能力、分析问题和解决问题能力及培养创新能力的较好题型.美国心理学家布鲁纳说过，“探索是数学的生命线”，可见这类问题所占地位之重要.在近十年来的高考试题中，屡屡出现，且常出常新，因此我们应该掌握其常用的解题思考方法.

一、直接探求

解题秘言：所谓直接探究，就是直接从题设条件出发，执因索果，进行演绎推导，从而肯定或否定结论的方法.

例1 (2008年四川高考文·T19)如图，平面 $ABEF\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形，$\angle BAD=\angle FAB=90^\circ$，$BC \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$，$BE \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}FA$，$G$、$H$ 分别为 FA、FD 的中点.



(1)证明：四边形 $BCHG$ 是平行四边形；

(2)C、D、F、E 四点是否共面？为什么？

(3)设 $AB=BE$，证明：平面 $ADE\perp$ 平面 CDE.

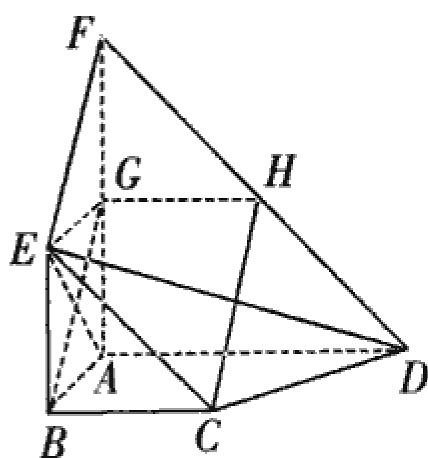
【规范解析】 方法一：

(1)由题设知，$FG=GA$，$FH=HD$.

所以 $GH \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$，又 $BC \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AD$，故 $GH \underline{\underline{\parallel}} BC$.

所以四边形 $BCHG$ 是平行四边形.

(2)C、D、F、E 四点共面.理由如下：



由 $BE \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AF$，$G$ 是 FA 的中点知，$BE \underline{\mathbin{/\!/}} GF$.

所以 $EF /\!/ BG$. 由(1)知 $BG /\!/ CH$，所以 $EF /\!/ CH$，故 EF、CH 共面. 又点 D 在直线 FH 上，所以 C、D、F、E 四点共面.

(3)连结 EG，由 $AB=BE$，$BE \underline{\mathbin{/\!/}} AG$ 及 $\angle BAG=90°$ 知 $ABEG$ 是正方形.

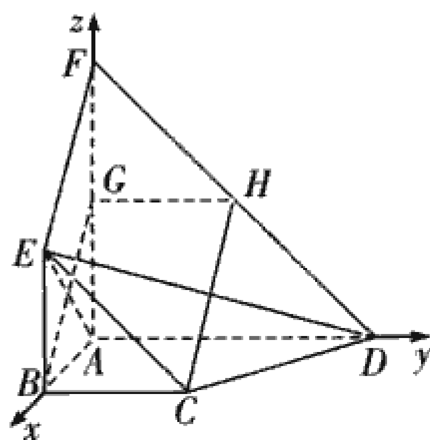
故 $BG \perp EA$. 由题设知，FA、AD、AB 两两垂直，故 $AD \perp$ 平面 $FABE$，

因此 EA 是 ED 在平面 $FABE$ 内的射影，根据三垂线定理，$BG \perp ED$.

又 $ED \cap EA=E$，所以 $BG \perp$ 平面 ADE.

由(1)知，$CH /\!/ BG$，所以 $CH \perp$ 平面 ADE. 由(2)知 $H \in$ 平面 CDE. 故 $CH \subset$ 平面 CDE，得平面 $ADE \perp$ 平面 CDE.

方法二：由题设知，FA、AB、AD 两两互相垂直.



如图，以 A 为坐标原点，射线 AB 为 x 轴正方向建立如图所示的直角坐标系.

(1)设 $AB=a$，$BC=b$，$BE=c$，则由题设得

$A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$C(a,b,0)$，$D(0,2b,0)$，$E(a,0,c)$，$G(0,0,c)$，$H(0,b,c)$.

所以 $\overrightarrow{GH}=(0,b,0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,b,0)$. 于是 $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BC}$.

又点 G 不在直线 BC 上.

所以四边形 $BCHG$ 是平行四边形.

(2)C、D、F、E 四点共面. 理由如下：

由题设知，$F(0,0,2c)$，所以 $\overrightarrow{EF}=(-a,0,c)$，

$\overrightarrow{CH}=(-a,0,c)$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CH}$.

又 $C \notin EF$，$H \in FD$，故 C、D、F、E 四点共面.

(3)由 $AB=BE$，得 $c=a$，

所以 $\overrightarrow{CH}=(-a,0,a)$，$\overrightarrow{AE}=(a,0,a)$.

又 $\overrightarrow{AD}=(0,2b,0)$.

因此 $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AE}=0$，$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AD}=0$，

即 $CH \perp AE$，$CH \perp AD$，

又 $AD \cap AE=A$，所以 $CH \perp$ 平面 ADE，

故由 $CH \subset$ 平面 $CDFE$，得平面 $ADE \perp$ 平面 CDE.

【解后感言】 这里是依据题设条件，直接推得 $EF /\!/ CH$，从而肯定结论.

例2 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos\frac{x}{2},\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}),\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}))$，令 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 是否存在实数 $x\in[0,\pi]$，使 $f(x)+f'(x)=0$（其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数）？若存在，则求出 x 的值；若不存在，则证明之.

【解】 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2})+\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1$$

$$=\sin x+\cos x.$$

令 $f(x)+f'(x)=0$，即

$f(x)+f'(x)=\sin x+\cos x+\cos x-\sin x=2\cos x=0.$

可得 $x=\frac{\pi}{2}$，所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)+f'(x)=0$. 但此时 $\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ 无意义，故不存在满足条件的实数 x.

【解后感言】 这里是先直接化简 $f(x)$，再探求 $f(x)+f'(x)=0$ 的解. 对于本题解后回头看十分重要，否则误认为 $x=\frac{\pi}{2}$ 为所求，掉入命题者所设的陷阱.

二、观察推测

解题秘言：这种方法就是对命题中给出的几个具体关系式进行观察，分析，从中发现和猜测出一般规律，然后进行证明. 即“观察——猜想——证明”.

例1 (2006 年全国高考Ⅱ理 · T22) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$. 有一根为 S_n-1，$n=1,2,3,\cdots$.

(Ⅰ)求 a_1,a_2；

(Ⅱ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】 (Ⅰ)当 $n=1$ 时，$x^2-a_1x-a_1=0$，有一根为 $S_1-1=a_1-1$，

于是 $(a_1-1)^2-a_1(a_1-1)-a_1=0$，解得 $a_1=\frac{1}{2}$.

当 $n=2$ 时，$x^2-a_2x-a_2=0$. 有一根为 $S_2-1=a_2-\frac{1}{2}$，

于是 $(a_2-\frac{1}{2})^2-a_2(a_2-\frac{1}{2})-a_2=0$，解得 $a_2=\frac{1}{6}$.

(Ⅱ)由题设$(S_n-1)^2-a_n(S_n-1)-a_n=0$，

即 $S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，代入上式得

$S_{n-1}S_n-2S_n+1=0$. ①

由(Ⅰ)知 $S_1=a_1=\frac{1}{2}$，

$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

由①可得 $S_3=\frac{3}{4}$.

由此猜想：$S_n=\frac{n}{n+1}$，$n=1,2,3,\cdots$.

下面用数学归纳法证明这个结论.

(ⅰ)$n=1$ 时已知结论成立.

(ⅱ)假设 $n=k$ 时结论成立，即 $S_k=\frac{k}{k+1}$，

当 $n=k+1$ 时，由①得 $S_{k+1}=\frac{1}{2-S_k}$，

即 $S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$，

故 $n=k+1$ 时结论也成立.

综上，由(ⅰ)、(ⅱ)可知 $S_n=\frac{n}{n+1}$ 对所有正整数 n 都成立.

于是当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$，

又 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$，

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，$n=1,2,3,\cdots$.

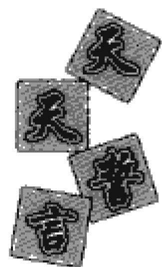
【解后感言】 本例中的推测猜想并不困难，证明也不复杂，其中用数学归纳法来证明这类问题是常用方法.

例2 已知点的序列 $A_n(x_n,0)$，$n\in\mathbf{N}^*$，其中 $x_1=0$，$x_2=a(a>0)$，A_3 是线段 A_1A_2 的中点，A_4 是线段 A_2A_3 的中点，…，A_n 是线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点，….

(Ⅰ)写出 x_n 与 x_{n-1}，x_{n-2}之间的关系式；

(Ⅱ)设 $a_n=x_{n+1}-x_n$，计算 a_1,a_2,a_3，由此推测数列$\{a_n\}$的通项公式，并加以证明.

(Ⅲ)求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.



【解】 (Ⅰ)$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})(n\geqslant 3)$.

(Ⅱ)$a_1=x_2-x_1=a-0=a$;

$a_2=x_3-x_2=\frac{1}{2}(x_2+x_1)-x_2=\frac{x_1-x_2}{2}=-\frac{a}{2}$;

$a_3=x_4-x_3=\frac{1}{2}(x_3+x_2)-x_3=\frac{x_2-x_3}{2}=\frac{a}{4}$.

由此推测 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a\quad(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明如下：

$$\because\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

$$=\frac{x_n-x_{n+1}}{2(x_{n+1}-x_n)}=-\frac{1}{2}\text{(常数)},$$

又$\because a_1=a$，　$\therefore\{a_n\}$是以 a 为首项，$\left(-\frac{1}{2}\right)$为公比的等比数列.

$$\therefore a_n=a_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a(n\in\mathbf{N}^*).$$

(Ⅲ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)+x_1]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1)+x_1]$

$=\frac{a}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+0=\frac{2}{3}a$.

【解后感言】 本题(Ⅱ)也可用数学归纳法来证明，请读者试自证之.

三、特值探求

解题秘言：特值探求法是对题设条件取某些特殊值，然后探求出结论或满足结论所需要的某些条件，并予以证明.

例1 已知 $f(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)$，其中 α,β 为参数，$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi$，是否存在这样的 α,β，使 $f(\theta)$是与 θ 无关的定值？

【解】 假设存在这样的 α,β，使 $f(\theta)$是与 θ 无关的值，为探求 α,β 的值，取 θ 分别为 $0,\frac{\pi}{2},-\alpha,-\beta$，有

$f(0)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$　　①

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3-\sin^2\alpha-\sin^2\beta$　　②

$f(-\alpha)=\sin^2\alpha+\sin^2(\beta-\alpha)$ ③

$f(-\beta)=\sin^2\beta+\sin^2(\alpha-\beta)$ ④

因为 $f(\theta)$ 与 θ 无关,所以

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(-\alpha)=f(-\beta)$$

由③,④得 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$,代入①②得 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\frac{3}{4}$,

再由①③得 $\sin^2(\beta-\alpha)=\sin^2\beta=\frac{3}{4}$.

即 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2(\beta-\alpha)=\frac{3}{4}$.

而 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi$,则 $0<\beta-\alpha\leqslant\pi$,故

$\sin\alpha>0,\sin\beta>0,\sin(\beta-\alpha)>0$

所以 $\sin\alpha=\sin\beta=\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解得 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3}$,代入 $f(\theta)$ 验证有

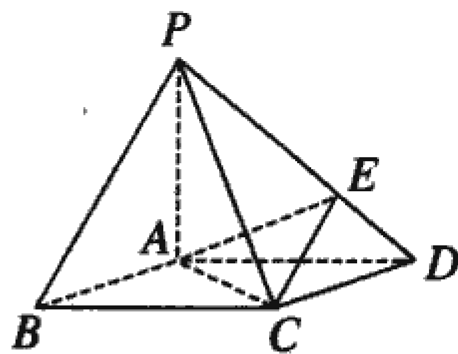
$$f(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{3}{2}\cos^2\theta=\frac{3}{2}$$

故当 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3}$ 时,$f(\theta)$ 是与 θ 无关的定值,定值为 $\frac{3}{2}$.

【解后感言】 这里是利用 $f(\theta)$ 与 θ 无关,故对 θ 赋以特值,从而探求出 α,β 的值和 $f(\theta)$ 的定值.

例2 如图,在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中,$\angle ABC=60°$,$PA=AC=a$,$PB=PD=\sqrt{2}a$,点 E 在 PD 上,且 $PE:ED=2:1$.



(Ⅰ)证明:$PA\perp$ 平面 $ABCD$;

(Ⅱ)求以 AC 为棱,EAC 与 DAC 为面的二面角 θ 的大小;

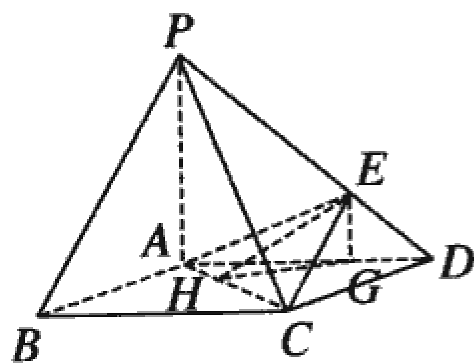
(Ⅲ)在棱 PC 上是否存在一点 F,使 $BF//$ 平面 AEC? 证明你的结论.

(Ⅰ)**【证明】** ∵底面 $ABCD$ 是菱形,$\angle ABC=60°$,

∴$AB=AD=AC=a$.

在△PAB 中,由 $PA^2+AB^2=2a^2=PB^2$ 知 $PA\perp AB$.

同理,$PA\perp AD$. ∴$PA\perp$ 平面 $ABCD$.



(Ⅱ)【解】 如图,作 $EG /\!/ PA$ 交 AD 于 G,由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ 知 $BG\perp$ 平面 $ABCD$.

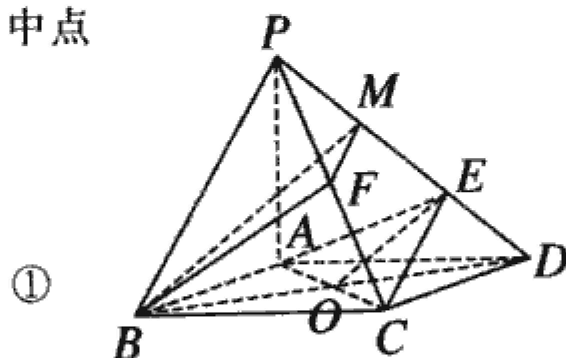
作 $GH\perp AC$ 于 H,连结 EH,则 $EH\perp AC$.

$\therefore \angle EHG$ 为二面角 θ 的平面角.

又 $PE:ED=2:1$,

$\therefore EG=\frac{1}{3}a, AG=\frac{2}{3}a, GH=AG\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,

从而 $\tan\theta=\frac{EG}{GH}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \theta=30^\circ$.



(Ⅲ)【解】 观察图形可知,当 F 是棱 PC 的中点时,$BF /\!/$ 平面 AEC.

证明如下:

如图,取 PE 的中点 M,连结 FM,则 $FM /\!/ CE$. ①

由 $EM=\frac{1}{2}PE=ED$ 知 E 是 MD 的中点.

连结 BM,BD,设 $BD\cap AC=O$,则 O 为 BD 的中点,连结 OE.

$\therefore BM /\!/ OE$. ②

由①,②知,平面 $BFM /\!/$ 平面 AEC.

又 $BF\subsetneq$ 平面 BFM,

$\therefore BF /\!/$ 平面 AEC.

【解后感言】 本例第(Ⅲ)问探求的点为 PC 的中点满足条件,在几何问题中探求某些符合条件的点时,应注意中点、三等分点、垂足或角平分线上的点等特殊点.

四、类比联想

解题秘言:对有些探究性问题,常需进行观察、类比、分析、联想,或构造数学模型,或将问题从低维推广到高维,最终给出具体答案或得出新的结论.

例1 已知 λ 为非零常数,$x\in\mathbf{R}$,且

$$f(x+\lambda)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

问 $f(x)$是否是周期函数?若是,求出它的一个周期,若不是,请说明理由.

【思路探索】 由于探求的是周期函数问题,容易联想到三角函数,又 $f(x+\lambda)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 的结构形式极易与 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ 进行类比,故可把 $\tan x$ 看成是 $f(x)$ 的一个原型实例,且题中的 λ 相当于实例中的 $\frac{\pi}{4}$,由于周期函数 $\tan x$ 的周期 $T=\pi=4\cdot\frac{\pi}{4}$,故可猜想 $f(x)$ 也为周期函数,且周期为 4λ.

【解】 $\because f(x+4\lambda)=f[(x+3\lambda)+\lambda]=\dfrac{1+f(x+3\lambda)}{1-f(x+3\lambda)}$

$$=\frac{1+\dfrac{1+f(x+2\lambda)}{1-f(x+2\lambda)}}{1-\dfrac{1+f(x+2\lambda)}{1-f(x+2\lambda)}}$$

$$=\frac{2}{-2f(x+2\lambda)}$$

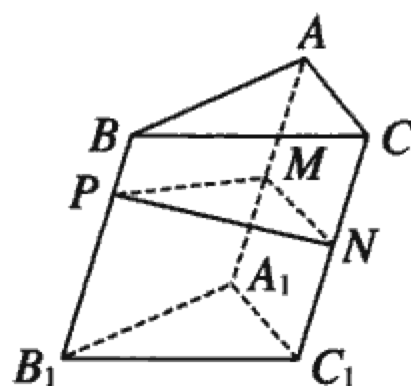
$$=-\frac{1-f(x+\lambda)}{1+f(x+\lambda)}=-\frac{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}$$

$$=-\frac{-2f(x)}{2}=f(x)$$

$\therefore f(x)$是以 4λ 为周期的周期函数.

【解后感言】 这里是类比熟悉的三角公式,联想到 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$是问题的原型实例,进而探求出其所求的周期.

例 2 如图,点 P 为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 BB_1 上一点,$PM\perp BB_1$ 交 AA_1 于点 M,$PN\perp BB_1$ 交 CC_1 于点 N.



(Ⅰ)证明:$CC_1\perp MN$;

(Ⅱ)在任意$\triangle DEF$ 中有余弦定理;

$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cdot\cos\angle DFE$.

拓展到空间,类比三角形的余弦定理,写出斜三棱柱的三个侧面面积与其中两个侧面所成的二面角之间的关系式,并予以证明.

【证明】 (Ⅰ)$\because CC_1/\!/BB_1$,

$\therefore CC_1\perp PM$,$CC_1\perp PN$,且 PM,PN 相交于点 P.

$\therefore CC_1\perp$平面 PMN.

又$\because MN\subsetneqq$平面 PMN, $\therefore CC_1\perp MN$.

(Ⅱ)在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,有

$S^2_{ABB_1A_1}=S^2_{BCC_1B_1}+S^2_{ACC_1A_1}-2S_{BCC_1B_1}S_{ACC_1A_1}\cdot\cos\alpha$,

其中 α 为平面 BCC_1B_1 与平面 ACC_1A_1 所组成的二面角.

$\because CC_1\perp$平面 PMN,

$\therefore$平面 CC_1B_1B 与平面 CC_1A_1A 所组成的二面角为$\angle MNP$.

在$\triangle PMN$ 中,$PM^2=PN^2+MN^2-2PN\cdot MN\cdot\cos\angle MNP$. ①

由① $\cdot\, CC_1^2$ 得

$PM^2\cdot CC_1^2=PN^2\cdot CC_1^2+MN^2\cdot CC_1^2-2(PN\cdot CC_1)\cdot(MN\cdot CC_1)\cos\angle MNP$.

又 $S_{BCC_1B_1}=PN\cdot CC_1$，$S_{ACC_1A_1}=MN\cdot CC_1$，

$S_{ABB_1A_1}=PM\cdot BB_1$，$CC_1=BB_1$，

$\therefore S^2_{ABB_1A_1}=S^2_{BCC_1B_1}+S^2_{ACC_1A_1}-2S_{BCC_1B_1}\cdot S_{ACC_1A_1}\cdot\cos\alpha$.

【解后感言】 题目中只要求类比二维三角形中的余弦定理，但拓展到三维空间是什么结论不清楚，这就需要发挥潜能.好在试题中已指出是三个侧面面积之间的关系式，故①式乘以侧棱是合情合理的了.

五、分类讨论

解题秘言：由于在探究的过程中，情况往往不明显，需要从各种情况去进行分析考虑，因此，常用分类讨论的方法去进行探究或排除.

例1 (2007年湖南高考理·T20)已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的左、右焦点分别在 F_1、F_2，过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A、B 两点.

(1)若动点 M 满足$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$(其中 O 为坐标原点)，求点 M 的轨迹方程；

(2)在 x 轴上是否存在定点 C，使$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$为常数？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由.

【规范解析】 由条件知 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(1)设 $M(x,y)$，则 $\overrightarrow{F_1M}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{F_1A}=(x_1+2,y_1)$，$\overrightarrow{F_1B}=(x_2+2,y_2)$，$\overrightarrow{F_1O}=(2,0)$.

由$\overrightarrow{F_2M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$，

得$\begin{cases}x+2=x_1+x_2+6,\\ y=y_1+y_2,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1+x_2=x-4,\\ y_1+y_2=y.\end{cases}$

于是 AB 的中点坐标为$(\frac{x-4}{2},\frac{y}{2})$.

当 AB 不与 x 轴垂直时，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{y}{2}}{\frac{x-4}{2}-2}=\frac{y}{x-8}$，

即 $y_1-y_2=\frac{y}{x-8}(x_1-x_2)$.

因为 A、B 两点在双曲线上，所以 ${x_1}^2-{y_1}^2=2$，${x_2}^2-{y_2}^2=2$，两式相减，得 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$，即$(x_1-x_2)(x-4)=(y_1-y_2)y$.

将 $y_1-y_2=\frac{y}{x-8}(x_1-x_2)$代入上式，化简，得$(x-6)^2-y^2=4$.

当 AB 与 x 轴垂直时，$x_1=x_2=2$，求得 $M(8,0)$，也满足上述方程.

故点 M 的轨迹方程是 $(x-6)^2-y^2=4$.

(2)假设在 x 轴上存在定点 $C(m,0)$，使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数.

当 AB 不与 x 轴垂直时，设直线 AB 的方程是 $y=k(x-2)(k\neq\pm1)$.

代入 $x^2-y^2=2$ 有 $(1-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+2)=0$.

则 x_1、x_2 是上述方程的两个实根，所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-1}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2+2}{k^2-1}$.

于是 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1-2)(x_2-2)$

$=(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+m)(x_1+x_2)+4k^2+m^2$

$=\dfrac{(k^2+1)(4k^2+2)}{k^2-1}-\dfrac{4k^2(2k^2+m)}{k^2-1}+4k^2+m^2$

$=\dfrac{2(1-2m)k^2+2}{k^2-1}+m^2=2(1-2m)+\dfrac{4-4m}{k^2-1}+m^2$.

因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 是与 k 无关的常数，所以 $4-4m=0$，即 $m=1$.

此时 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-1$.

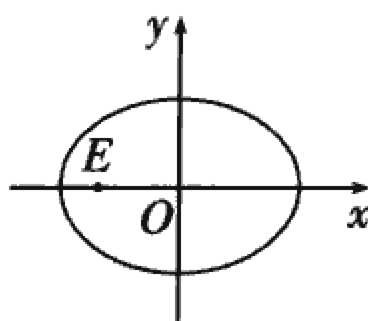
当 AB 与 x 轴垂直时，点 A、B 的坐标可分别设为 $(2,\sqrt{2})$、$(2,-\sqrt{2})$，

此时 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{2})\cdot(1,-\sqrt{2})=-1$.

故在 x 轴上存在定点 $C(1,0)$，使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数.

【解后感言】 由于探求直线的存在性，依斜率存在与否，需要分 AB 与 x 轴垂直与不垂直两种情况进行讨论.

例 2 已知方向向量为 $\boldsymbol{v}=(1,\sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0,-2\sqrt{3})$ 和椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点，且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.



（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）是否存在过点 $E(-2,0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M，N，满足 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON\neq0$（$O$ 为原点）.

若存在，求直线 m 的方程；若不存在，请说明理由.

（Ⅰ）**解法一** 直线 l：$y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ ①

过原点垂直于 l 的直线方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ ②

解①②得 $x=\dfrac{3}{2}$.

∵椭圆中心 $O(0,0)$ 关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上，

∴$\dfrac{a^2}{c}=2\times\dfrac{3}{2}=3$.

∵直线 l 过椭圆焦点，

∴该焦点坐标为(2,0).

∴$c=2,a^2=6,b^2=2$.

故椭圆的 C 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ ③

解法二 直线 $l:y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$.

设原点关于直线 l 的对称点为(p,q)，则

$$\begin{cases}\frac{q}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{p}{2}-2\sqrt{3},\\ \sqrt{3}\cdot\frac{q}{p}=-1.\end{cases}$$ 解得 $p=3$.

∵椭圆中心 $O(0,0)$关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上，

∴$\frac{a^2}{c}=3$.

∵直线 l 过椭圆焦点.

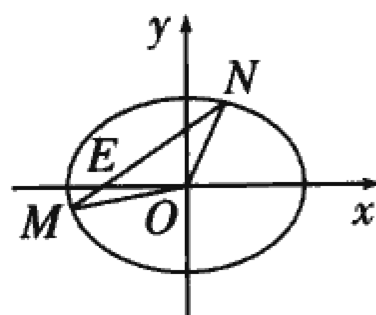
∴该焦点坐标为(2,0).

∴$c=2,a^2=6,b^2=2$.

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

(Ⅱ)**解法一** 假设这样的直线 m 存在.设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

当直线 m 不垂直于 x 轴时，如图所示，直线 $m:y=k(x+2)$代入③，整理得



$(3k^2+1)x^2+12k^2x,+12k^2-6=0$.

∴$x_1+x_2=-\frac{12k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{12k^2-6}{3k^2+1}$，

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(-\frac{12k^2}{3k^2+1}\right)^2-4\cdot\frac{12k^2-6}{3k^2+1}}$

$=\frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1}$.

点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}$.

∵$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON$，即

$|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\cos\angle MON=\frac{4}{3}\sqrt{6}\frac{\cos\angle MON}{\sin\angle MON}\neq0$，

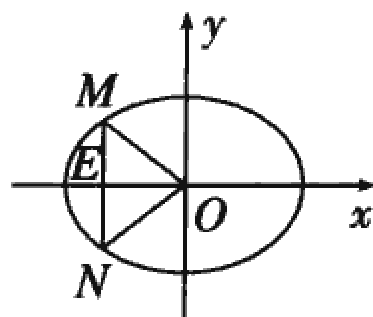
∴$|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\sin\angle MON=\frac{4}{3}\sqrt{6}$，

$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

$\therefore |MN|\cdot d=\frac{4}{3}\sqrt{6}$,

即 $4\sqrt{6}|k|\sqrt{k^2+1}=\frac{4}{3}\sqrt{6}(3k^2+1)$.

整理得 $k^2=\frac{1}{3}$，$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.



当直线 m 垂直于 x 轴时，如图所示，由 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{4}{3}\cot\angle MON\neq 0$ 仍可得到 $S_{\triangle OMN}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

故直线 m 的方程为

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $x=-2$.

经检验，上述直线均满足 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\neq 0$.

所以所求直线方程为

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $x=-2$.

解法二　假设这样的直线 m 存在. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

当直线 m 不垂直于 x 轴时，将直线 m：$y=k(x+2)$，代入③，整理得

$(3k^2+1)x^2+12k^2x+12k^2-6=0$.

$\therefore x_1+x_2=-\frac{12k^2}{3k^2+1}$,

$\because E(-2,0)$ 是椭圆 C 的左焦点，

$\therefore |MN|=|ME|+|NE|$

$=e\left(\frac{a^2}{c}+x_1\right)+e\left(\frac{a^2}{c}+x_2\right)=\frac{c}{a}(x_1+x_2)+2a$

$=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\left(-\frac{12k^2}{3k^2+1}\right)+2\sqrt{6}=\frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$.

以下与解法一相同.

解法三　假设这样的直线 m 存在. 且设其方程为 $x=ty-2$. 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

将直线方程代入③，整理得　$(t^2+3)y^2-4ty-2=0$.

$\therefore y_1+y_2=\frac{4t}{t^2+3}$，$y_1y_2=\frac{-2}{t^2+3}$,

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{\left(\frac{4t}{t^2+3}\right)^2+\frac{8}{t^2+3}}$

$=\sqrt{\frac{24t^2+24}{(t^2+3)^2}}$.

$\because \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\frac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON$，即

$|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\cos\angle MON=\frac{4}{3}\sqrt{6}\frac{\cos\angle MON}{\sin\angle MON}\neq 0$，

$\therefore |\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\sin\angle MON=\frac{4}{3}\sqrt{6}$，

$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

而 $S_{\triangle OMN}=S_{\triangle OEM}+S_{\triangle OEN}=\frac{1}{2}|OE|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{\frac{24t^2+24}{(t^2+3)^2}}$.

$\therefore\sqrt{\frac{24t^2+24}{(t^2+3)^2}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$，　　整理得 $t^4=3t^2$.

解得 $t=\pm\sqrt{3}$，或 $t=0$.

故直线 m 的方程为

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $x=-2$.

经检验，上述直线均满足 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\neq 0$.

所以所求直线方程为

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，或 $x=-2$.

【解后感言】 解法一、解法二分 MN 与 x 轴垂直与不垂直两种情况进行讨论，而解法三设参数时，将斜率 k 的倒数设为参数 t，有效回避了分类讨论. 这是回避斜率 k 不存在的一种方法技巧.

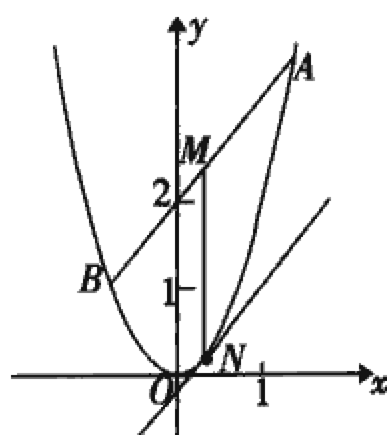
六、逆推反证

解题秘言：对"是否"、"能否"、"试判断"等类型的探究性问题，常是假设，题断的结论成立，进行逆推，找出结论成立需要的某些条件，或推出予盾否定结论. 有时，当问题正面推进难以成功时，则从反面入手，即常说的正难则反的思维方式.

例 1 (2008 年陕西高考理 · T20)已知抛物线 C：$y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A、B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N.

(Ⅰ)证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

(Ⅱ)是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.



【规范解析】 (Ⅰ)如图,设 $A(x_1,2x_1^2)$,$B(x_2,2x_2^2)$,

把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得 $2x^2-kx-2=0$,

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$,$x_1x_2=-1$,

$\therefore x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$,

$\therefore N$ 点的坐标为 $\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$.

设抛物线在点 N 处的切线 l 的方程为 $y-\frac{k^2}{8}=m\left(x-\frac{k}{4}\right)$.

将 $y=2x^2$ 代入上式得 $2x^2-mx+\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}=0$,

$\because$ 直线 l 与抛物线 C 相切,

$\therefore \Delta=m^2-8\left(\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}\right)=m^2-2mk+k^2=(m-k)^2=0$,

$\therefore m=k$,即 $l /\!/ AB$.

(Ⅱ)解法一:假设存在实数 k,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$,则 $NA\perp NB$,

又 $\because M$ 是 AB 的中点,$\therefore |MN|=\frac{1}{2}|AB|$.

由(Ⅰ)知 $y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)$

$=\frac{1}{2}[k(x_1+x_2)+4]=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2}+4\right)=\frac{k^2}{4}+2$.

$\because MN\perp x$ 轴,$\therefore |MN|=|y_M-y_N|=\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}=\frac{k^2+16}{8}$.

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{k}{2})^2-4\times(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$.

$\therefore \frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$,

解得 $k=\pm2$.

即存在 $k=\pm2$,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

解法二:证明:(1)如图,设 $A(x_1,2{x_1}^2)$,$B(x_2,2{x_2}^2)$,把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得 $2x^2-kx-2=0$,

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$,$x_1x_2=-1$,

$\therefore x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$.

$\therefore N$ 点的坐标为 $\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$.

$\therefore y=2x^2$，$\therefore y'=4x$.

$\therefore$抛物线在点 N 处的切线 l 的斜率为 $4\times\frac{k}{4}=k$，

$\therefore l/\!/AB$.

(2)假设存在实数 k，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，

由(1)知 $\overrightarrow{NA}=\left(x_1-\frac{k}{4},2x_1{}^2-\frac{k^2}{8}\right)$，$\overrightarrow{NB}=\left(x_2-\frac{k}{4},2x_2{}^2-\frac{k^2}{8}\right)$，则

$$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)+\left(2x_1{}^2-\frac{k^2}{8}\right)\left(2x_2{}^2-\frac{k^2}{8}\right)$$

$$=\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)+4\left(x_1{}^2-\frac{k^2}{16}\right)\left(x_2{}^2-\frac{k^2}{16}\right)$$

$$=\left(x_1-\frac{k}{4}\right)\left(x_2-\frac{k}{4}\right)\cdot\left[1+4\left(x_1+\frac{k}{4}\right)\left(x_2+\frac{k}{4}\right)\right]$$

$$=\left[x_1x_2-\frac{k}{4}(x_1+x_2)+\frac{k^2}{16}\right]\cdot\left[1+4x_1x_2+k(x_1+x_2)+\frac{k^2}{4}\right]$$

$$=\left(-1-\frac{k}{4}\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{16}\right)\cdot\left[1+4\times(-1)+k\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{4}\right]$$

$$=\left(-1-\frac{k^2}{16}\right)\left(-3+\frac{3}{4}k^2\right)=0,$$

$\because -1-\frac{k^2}{16}<0$，

$\therefore -3+\frac{3}{4}k^2=0$，解得 $k=\pm2$.

即存在 $k=\pm2$，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

例2 已知 $f(x)=\frac{2x-a}{x^2+2}(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(Ⅰ)求实数 a 的值所组成的集合 A；

(Ⅱ)设关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的两根为 x_1,x_2. 试问：是否存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

【解】 (Ⅰ) $f'(x)=\frac{4+2ax-2x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-ax-2)}{(x^2+2)^2}$.

$\because f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，

$\therefore f'(x)\geqslant0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即

$x^2-ax-2\leqslant0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立. ①

设 $\varphi(x)=x^2-ax-2$.

(方法一) ①$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant0\end{cases}\Leftrightarrow-1\leqslant a\leqslant1$.

$\because$ 对 $x\in[-1,1]$，$f(x)$ 是连续函数，

$\therefore A=\{a|-1\leqslant a\leqslant1\}$.

（方法二）

$①\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{a}{2}<0\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a<0$

$\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$.

∵对 $x\in[-1,1]$，$f(x)$是连续函数，

∴$A=\{a|-1\leqslant a\leqslant 1\}$.

（Ⅱ）由$\frac{2x-a}{x^2+2}=\frac{1}{x}$，得 $x^2-ax-2=0$.

∵$\Delta=a^2+8>0$，

∴x_1,x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两不等实根.

∴$\begin{cases}x_1+x_2=a\\ x_1x_2=-2\end{cases}$

从而$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+8}$

∵$-1\leqslant a\leqslant 1$，　　∴$|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$.

要使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立，当且仅当 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 对任意 $t\in[-1,1]$恒成立，即

$m^2+tm-2\geqslant 0$ 对任意 $t\in[-1,1]$恒成立.　　②

设 $g(t)=m^2+tm-2=mt+(m^2-2)$

（方法一）　$②\Leftrightarrow\begin{cases}g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0,\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$.

∴存在实数 m，使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立，其取值范围是$\{m|m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2\}$.

（方法二）　当 $m=0$ 时，②显然不成立；

当 $m\neq 0$ 时，

$②\Leftrightarrow\begin{cases}m>0,\\ g(-1)=m^2-m-2\geqslant 0\end{cases}$

或$\begin{cases}m<0,\\ g(1)=m^2+m-2\geqslant 0.\end{cases}$

$\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$.

∴存在实数 m，使不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立，其取值范围是$\{m|m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2\}$.

【解后感言】 这里就是从假设不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$恒成立出发进行逆推.

天天学言

七、实验归纳

解题秘言:对于有些探究题,其变化趋势一时无法探究得清楚,我们可以通过题设条件进行若干数据实验,然后进行分析、判断,或用不完全归纳法作出某种猜测,最后予以证明你猜测结论的正确性.

这种方法与前面的观察推测有某种类似之处,但较之那里的探究层次要高,且多不是简单的观测就能猜测出结论,这里的结论的猜测多需要进行更深层次的数据探测实验方能有所眉目.

例1 (2007年湖南高考理·T15)将杨辉三角中的奇数换成1,偶数换成0,得到如下图所示的0—1三角数表.从上往下数,第1次全行的数都为1的是第1行,第2次全行的数都为1的是第3行,…第n次全行的数都为1的是第________行;第61行中1的个数是________.

第1行　　1　1

第2行　　1　0　1

第3行　　1　1　1　1

第4行　　1　0　0　0　1

第5行　　1　1　0　0　1　1

…　　……　……　……

【规范解析】 由杨辉三角可知:

第1次　　全是1　　第1行

第2次　　全是1　　第3行

第3次　　全是1　　第7行

可猜第n次全是1是2^n-1行.

当$n=6$时,即第6次出现全是1是第63行.

可知第62行必是1个1,1个0交替出现,

则第61行必是2个1,2个0交替出现.即

第61行　1　1　0　0　1　1　0　0　…

第62行　1　0　1　0　1　0　1　0　1　…

第63行　1　1　1　1　1　1　1　1　1　1　…

第61行共62个数.

杨辉三角首尾两端必是1.

则第61行中0的个数是$\frac{62-2}{2}=30$.

因此1的个数是$62-30=32$.

【答案】 2^n-1;32

例2 设$\{a_n\}$是集合$\{2^t+2^s|0\leqslant s<t$，且$s,t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排列成的数列，即$a_1=3,a_2=5,a_3=6,a_4=9,a_5=10,a_6=12,\cdots$.

将数列$\{a_n\}$各项按上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

3

5 6

9 10 12

— — — —

— — — — —

(Ⅰ)写出这个三角形数表的第四行，第五行各数；

(Ⅱ)求a_{100}.

【思路探索】 为了探讨数列各项的规律，首先我们依照$\{a_n\}$的定义，来研究一下三角形数表各项是怎样得来的.

令 $s=0,t=1$ 得 $a_1=2^0+2^1=3$，

$s=0,t=2$ 得 $a_2=2^0+2^2=5$，

$s=1,t=2$ 得 $a_3=2^1+2^2=6$，

$s=0,t=3$ 得 $a_4=2^0+2^3=9$，

$s=1,t=3$ 得 $a_5=2^1+2^3=10$，

$s=2,t=3$ 得 $a_6=2^2+2^3=12$，

$s=0,t=4$ 得 $a_7=2^0+2^4=17$，

$s=1,t=4$ 得 $a_8=2^1+2^4=18$，

$s=2,t=4$ 得 $a_9=2^2+2^4=20$，

$s=3,t=4$ 得 $a_{10}=2^3+2^4=24$，

…… ……

因此，我们就清楚了三角形数表中各行数据的来龙去脉了.

【解】 (Ⅰ)第四行中的4个数(令$t=4,s=0,1,2,3$)为：

17,18,20,24.

第五行中的5个数($t=5,s=0,1,2,3,4$)为：

33,34,36,40,48

(Ⅱ)依上我们已知道数列$\{a_n\}$的呈现规律.

设a_{100}为第七行的某一个数，则三角形数表中从第1行到第$t-1$行中已有的项数为

$$1+2+3+\cdots+(t-1)=\frac{1}{2}t(t-1).$$

满足$\frac{1}{2}t(t-1)<100$的最大整数$t=14$，即前13行中已有$\frac{1}{2}\times14\times13=91$项.于是$a_{100}$处在第14行的第9个元素.即$s=8,t=14$.

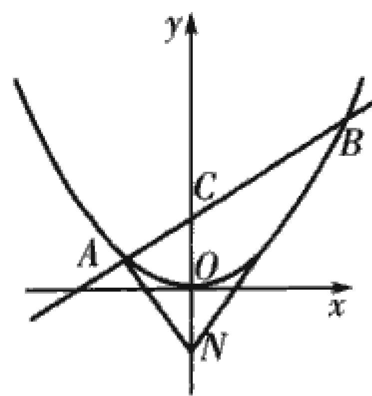
故$a_{100}=2^8+2^{14}=16640$.



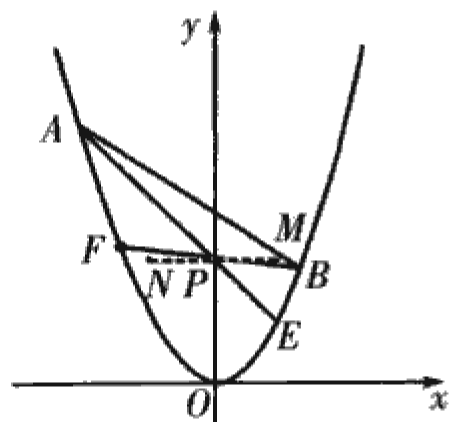
【解后感言】 这是一道仅需要用到高一集合的概念和简单数列的基本知识就可以解决的高考压轴题.其中数据的实验归纳充分体现了"做数学"味道,是一道值得回味的高考探究性试题.

实战秘修十九

1. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.若$a>b>c$且 $f(1)=0$,是否存在实数 m,使得当 $f(m)=-a$ 成立时,
   $f(m+3)$为正数?若存在,证明你的结论;若不存在,请说明理由.
2. 设 a_n 为函数 $f_n(x)=(1+2x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdot\cdots\cdot(1+2^nx)$展开式中 x^2 的系数,问是否存在常数 a,b,使对于不小于 2 的任何自然数 n 都有
   $$a_n=\frac{8}{3}(2^{n-1}-1)\cdot(a\cdot 2^n+b)$$
   成立?证明你的结论.
3. 侧棱长为 a 的正四棱锥是否存在体积的最大值?如果存在,求出这个值;如果不存在,说明理由.
4. (2007 海南、宁夏,理 19)在平面直角坐标系 xOy 中,经过点$(0,\sqrt{2})$且斜率为 k 的直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 有两个不同的交点 P 和 Q.
   (1)求 k 的取值范围.
   (2)设椭圆与 x 轴正半轴、y 轴正半轴的交点分别为 A、B,是否存在常数 k,使得向量$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$与$\overrightarrow{AB}$共线?如果存在,求 k 值;如果不存在,请说明理由.
5. (2007 湖北,理 19 文 21)如右图,在平面直角坐标系 xOy 中,过定点 $C(0,p)$作直线与抛物线 $x^2=2py(p>0)$相交于 A、B 两点.
   (1)若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点,求$\triangle ANB$面积的最小值.
   (2)是否存在垂直于 y 轴的直线 l,使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值?若存在,求出 l 的方程;若不存在,请说明理由.



6. (2008 年江西高考文 · T22)已知抛物线 $y=x^2$ 和三个点 $M(x_0,y_0)$、$P(0,y_0)$、$N(-x_0,y_0)$($y_0\neq x_0^2$, $y_0>0$),过点 M 的一条直线交抛物线于 A、B 两点,AP、BP 的延长线分别交抛物线于点 E、F.
   (1)证明 E、F、N 三点共线;
   (2)如果 A、B、M、N 四点共线,问:是否存在 y_0,使以线段 AB 为直径的圆与抛物线有异于 A、B 的交点?如果存在,求出 y_0 的取值范围,并求出该交点到直线 AB 的距离;若不存在,请说明理由.

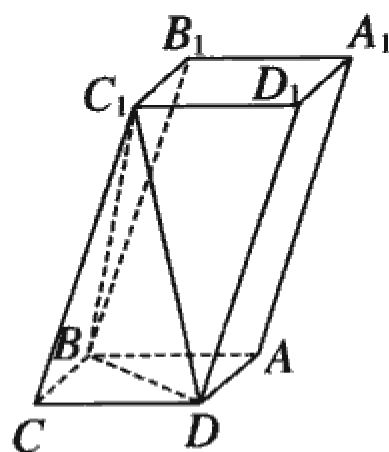


7.(2008年辽宁高考理·T22)设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$.

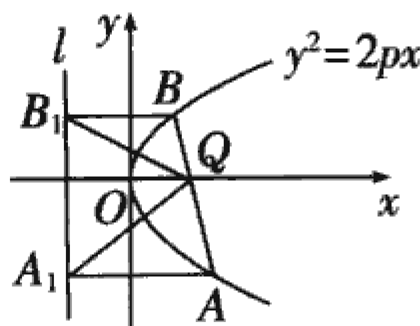
(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(Ⅱ)是否存在实数 a,使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$? 若存在,求 a 的取值范围;若不存在,试说明理由.

8. 如右图,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$. 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时,能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 并给出证明.



9. 如下图,已知 AB 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的一条动弦,且弦 AB 与 x 轴交于点 Q,l 是抛物线的准线,$AA_1\perp l$ 于 A_1,$BB_1\perp l$ 于 B_1,试求 $A_1Q\perp B_1Q$ 的一个充要条件.



10. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2、公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,S_n 是它的前 n 项和. 问是否存在正整数 c 和 k,使得 $\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$ 成立?

11. 已知函数 $f(x)=a\cdot b^x$ 的图象过点 $A\left(4,\frac{1}{4}\right)$ 和点 $B(5,1)$. 记 $a_n=\log_2 f(n)$,S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1)解关于正整数 n 的不等式 $a_nS_n\leqslant 0$;

(2)整数 10^4 是否为数列 $\{a_nS_n\}$ 中的项? 若是,则求出相应的项数;若不是,则说明理由.

12. 直线 $l:y=kx+1$ 与双曲线 $C:2x^2-y^2=1$ 的右支交于不同的两点 A,B.

(1)求实数 k 的取值范围；

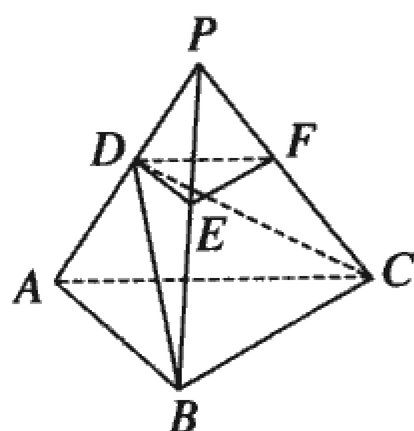
(2)是否存在实数 k,使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F? 若存在,求出 k 的值,若不存在,说明理由.

13. 设 A,B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点,点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点,线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C,D 两点.

(1)确定 λ 的取值范围,并求直线 AB 的方程；

(2)试判断是否存在这样的 λ,使得 A,B,C,D 四点在同一个圆上? 并说明理由.

14. 如右图，$P-ABC$ 是底面边长为 1 的正三棱锥，D,E,F 分别为棱 PA,PB,PC 上的点，截面 DEF // 底面 ABC，且棱台 $DEF-ABC$ 与棱锥 $P-ABC$ 的棱长和相等（棱长和是指多面体中所有棱的长度之和）.



(1)证明：$P-ABC$ 为正四面体；

(2)若 $PD=\frac{1}{2}PA$，求二面角 $D-BC-A$ 的大小；（结果用反三角函数值表示）

(3)设棱台 $DEF-ABC$ 的体积为 V，是否存在体积为 V 且各棱长均相等的直平行六面体，使得它与棱台 $DEF-ABC$ 有相同的棱长和？若存在，请具体构造出这样的一个直平行六面体，并给出证明；若不存在，请说明理由.

15.（2007 年江苏，20）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，$a_1=b_1$，$a_2=b_2\neq a_1$. 记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1)若 $b_k=a_m$（m,k 是大于 2 的正整数），求证：$S_{k-1}=(m-1)a_1$.

(2)若 $b_3=a_i$（i 是某个正整数），求证：q 是整数，且数列 $\{b_n\}$ 中的每一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

(3)是否存在这样的正数 q，使等比数列 $\{b_n\}$ 中有三项成等差数列？若存在，写出一个 q 的值，并加以说明；若不存在，请说明理由.

16. 已知定点 $A(-2,-4)$，过点 A 作倾斜角为 $45°$ 的直线 l 交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于 B,C 两点，且 $|AB|,|BC|,|AC|$ 成等比数列.

(1)求抛物线方程；

(2)在(1)中的抛物线上是否存在点 D，使得 $|DB|=|DC|$ 成立？如果存在，求出点 D 的坐标；如果不存在，请说明理由.

17. 已知椭圆 C 的中心在原点，左焦点为 F_1，其右焦点 F_2 和右准线分别是抛物线 $y^2=-9x+36$ 的顶点和准线.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 P 为椭圆 C 上的一个动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，求点 P 横坐标的取值范围；

(3)若以椭圆 C 的焦点为焦点的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 当 $0<e\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，在该椭圆上能否存在点 M，使 $\angle F_1MF_2$ 为钝角？若存在，求出点 M 的坐标；若不可能存在，请说明理由.

18. 已知数列 $a_1,a_2\cdots,a_{30}$，其中 $a_1,a_2\cdots a_{10}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列；$a_{10},a_{11},\cdots,a_{20}$ 是公差为 d 的等差数列；$a_{20},a_{21},\cdots,a_{30}$ 是公差为 d^2 的等差数列（$d\neq0$）.

(1)若 $a_{20}=40$，求 d；

(2)试写出 a_{30} 关于 d 的关系式，并求 a_{30} 的取值范围；

(3)续写已知数列，使得 $a_{30},a_{31},\cdots,a_{40}$ 是公差为 d^3 的等差数列，…，依次类推，把已知数列推广为无穷数列. 提出同(2)类似的问题（(2)应当作为特例），并进行研究，你能得到什么样的结论？

实战秘修十九答案与提示

1. 由 $f(1)=a+b+c=0$ 及 $a>b>c$ 有 $a>0,c>0$.

又 1 是 $f(x)=0$ 的一个根,即 $a+b+c=0$. 记另一个根为 x,则 $x=\frac{c}{a}<0$.

$\because a>b>c,b=-a-c$, $\therefore a>-a-c>c$.

$\therefore -2a<c$,即 $-2<\frac{c}{a}<0$. $\therefore 1<\frac{c}{a}+3<3$.

假设存在实数 m,使 $f(m)=-a$ 成立,则由 $\frac{c}{a}$,1 是 $f(x)$ 的两根有

$$f(x)=a(x-\frac{c}{a})(x-1).$$

$\therefore f(m)=a(m-\frac{c}{a})(m-1)=-a<0$, $\therefore \frac{c}{a}<m<1$.

从而 $\frac{c}{a}+3<m+3$, $\because 1<\frac{c}{a}+3<3$, $\therefore m+3>1$.

又 $f(x)$ 在 $(1,\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(m+3)>f(1)=0$. $\therefore$ 满足条件的实数 m 存在.

2. 假设存在 a,b,则 $f_2(x)=(1+2x)(1+2^2x)=1+6x+8x^2$,$x^2$ 项的系数为 8.

$\therefore a_2=\frac{8}{3}(4a+b)=8$ ①

又 $f_3(x)=3+14x+56x^2+64x^3$ 中 x^2 项系数为 56,

$\therefore a_3=\frac{8}{3}(4-1)(8a+b)=56$ ②

联立①,②得 $a=1,b=-1$,

故猜 $a_n=\frac{8}{3}(2^{n-1}-1)(2^n-1)$

再用数学归纳法证明(注意 $f_k(x)$ 的一次项系数为:

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^k=2(2^k-1)).$$

$\therefore$ 存在 $a=1,b=-1$,对于不小于 2 的任何自然数 n,$a_n=\frac{8}{3}(2^{n-1}-1)(2^n-1)$ 都成立.

3. 设正四棱锥任一侧面的顶角为 $2\theta,\theta\in(\theta,\frac{\pi}{4})$,则正四棱锥底边为 $2a\sin\theta$,侧面上顶点到底边的斜高为 $a\cos\theta$,则

$$h_{锥}=a\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta},V_{锥}=\frac{4}{3}a^3\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}.$$

设 $y=\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$,则

$$y^2=\sin^4\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\leqslant\left[\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{3}\right]^3=\frac{1}{27}.$$

当 $\sin^2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$,即 $\theta=\text{arcot}\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$y_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}$. 此时 $V_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.

4.(1)由已知条件,直线 l 的方程为 $y=kx+\sqrt{2}$,

代入椭圆方程得 $\frac{x^2}{2}+(kx+\sqrt{2})^2=1$.

整理得 $(\frac{1}{2}+k^2)x^2+2\sqrt{2}kx+1=0$. ①

直线 l 与椭圆有两个不同的交点 P 和 Q 等价于

$\Delta=8k^2-4(\frac{1}{2}+k^2)=4k^2-2>0$,

解得 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 k 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$.

(2)设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

则 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.

由方程①,$x_1+x_2=-\frac{4\sqrt{2}k}{1+2k^2}$ ②

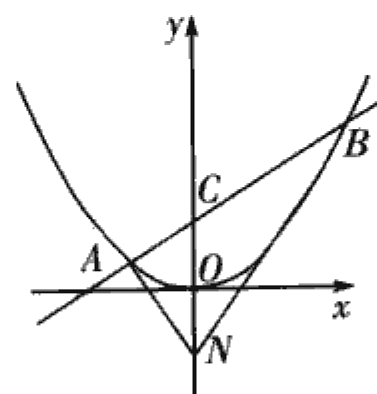
又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2\sqrt{2}$, ③

而 $A(\sqrt{2},0)$,$B(0,1)$,$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},1)$,

所以 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线等价于 $x_1+x_2=-\sqrt{2}(y_1+y_2)$,把②③代入上式,解得 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由(1)知 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$,故没有符合题意的常数 k.

5.**解法一**:(1)如右图,依题意,点 N 的坐标为 $N(0,-p)$,可设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 AB 的方程为 $y=kx+p$,与 $x^2=2py$ 联立得 $\begin{cases}x^2=2py,\\ y=kx+p.\end{cases}$ 消去 y,得 $x^2-2pkx-2p^2=0$,



由韦达定理,得 $x_1+x_2=2pk$,$x_1x_2=-2p^2$.

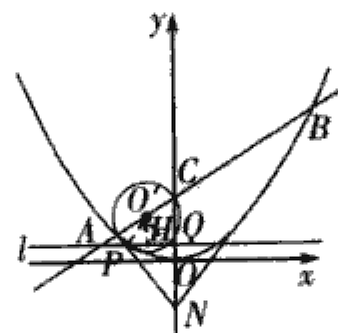
于是 $S_{\triangle ABN}=S_{\triangle BCN}+S_{\triangle ACN}=\frac{1}{2}\cdot 2p|x_1-x_2|$

$=p|x_1-x_2|=p\sqrt{(x_1+x_2)^2+4x_1x_2}$

$=p\sqrt{4p^2k^2+8p^2}=2p^2\sqrt{k^2+2}$,

$\therefore$ 当 $k=0$ 时,$(S_{\triangle ABN})_{\min}=2\sqrt{2}p^2$.

(2)如图,假设满足条件的直线 l 存在,其方程 $y=a$,AC 的中点为 O',l 与 AC 为直径的圆相交于点 P、Q,PQ 的中点为 H,则 $O'H\perp PQ$,O' 点的坐标为 $(\frac{x_1}{2},\frac{y_1+p}{2})$.



$\because |O'P|=\frac{1}{2}|AC|=\frac{1}{2}\sqrt{x_1{}^2+(y_1-p)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{y_1{}^2+p^2}$,

$\because |O'H|=|a-\frac{y_1+p}{2}|=\frac{1}{2}|2a-y_1-p|$,

$\therefore |PH|^2=|O'P|^2-|O'H|^2$

$=\frac{1}{4}(y_1{}^2+p^2)-\frac{1}{4}(2a-y_1-p)^2$

$=(a-\frac{p}{2})y_1+a(p-a)$,

$\therefore |PQ|^2=(2|PH|)^2=4[(a-\frac{p}{2})y_1+a(p-a)]$.

令 $a-\frac{p}{2}=0$,得 $a=\frac{p}{2}$,此时 $|PQ|=p$ 为定值,故满足条件的直线 l 存在,其方程为 $y=\frac{p}{2}$,即抛物线的通径所在的直线.

解法二:(1)前同解法一,再由弦长公式,得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4p^2k^2+8p^2}=2p\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+2}$,

又由点到直线的距离公式,得 $d=\frac{2p}{\sqrt{1+k^2}}$,

从而,$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot 2p\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+2}\cdot\frac{2p}{\sqrt{1+k^2}}=2p^2\sqrt{k^2+2}$,

$\therefore$ 当 $k=0$ 时,$(S_{\triangle ABN})_{\min}=2\sqrt{2}p^2$.

(2)假设满足条件的直线 l 存在,其方程为 $y=a$,则以 AC 为直径的圆的方程为 $(x-0)(x-x_1)+(y-p)(y-y_1)=0$,将直线方程 $y=a$ 代入,得 $x^2-x_1x+(a-p)(a-y_1)=0$,

则 $\Delta=x_1{}^2-4(a-p)(a-y_1)=4[(a-\frac{p}{2})y_1+a(p-a)]$.

设直线 l 与 AC 为直径的圆的交点为 $P(x_3,y_3)$,$Q(x_4,y_4)$,则有 $|PQ|=|x_3-x_4|=\sqrt{4[(a-\frac{p}{2})y_1+a(p-a)]}=2\sqrt{(a-\frac{p}{2})y_1+a(p-a)}$.

令 $a-\frac{p}{2}=0$,得 $a=\frac{p}{2}$,此时 $|PQ|=p$ 为定值,故满足条件的直线 l 存在,其方程为 $y=\frac{p}{2}$,即抛物线的通径所在的直线.

6.**【思路点拨】** 证明三点共线可转化为证明点 N 在 EF 所在的直线上;证明存在性问题,可先假设存在,再根据题意推理论证假设是否成立.

【规范解析】 (1)设 $A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$、$E(x_E,y_E)$、$F(x_F,y_F)$,

则直线 AB 的方程为 $y=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}(x-x_1)+x_1^2$,

即 $y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$.

因为 $M(x_0,y_0)$在 AB 上,

所以 $y_0=(x_1+x_2)x_0-x_1x_2$ ①

又直线 AP 方程:$y=\frac{x_1^2-y_0}{x_1}x+y_0$,

由 $\begin{cases}y=\frac{x_1^2-y_0}{x_1}x+y_0\\x^2=y\end{cases}$,得 $x^2-\frac{x_1^2-y_0}{x_1}x-y_0=0$.

所以 $x_1+x_E=\frac{x_1^2-y_0}{x_1}\Rightarrow x_E=-\frac{y_0}{x_1},y_E=\frac{y_0^2}{x_1^2}$,

同理,$x_F=-\frac{y_0}{x_2},y_F=\frac{y_0^2}{x_2^2}$.

所以直线 EF 的方程:$y=-(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})y_0x-\frac{y_0^2}{x_1x_2}$.

令 $x=-x_0$,得 $y=\frac{y_0}{x_1x_2}[(x_1+x_2)x_0-y_0]$.

将①代入上式得 $y=y_0$,即 N 点在直线 EF 上,

所以 E、F、N 三点共线.

(2)由已知 A、B、M、N 共线,有 $A(-\sqrt{y_0},y_0)$,$B(\sqrt{y_0},y_0)$,

以 AB 为直径的圆方程:$x^2+(y-y_0)^2=y_0$,

由 $\begin{cases}x^2+(y-y_0)^2=y_0\\x^2=y\end{cases}$

得 $y^2-(2y_0-1)y+y_0^2-y_0=0$,

所以 $y=y_0$,$y=y_0-1$.

要使圆与抛物线有异于 A,B 的交点,则 $y_0-1\geqslant0$,

所以存在 $y_0\geqslant1$,使以 AB 为直径的圆与抛物线有相异于 A、B 的交点 $T(x_T,y_T)$,

则 $y_T=y_0-1$,所以交点 T 到 AB 的距离为

$y_0-y_T=y_0-(y_0-1)=1$.

7. **解析** （Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=-\frac{\ln x}{(1+x)^2}$

故当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

由此知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的极大值为 $f(1)=\ln2$，没有极小值.

（Ⅱ）（ⅰ）当 $a\leqslant0$ 时，由于 $f(x)=\frac{(1+x)\ln(1+x)-x\ln x}{1+x}$

$=\frac{\ln(1+x)+x[\ln(1+x)-\ln x]}{1+x}>0$，

故关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$.

（ⅱ）当 $a>0$ 时，由 $f(x)=\frac{\ln x}{1+x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 知

$f(2^n)=\frac{\ln2^n}{1+2^n}+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$，其中 n 为正整数，

且有 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{a}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n}<e^{\frac{a}{2}}-1\Leftrightarrow n>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$.

又 $n\geqslant2$ 时，$\frac{\ln2^n}{1+2^n}=\frac{n\ln2}{1+(1+1)^n}<\frac{n\ln2}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2\ln2}{n-1}$.

且 $\frac{2\ln2}{n-1}<\frac{a}{2}\Leftrightarrow n>\frac{4\ln2}{a}+1$.

取整数 n_0 满足 $n_0>-\log_2(e^{\frac{n}{2}}-1)$，$n_0>\frac{4\ln2}{a}+1$，且 $n_0\geqslant2$，

则 $f(2^{n_0})=\frac{n_0\ln2}{1+2^{n_0}}+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n_0}}\right)<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$，

即当 $a>0$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集不是 $(0,+\infty)$. 综合（ⅰ）（ⅱ）知，存在 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,\infty)$，a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

8. 连接 AC 与 BD 相交于点 O，连结 C_1O.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$BD\perp AC$，$CB=CD$.

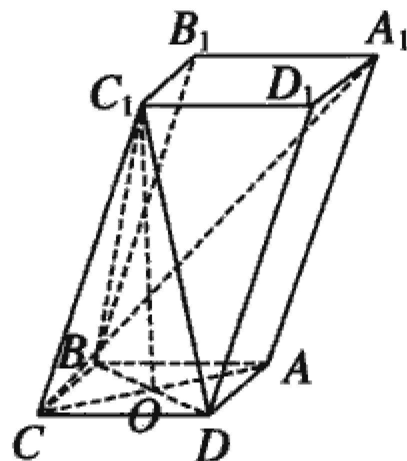
∵$\angle C_1CB=\angle C_1CD$，

∴$\triangle C_1CB\cong\triangle C_1CD$，

∴$C_1B=C_1D$.

又∵O 是线段 BD 的中点，

∴$BD\perp C_1O$.



$\therefore BD\perp$平面AA_1C_1C，$\therefore BD\perp A_1C$. 于是，欲使$A_1C\perp$平面C_1BD，只要$A_1C\perp C_1D$，即只要

$\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0$，也就是

$0=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC_1})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1})$

$=\overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC_1})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1})$

$=|\overrightarrow{CB}|\cdot(|\overrightarrow{CD}|-|\overrightarrow{CC_1}|)\cdot\cos\angle BCD+(|\overrightarrow{CD}|^2-|CC_1|^2)$

$=(|\overrightarrow{CD}|-|\overrightarrow{CC_1}|)\cdot(|\overrightarrow{CB}|\cos\angle BCD+|\overrightarrow{CD}|+|\overrightarrow{CC_1}|)$.

即$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{CC_1}|(|\overrightarrow{CB}|\cos\angle BCD\neq-|\overrightarrow{CD}|-|\overrightarrow{CC_1}|)$.

故当$\frac{CD}{CC_1}=1$时，$A_1C\perp$平面C_1BD.

9. ①先探求必要条件：

如果$A_1Q\perp B_1Q$，则$k_{A_1Q}\cdot k_{B_1Q}=-1$.

设$Q(x_0,0)$，$A(2pt_1^2,2pt_1)$，$B(2pt_2^2,2pt_2)$，则

$$A_1\left(-\frac{p}{2},2pt_1\right),B_1\left(-\frac{p}{2},2pt_2\right).$$

$\because A,Q,B$三点共线，

$\therefore\frac{0-2pt_1}{x_0-2pt_1^2}=k_{AQ}=k_{AB}=\frac{2pt_2-2pt_1}{2pt_2^2-2pt_1^2}=\frac{1}{t_2+t_1}$.

解得$x_0=-2pt_1t_2$.

故$-1=k_{A_1Q}\cdot k_{B_1Q}=\frac{0-2pt_1}{-2pt_1t_2+\frac{p}{2}}\cdot\frac{0-2pt_2}{-2pt_1t_2+\frac{p}{2}}$，

化简得$t_1t_2=-\frac{1}{4}$.

$\therefore x_0=\frac{p}{2}$，故点$Q(x_0,0)$重合于抛物线的焦点$\left(\frac{p}{2},0\right)$.

②再验证充分条件：

如果点Q重合于抛物线的焦点，则由定义，得

$$|A_1A|=|QA|,|B_1B|=|QB|,$$

则 $\angle AA_1Q=\angle AQA_1$，$\angle BB_1Q=\angle BQB_1$. 又$\because A_1A\parallel B_1B$，

$\therefore 180^\circ=\angle B_1BA+\angle A_1AB$

$=(180^\circ-2\angle BQB_1)+(180^\circ-2\angle AQA_1)$，

$\therefore\angle BQB_1+\angle AQA_1=90^\circ$.

$\therefore \angle A_1QB_1=180°-(\angle BQB_1+\angle AQA_1)=90°$.

$\therefore A_1Q\perp B_1Q$.

综合①②得，$A_1Q\perp B_1Q$ 的一个充要条件是弦 AB 与 x 轴的交点 Q 重合于抛物线的焦点.

10. 由已知得 $S_n=\dfrac{2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=4-\dfrac{4}{2^n}$，则

$S_{n+1}=4-\dfrac{4}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{4}{2^n}\right)+2=\dfrac{S_n}{2}+2$.

假定存在正整数 c 和 k，使得不等式 $\dfrac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$ 成立，

即 $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}S_k+2\right)-c}{S_k-c}-2>0$，亦即 $\dfrac{c-\left(\dfrac{3}{2}S_k-2\right)}{c-S_k}<0$.

又∵ $\left(\dfrac{3}{2}S_k-2\right)-S_k=\dfrac{S_k}{2}-2=-\dfrac{2}{2_k}<0$，

即只要 $\dfrac{3}{2}S_k-2<c<S_k$. ①

又∵ $\dfrac{3}{2}S_k-2\geqslant\dfrac{3}{2}S_1-2=3-2=1$，$S_k=4-\dfrac{4}{2^k}<4$，

∴正整数 c 只可能取 2 或 3.

①当 $c=2$ 时，$c=S_1$，则不等式①对于 $k=1$ 不成立.

取正整数 $k\geqslant2$，则 $\dfrac{3}{2}S_k-2\geqslant\dfrac{3}{2}S_2-2=\dfrac{3}{2}(2+1)-2=\dfrac{5}{2}>c$，则不等式①对于正整数 $k\geqslant2$ 也不成立. 于是，$c\neq2$.

②当 $c=3$ 时，$S_1=2$，$S_2=3$，则不等式①对于 $k=1,2$ 不成立.

取正整数 $k\geqslant3$，则 $\dfrac{3}{2}S_k-2=\dfrac{3}{2}S_3-2=\dfrac{3}{2}(2+1+\dfrac{1}{2})-2=\dfrac{13}{4}>c$，则不等式①对于正整数 $k\geqslant3$ 也不成立. 于是 $c\neq3$.

综合①②可知，不存在正整数 c 和 k 使得题设不等式成立.

11. (1)可求得 $f(x)=4^{x-5}$，则 $a_n=2n-10$，则 $S_n=n(n-9)$，故 $a_nS_n\leqslant0$ 等价于 $2n(n-5)(n-9)\leqslant0$. 解得原不等式的解集是 $\{5,6,7,8,9\}$.

(2) $a_1S_1=64$，$a_2S_2=84$，$a_3S_3=72$，$a_4S_4=40$；当 $5\leqslant n\leqslant9$ 时，$a_nS_n\leqslant0$；当 $10\leqslant n\leqslant22$ 时，$a_nS_n\leqslant a_{22}S_{22}=9724<10^4$；当 $n\geqslant23$ 时，$a_nS_n\geqslant a_{23}S_{23}=11592>10^4$. 总之，$10^4$ 不是数列 $\{a_nS_n\}$ 中的项.

12. (1)将直线 l 的方程 $y=kx+1$ 代入双曲线 C 的方程 $2x^2-y^2=1$ 后,整理得

$$(k^2-2)x^2+2kx+2=0 \quad ①$$

依题意,直线 l 与双曲线 C 的右支交于不同两点,

故 $$\begin{cases} k^2-2\neq 0, \\ \Delta=(2k)^2-8(k^2-2)>0, \\ -\dfrac{2k}{k^2-2}>0, \\ \dfrac{2}{k^2-2}>0. \end{cases}$$

解得 k 的取值范围为 $-2<k<-\sqrt{2}$.

(2)设 A,B 两点的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,则由①式得

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2k}{2-k^2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{k^2-2}. \end{cases} \quad ②$$

假设存在实数 k,使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 $F(c,0)$,则由 $FA\perp FB$ 得

$(x_1-c)(x_2-c)+y_1y_2=0.$

即 $(x_1-c)(x_2-c)+(kx_1+1)(kx_2+1)=0.$

整理得

$$(k^2+1)x_1x_2+(k-c)(x_1+x_2)+c^2+1=0 \quad ③$$

把②式及 $c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 代入③式化简得

$$5k^2+2\sqrt{6}k-6=0.$$

解得 $k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$ 或 $k=\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$(舍).

可知 $k=-\dfrac{6+\sqrt{6}}{5}$ 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线的右焦点.

13. (1)**解法一** 依题意,可设直线 AB 的方程为

$$y=k(x-1)+3,$$

代入 $3x^2+y^2=\lambda$,整理得

$$(k^2+3)x^2-2k(k-3)x+(k-3)^2-\lambda=0. \quad ①$$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 x_1,x_2 是方程①的两个不同的根,故

$$\Delta=4[\lambda(k^2+3)-3(k-3)^2]>0, \quad ②$$

且 $$x_1+x_2=\frac{2k(k-3)}{k^2+3}.$$

由 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点,得



$\frac{x_1+x_2}{2}=1$，$\therefore k(k-3)=k^2+3$.

解得 $k=-1$，代入②得，$\lambda>12$，

即 λ 的取值范围是$(12,+\infty)$.

于是，直线 AB 的方程为

$$y-3=-(x-1)\text{，即 } x+y-4=0.$$

解法二 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有

$\begin{cases}3x_1^2+y_1^2=\lambda,\\3x_2^2+y_2^2=\lambda.\end{cases}$

$\Rightarrow 3(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$.

依题意 $x_1\neq x_2$，

$\therefore k_{AB}=-\frac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}$.

$\because N(1,3)$是 AB 的中点.

$\therefore x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=6$，

从而 $$k_{AB}=-1.$$

又由 $N(1,3)$在椭圆内.

$\therefore \lambda>3\times1^2+3^2=12$，

$\therefore \lambda$ 的取值范围是$(12,+\infty)$.

直线 AB 的方程为 $y-3=-(x-1)$，即 $x+y-4=0$.

(2)**解法一** $\because CD$ 垂直平分 AB，

$\therefore$直线 CD 的方程为 $y-3=x-1$，即 $x-y+2=0$.

代入椭圆方程，整理得

$$4x^2+4x+4-\lambda=0. \quad ③$$

又设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，CD 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 x_3，x_4 是方程③的两根，

$\therefore x_3+x_4=-1$，

且 $x_0=\frac{1}{2}(x_3+x_4)=-\frac{1}{2}$，$y_0=x_0+2=\frac{3}{2}$，

即 $m\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

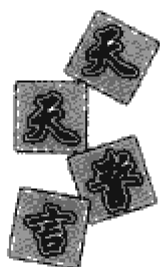
于是由弦长公式可得

$$|CD|=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}\cdot|x_3-x_4|=\sqrt{2(\lambda-3)} \quad ④$$

将直线 AB 的方程 $x+y-4=0$ 代入椭圆方程得

$$4x^2-8x+16-\lambda=0. \quad ⑤$$

同理可得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2(\lambda-12)}$. ⑥



∵当 $\lambda>12$ 时，$\sqrt{2(\lambda-3)}>\sqrt{2(\lambda-12)}$，

∴ $|AB|<|CD|$.

假设存在 $\lambda>12$，使得 A,B,C,D 四点共圆，则 CD 必为圆的直径，点 M 为圆心.

点 M 到直线 AB 的距离为

$$d=\frac{|x_0+y_0-4|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}. \qquad ⑦$$

于是，由④，⑥，⑦式和勾股定理可得

$$|MA|^2=|MB|^2=d^2+\left|\frac{AB}{2}\right|^2$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{\lambda-12}{2}=\frac{\lambda-3}{2}=\left|\frac{CD}{2}\right|^2.$$

故当 $\lambda>12$ 时，A,B,C,D 四点均在以 M 为圆心，$\left|\frac{CD}{2}\right|$ 为半径的圆上.

（注：上述解法中最后一步可按如下解法获得：

A,B,C,D 共圆 $\Leftrightarrow\triangle ACD$ 为直角三角形，A 为直角

$\Leftrightarrow|AN|^2=|CN|\cdot|DN|$，

即 $$\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=\left(\frac{|CD|}{2}+d\right)-\left(\frac{|CD|}{2}-d\right). \qquad ⑧$$

由⑥式知，⑧式左边 $=\frac{\lambda-12}{2}$.

由④和⑦知，

$$⑧式右边=\left(\frac{\sqrt{2(\lambda-3)}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2(\lambda-3)}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\lambda-3}{2}-\frac{9}{2}=\frac{\lambda-12}{2}.$$

∴⑧式成立，即 A,B,C,D 四点共圆.

解法二 由(2)解法一及 $\lambda>12$，

∵CD 垂直平分 AB，

∴直线 CD 方程为 $y-3=x-1$，

代入椭圆方程，整理得 $4x^2+x+4-\lambda=0$. ③

将直线 AB 的方程 $x+y-4=0$ 代入椭圆方程，

整理得 $4x^2-8x+16-\lambda=0$. ⑤

解③和⑤式可得

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{\lambda-12}}{2},\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{\lambda-3}}{2}.$$

不妨设

$$A\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-12},3-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-12}\right),$$

$$C\left(\frac{-1-\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3-\sqrt{\lambda-3}}{2}\right),$$

$$D\left(\frac{-1+\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3+\sqrt{\lambda-3}}{2}\right).$$

$$\therefore \overrightarrow{CA}=\left(\frac{3+\sqrt{\lambda-12}+\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3+\sqrt{\lambda-3}-\sqrt{\lambda-12}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{DA}=\left(\frac{3+\sqrt{\lambda-12}-\sqrt{\lambda-3}}{2},\frac{3-\sqrt{\lambda-3}-\sqrt{\lambda-12}}{2}\right).$$

计算可得 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DA}=0$，$\therefore A$ 在以 CD 为直径的圆上. 又 B 为 A 关于 CD 的对称点，$\therefore A,B,C,D$ 四点共圆.

(注:也可用勾股定理证明 $AC\perp AD$)

14. (1)$\because$ 棱台 $DEF\text{-}ABC$ 与棱锥 $P\text{-}ABC$ 的棱长和相等，

$\therefore DE+EF+FD=PD+PE+PF.$

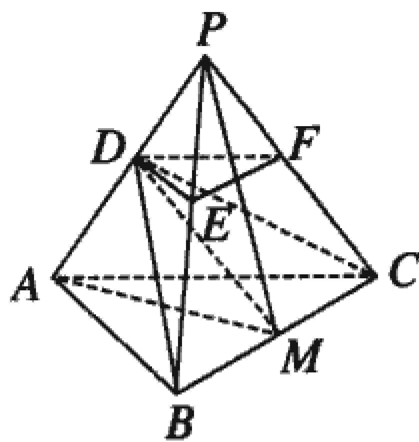
又$\because$ 截面 $DEF\parallel$ 底面 ABC，

$\therefore DE=EF=FD=PD=PE=PF$，

$\angle DPE=\angle EPF=\angle FPD=60^\circ$，

$\therefore P\text{-}ABC$ 是正四面体.

(2)如右图，取 BC 的中点 M，连结 PM,DM,AM. 由于 $BC\perp PM,BC\perp AM$，所以 $BC\perp$ 平面 PAM，$BC\perp DM$，则$\angle DMA$ 为二面角 $D\text{-}BC\text{-}A$ 的平面角，由(1)知，$P\text{-}ABC$ 的各棱长均为 1，从而 $PM=AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 D 是 PA 的中点，得



$$\sin\angle DMA=\frac{AD}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle DMA=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3)存在满足条件的直平行六面体.

棱台 $DEF\text{-}ABC$ 的棱长和为定值 6，体积为 V. 设直平行六面体的棱长均为 $\frac{1}{2}$，底面相邻两边夹角为 α，则该六面体棱长和为 6，体积为 $\frac{1}{8}\sin\alpha=V$.

$\because$ 正四面体 $P-ABC$ 的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{12}$，

$\therefore 0<V<\frac{\sqrt{2}}{12}, 0<8V<1$.

可知 $\alpha=\arcsin(8V)$. 故构造棱长为$\frac{1}{2}$,底面相邻两边夹角为 $\arcsin(8V)$的直平行六面体即满足要求.

15. (1)**证明**:设等差数列的公差为 d,则由题设得 $a_1+d=a_1q, d=a_1(q-1)$,且$q\neq 1$.

由 $b_k=a_m$,得 $b_1q^{k-1}=a_1+(m-1)d$,

所以 $b_1(q^{k-1}-1)=(m-1)d$,

$S_{k-1}=\frac{b_1(q^{k-1}-1)}{q-1}=\frac{(m-1)d}{q-1}$

$=\frac{(m-1)a_1(q-1)}{q-1}=(m-1)a_1$.

故等式成立.

(2)**证明**:(ⅰ)q 为整数:由 $b_3=a_i$ 得 $b_1q^2=a_1+(i-1)d$,

即 $a_1q^2=a_1+(i-1)a_1(q-1)$,

移项得 $a_1(q+1)(q-1)=a_1(i-1)(q-1)$.

因 $a_1=b_1\neq 0, q\neq 1$,得 $q=i-2$. 故 q 为整数.

(ⅱ)证明数列$\{b_n\}$中的每一项都是数列$\{a_n\}$中的项:

设 b_n 是数列$\{b_n\}$中的任一项,只要讨论 $n>3$ 的情形.

令 $b_1q^{n-1}=a_1+(k-1)d$,即 $a_1q^{n-1}-a_1=(k-1)a_1(q-1)$,

得 $k=1+\frac{q^{n-1}-1}{q-1}=2+q+q^2+\cdots+q^{n-2}$.

因 $q=i-2$,当 $i=1$ 时,$q=-1$,$q+q^2+\cdots+q^{n-2}$ 为 -1 或 0,则 k 为 1 或 2;而 $i\neq 2$,否则 $q=0$,矛盾.

当 $i\geqslant 3$ 时,q 为正整数,所以 k 为正整数,从而 $b_n=a_k$.

故数列$\{b_n\}$中的每一项都是数列$\{a_n\}$中的项.

(3)取 $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b_2=b_1q, b_4=b_1q^3$.

$b_1+b_4=b_1(1+q^3)=b_1\left[1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3\right]=b_1(\sqrt{5}-1)=2b_2$,

所以 b_1, b_2, b_4 成等差数列.

16. (1)直线 l 的方程为 $y+4=x+2$,即 $y=x-2$,将其代入 $y^2=2px$ 整理为

$$x^2-2(2+p)x+4=0. \quad ①$$

$\because p>0, \therefore \Delta=4(2+p)^2-16>0$.

设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,则 $x_1+x_2=4+2p, x_1\cdot x_2=4$.

$\because |AB|, |BC|, |AC|$成等比数列,

$\therefore |BC|^2=|AB|\cdot|AC|$.

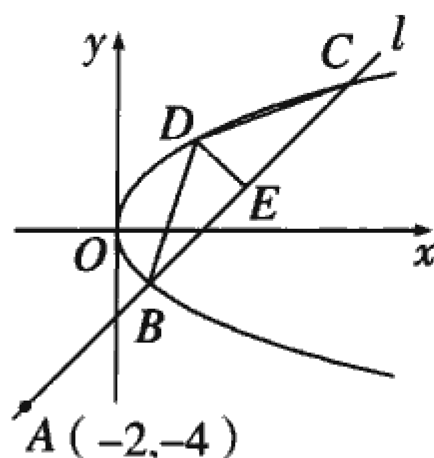
$\therefore(\sqrt{2}|x_2-x_1|)^2=\sqrt{2}(x_1+2)\cdot\sqrt{2}(x_2+2)$,

整理得$(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)-5x_1x_2-4=0$.

将 $x_1+x_2=4+2p, x_1\cdot x_2=4$ 代入上式解得 $p=1$.

$\therefore$抛物线方程为 $y^2=2x$.

(2)如图,假设在抛物线 $y^2=2x$ 上存在点 $D(x_3,y_3)$,使得 $|DB|=|DC|$ 成立.记线段 BC 中点为 $E(x_0,y_0)$,则 $|DB|=|DC|$,$DE\perp BC$,



$\therefore k_{DE}=-\frac{1}{k_{BC}}=-1$.

当 $p=1$ 时,①式可化为 $x^2-6x+4=0$.

$\therefore x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=3, y_0=x_0-2=1$.

$\therefore$点 $D(x_3,y_3)$应满足$\begin{cases}y_3^2=2x_3,\\ \frac{y_3-1}{x_3-3}=-1.\end{cases}$

解之得$\begin{cases}x_3=2\\ y_3=2\end{cases}$或$\begin{cases}x_3=8\\ y_3=-4\end{cases}$

$\therefore$存在点 $D(2,2)$或 $D(8,-4)$使得$|DB|=|DC|$成立.

17. (1)抛物线 $y^2=-9x+36=-9(x-4)$的顶点为$(4,0)$,准线方程为 $x=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$.

设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则有 $c=4$,

又$\frac{a^2}{c}=\frac{25}{4}$,$\therefore a^2=25, b^2=9$.

$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

(2)设 $P(x_p,y_p)$,则有$\frac{|PF_1|}{|x_p+\frac{a^2}{c}|}=e$,

$\therefore|PF_1|=a+ex_p=5+\frac{4}{5}x_p$.

同理$|PF_2|=a-ex_p=5-\frac{4}{5}x_p$,

又$|F_1F_2|=2c=8$,$\therefore$在$\triangle PF_1F_2$ 中,

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{\frac{16}{25}x_p^2-7}{25-\frac{16}{25}x_p^2},$$

$\because \angle F_1PF_2$ 是钝角，

$\therefore -1<\cos\angle F_1PF_2<0$，即 $-1<\dfrac{\frac{16}{25}x_p^2-7}{25-\frac{16}{25}x_p^2}<0$，

解得 $-\dfrac{5\sqrt{7}}{4}<x_p<\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.

(3)符合条件的点 M 不存在. 证明如下：

先研究 $\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$ 的情况，设 $M(x,y)$，则有

$$\begin{cases}x^2+y^2=c^2,\\(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).\end{cases}$$

消去 y 整理得 $c^2x^2=2a^2c^2-a^4$.

假设存在点 M，使 $\angle F_1MF_2$ 为钝角，则有

$$x^2=\frac{2a^2c^2-a^4}{c^2}>0,$$

$\because a^2>0, c^2>0$，$\therefore 2c^2-a^2>0$.

$\therefore 2x^2>a^2$，$\dfrac{c^2}{a^2}>\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \dfrac{c}{a}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<e<1$，这与已知 $0<e\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 不符.

$\therefore$ 当 $0<e\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，在该椭圆上不存在点 M 使 $\angle F_1MF_2$ 为钝角.

18. (1) $a_{10}=10$，$a_{20}=10+10d=40$，$\therefore d=3$.

(2) $a_{30}=a_{20}+10d^2=10(1+d+d^2)(d\neq 0)$.

$\therefore a_{30}=10\left[\left(d+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]$,

当 $d\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$a_{30}\in\left[\dfrac{15}{2},+\infty\right]$.

(3)所给数列可推广为无穷数列 $\{a_n\}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 是首项为1，公差为1的等差数列，当 $n\geqslant 1$ 时，数列 $a_{10n},a10_{n+1},\cdots,a_{10(n+1)}$ 是公差为 d^n 的等差数列. 研究的问题可以是：试写出 $a_{10(n+1)}$ 关于 d 的关系式，并求 $a_{10(n+1)}$ 的取值范围. 研究的结论可以是：由 $a_{40}=a_{30}+10d^3=10(1+d+d^2+d^3)$，

依次类推可得

$$a_{10(n+1)}=10(1+d+\cdots+d^n)$$

$$=\begin{cases}10\times\dfrac{1-d^{n+1}}{1-d}, d\neq 1,\\10(n+1). \quad d=1.\end{cases}$$

当 $d>0$ 时，$a_{10(n+1)}$ 的取值范围为 $(10,+\infty)$ 等.

第二十章 数学应用问题展现数学才能

普通高中数学课程标准(实验)在基本理念中指出:“开展数学应用的教学活动符合社会需要,有利于激发学生学习数学的兴趣,有利于增强学生的应用意识,有利于扩展学生的视野,”“高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用、数学与日常生活及其他学科的联系,促进学生逐步形成和发展数学应用意识,提高实践能力.”这一基本理念在历年的高考试题中也早就得到应用和贯彻,使数学应用成为高考的热点问题之一.

一、函数与不等式的应用

解题秘言:由于函数和不等式应用的广泛性与工具性,因此,数学应用的许多问题都能与函数和不等式发生联系.

例 1 某厂生产某种零件,每个零件的成本为 40 元,出厂单价定为 60 元.该厂为鼓励销售商订购,决定当一次订购量超过 100 个时,每多订购一个,多余的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元,但实际出厂单价不能低于 51 元.

(Ⅰ)当一次订购量为多少个时,零件的实际出厂单价降为 51 元?

(Ⅱ)设一次订购量为 x 个,零件的实际出厂单价为 P 元,写出函数 $P=f(x)$ 的表达式;

(Ⅲ)当销售商一次订购 500 个零件时,该厂获得的利润是多少元?如果订购 1000 个,利润又是多少元?(工厂售出一个零件的利润=实际出厂单价-成本)

【解】 (Ⅰ)设每个零件的实际出厂单价恰好降为 51 元时,一次订购量为 x_0 个,则 $x_0=100+\dfrac{60-51}{0.02}=550$.

故当一次订购量为 550 个时,每个零件的实际出厂单价恰好降为 51 元.

(Ⅱ)当 $0<x\leqslant 100$ 时,$P=60$;

当 $100<x<550$ 时,$P=60-0.02(x-100)=62-\dfrac{x}{50}$;

当 $x\geqslant 550$ 时,$P=51$.

故 $P=f(x)$ 的表达式为



$$P=f(x)=\begin{cases}60 & (0<x\leqslant 100,x\in\mathbf{N})\\62-\dfrac{x}{50} & (100<x<550,x\in\mathbf{N})\\51 & (x\geqslant 550,x\in\mathbf{N})\end{cases}$$

(Ⅲ)设销售商的一次订购量为 x 个时，工厂获得的利润为 L 元，则

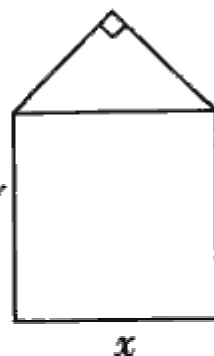
$$L=(P-40)x=\begin{cases}20x & (0<x\leqslant 100,x\in\mathbf{N})\\22x-\dfrac{x^2}{50} & (100<x<550,x\in\mathbf{N})\\11x & (x>550,x\in\mathbf{N})\end{cases}$$

当 $x=500$ 时，$L=6000$；当 $x=1000$ 时，$L=11000$.

故当销售商一次订购 500 个零件时，该厂获得的利润是 6000 元；如果订购 1000 个，利润是 11000 元.

【解后感言】 产品的销售利润肯定是产品的函数关系，这里产品的出厂单价及销售利润与产品数量 x 都是成分段函数关系，函数关系式建立得正确与否，直接关系到最后实际计算的正确性.

例2 某单位用木料制作如图所示的框架，框架的下部是边长分别为 x,y(单位:m)的矩形，上部是等腰直角三角形，要求框架围成的总面积为 8 m²，问 x,y 分别为多少时用料最省？(精确到 0.001 m)



【解】 由题意得 $x\cdot y+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{x}{2}=8$,

$$\therefore y=\frac{8-\frac{x^2}{4}}{x}=\frac{8}{x}-\frac{x}{4}\ (0<x<4\sqrt{2}).$$

于是框架用料长度为

$$l=2x+2y+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)x+\frac{16}{x}\geqslant 4\sqrt{6+4\sqrt{2}}.$$

当 $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)x=\frac{16}{x}$，即 $x=8-4\sqrt{2}$ 时等号成立.

此时，$x\approx 2.343$，$y=2\sqrt{2}\approx 2.828$.

故当 x 为 2.343 m，y 为 2.828 m 时，用料最省.

【解后感言】 求最值是数学应用问题的常见问题，也是解决实际问题的意义之所在，这里是用重要基本不等式来求最值.

例3 某段城铁路线上依次有 A,B,C 三站，$AB=5$ km，$BC=3$ km. 在列车

运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟，8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行时，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 分钟，并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

（Ⅰ）分别写出列车在 B,C 两站的运行误差；

（Ⅱ）若要求列车在 B,C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，求 v 的取值范围.

【解】 （Ⅰ）列车在 B,C 两站的运行误差（单位：分钟）分别是

$$\left|\frac{300}{v}-7\right| \text{和} \left|\frac{480}{v}-11\right|.$$

（Ⅱ）∵列车在 B,C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，

∴ $$\left|\frac{300}{v}-7\right|+\left|\frac{480}{v}-11\right|\leqslant 2.\ (*)$$

当 $0<v\leqslant\frac{300}{7}$ 时，$(*)$ 式变形为 $\frac{300}{v}-7+\frac{480}{v}-11\leqslant 2$，

解得 $$39\leqslant v\leqslant\frac{300}{7};$$

当 $\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11}$ 时，$(*)$ 式变形为 $7-\frac{300}{v}+\frac{480}{v}-11\leqslant 2$，

解得 $$\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11};$$

当 $v>\frac{480}{11}$ 时，$(*)$ 式变形为 $7-\frac{300}{v}+11-\frac{480}{v}\leqslant 2$，

解得 $$\frac{480}{11}<v\leqslant\frac{195}{4}.$$

综上所述，v 的取值范围是 $\left[39,\frac{195}{4}\right]$.

【解后感言】 这里是建立绝对值不等式来解实际问题，因此正确地去掉绝对值的符号成为求解的关键.

二、导数的应用

解题秘言：求最值是数学应用的常见课题，而导数法又是求最值的最佳工具，因此，这类问题在近年高考中屡屡出现.

例 1 （2008 年广东高考文 · T17）某单位用 2 160 万元购得一块空地，计划在该地块上建造一栋至少 10 层、每层 2 000 平方米的楼房. 经测算，如果将楼房建

为 $x(x\geqslant 10)$ 层，则每平方米的平均建筑费用为 $560+48x$（单位：元）．为了使楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建为多少层？

（注：平均综合费用＝平均建筑费用＋平均购地费用，平均购地费用＝$\frac{购地总费用}{建筑总面积}$）

【思路探索】通过分析我们发现，解答本题只需正确地建立平均综合费用的函数关系式，利用导数的运算即可求解．

【规范解析】设楼房每平方米的平均综合费用为 $f(x)$ 元，

则 $f(x)=(560+48x)+\frac{2\ 160\times 10\ 000}{2\ 000x}$

$=560+48x+\frac{10\ 800}{x}(x\geqslant 10, x\in \mathbf{N}^*)$

$f'(x)=48-\frac{10\ 800}{x^2}$.

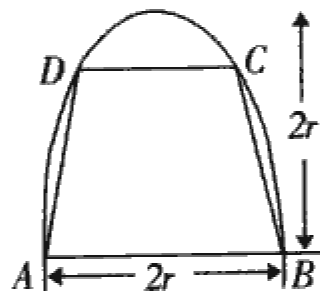
令 $f'(x)=0$，得 $x=15$．当 $x>15$ 时，$f'(x)>0$；

当 $0<x<15$ 时，$f'(x)<0$.

因此，当 $x=15$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(15)=2\ 000$.

答：为了楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建为 15 层．

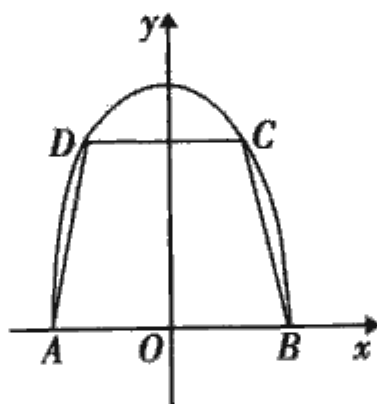
例 2　（2007 年北京高考理・T19）如图，有一块半椭圆形钢板，其长半轴长为 $2r$，短半轴长为 r．计划将此钢板切割成等腰梯形的形状，下底 AB 是半椭圆的短轴，上底 CD 的端点在椭圆上．记 $CD=2x$，梯形面积为 S.



（1）求面积 S 以 x 为自变量的函数式，并写出其定义域；

（2）求面积 S 的最大值．

【规范解析】　（1）依题意，以 AB 的中点 O 为原点建立直角坐标系 $O-xy$（如图），则点 C 的横坐标为 x.



点 C 的纵坐标 y 满足方程 $\frac{x^2}{r_2}+\frac{y^2}{4r^2}=1(y\geqslant 0)$，

解得 $y=2\sqrt{r^2-x^2}(0<x<r)$.

$S=\frac{1}{2}(2x+2r)\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}=2(x+r)\cdot\sqrt{r^2-x^2}$，

其定义域为 $\{x|0<x<r\}$.

（2）记 $f(x)=4(x+r)^2(r^2-2x)$，$0<x<r$，

则 $f'(x)=8(x+r)^2(r-2x)$．令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}r$.

因为当 $0<x<\frac{r}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\frac{r}{2}<x<r$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(\frac{1}{2}r)$ 是 $f(x)$ 的最大值.

因此，当 $x=\frac{1}{2}r$ 时，S 也取得最大值，最大值为 $\sqrt{f(\frac{1}{2}r)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$，

即梯形面积 S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

三、数列的应用

解题秘言：增长率问题、利润问题，常与数列有关，而这类问题正是市场经济的热门话题.

例 1 （2007 年安徽高考·T21）某国采用养老储备金制度.公民在就业的第一年就交纳养老储备金，数目为 a_1，以后每年交纳的数目均比上一年增加 $d(d>0)$，因此，历年所交纳的储备金数目 $a_1,a_2,\cdots$ 是一个公差为 d 的等差数列，与此同时，国家给予优惠的计息政策，不仅采用固定利率，而且计算复利.这就是说，如果固定年利率为 $r(r>0)$，那么，在第 n 年末，第一年所交纳的储备金就变为 $a_1(1+r)^{n-1}$，第二年所交纳的储备金就变为 $a_2(1+r)^{n-2}$，……，以 T_n 表示到第 n 年末所累计的储备金总额.

(1)写出 T_n 与 $T_{n-1}(n\geqslant 2)$ 的递推关系式；

(2)求证：$T_n=A_n+B_n$，其中 $\{A_n\}$ 是一个等比数列，$\{B_n\}$ 是一个等差数列.

【思路探索】 本小题主要考查等差数列、等比数列的基本概念和基本方法，考查学生阅读资料、提取信息、建立数学模型的能力，考查应用所学知识分析和解决实际问题的能力.本题时代气息浓厚，考查的是基础知识方法.

【解】 (1)我们有 $T_n=T_{n-1}(1+r)+a_n(n\geqslant 2)$.

(2)$T_1=a_1$，对 $n\geqslant 2$ 反复使用上述关系式，得

$T_n=T_{n-1}(1+r)+a_n=T_{n-2}(1+r)^2+a_{n-1}(1+r)+a_n=\cdots$

$=a_1(1+r)^{n-1}+a_2(1+r)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(1+r)+a_n$. ①

在①式两端同乘 $(1+r)$，得

$(1+r)T_n=a_1(1+r)^n+a_2(1+r)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(1+r)^2+a_n(1+r)$. ②

②－①，得

$rT_n=a_1(1+r)^n+d[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)]-a_n$

$=\frac{d}{r}[(1+r)^n-1-r]+a_1(1+r)^n-a_n$,

即 $T_n=\frac{a_1r+d}{r^2}(1+r)^n-\frac{d}{r}n-\frac{a_1r+d}{r^2}$.

如果记 $A_n=\frac{a_1r+d}{r^2}(1+r)^n$, $B_n=-\frac{a_1r+d}{r^2}-\frac{d}{r}n$,

则 $T_n=A_n+B_n$,

其中$\{A_n\}$是以$\frac{a_1r+d}{r^2}(1+r)$为首项,以 $1+r(r>0)$为公比的等比数列;$\{B_n\}$是以$-\frac{a_1r+d}{r^2}-\frac{d}{r}$为首项,$-\frac{d}{r}$为公差的等差数列.

【解后感言】 养老储备金是近年来老百姓关心的热门话题,以日常生活中的热门问题来命制应用题也是高考试题中的常见事.

例2 某企业2007年的纯利润为500万元,因设备老化等原因,企业的生产能力将逐年下降.若不进行技术改造,预测从今年起每年比上一年纯利润减少20万元.今年初该企业一次性投入资金600万元进行技术改造,预测在未扣除技术改造资金的情况下,第 n 年(今年为第一年)的利润为 $500(1+\frac{1}{2^n})$万元(n 为正整数).

(Ⅰ)设从今年起的前 n 年,若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元,进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元(须扣除技术改造资金),求 A_n,B_n 的表达式;

(Ⅱ)依上述预测,从今年起该企业至少经过多少年,进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

【解】 (Ⅰ)依题意,

$$A_n=(500-20)+(500-40)+\cdots+(500-20n)$$
$$=490n-10n^2;$$
$$B_n=500\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]-600$$
$$=500n-\frac{500}{2^n}-100.$$

(Ⅱ)$B_n-A_n=(500n-\frac{500}{2^n}-100)-(490n-10n^2)$

$$=10n^2+10n-\frac{500}{2^n}-100=10\left[n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\right].$$

∵函数 $y=x(x+1)-\frac{50}{2^x}-10$ 在$(0,+\infty)$上为增函数,

当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\leqslant 12-\frac{50}{8}-10<0$；

当 $n\geqslant 4$ 时，$n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\geqslant 20-\frac{50}{16}-10>0$.

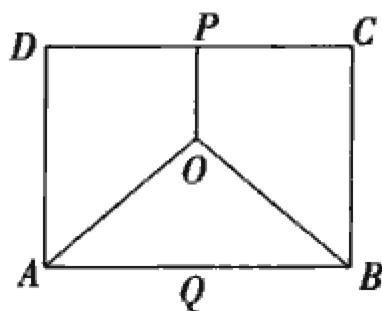
∴当且仅当 $n\geqslant 4$ 时，$B_n>A_n$.

故至少经过 4 年，该企业进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润.

【解后感言】 这里以数列问题为背景，需借助函数的增减性来判断数列的大小.

四、三角函数的应用

例 1 (2008 年江苏高考·T17)如图，某地有三家工厂，分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A、B 及 CD 的中点 P 处，$AB=20$ km，$BC=10$ km. 为了处理三家工厂的污水，现要在该矩形区域上(含边界)，且与 A、B 等距离的一点 O 处，建造一个污水处理厂，并铺设三条排污管道 AO、BO、PO. 记排污管道的总长度为 y km.



(1)按下列要求建立函数关系：

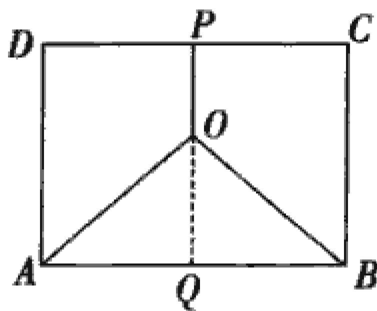
①设 $\angle BAO=\theta$(rad)，将 y 表示为 θ 的函数；

②设 $PO=x$(km)，将 y 表示为 x 的函数.

(2)请你选用(1)中的一个函数关系，确定污水处理厂的位置，使铺设的排污管道的总长度最短.

【思路探索】 通过分析我们发现，本题应注意充分利用图形中所提供的三角形及其边角关系，另外在第(2)问中要注意导数的应用，利用导数研究函数性质，从而求其最值.

【规范解析】 (1)①如图，延长 PO 交 AB 于点 Q.



由题设可知

$BQ=AQ=\frac{1}{2}AB=10$.

$AO=BO$，$PO=10-OQ$.

在 $Rt\triangle AOQ$ 中，$AO=\frac{10}{\cos\theta}$，$OQ=10\tan\theta$，

所以 $y=AO+BO+PO=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\cos\theta}+10-10\tan\theta=\frac{20}{\cos\theta}-10\tan\theta+10$.

又易知 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，故 y 用 θ 表示的函数为

$y=\frac{20}{\cos\theta}-10\tan\theta+10(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$.

②由题设可知，$OP=x$，则 $OQ=10-x$，

在 $Rt\triangle AQO$ 中，

$AO=\sqrt{AQ^2+OQ^2}=\sqrt{10^2+(10-x)^2}$，

$y=AO+BO+PO$

$=x+2\sqrt{10^2+(10-x)^2}$.

显然 $0\leqslant x\leqslant 10$，所以 y 用 x 表示的函数为

$y=x+2\sqrt{10^2+(10-x)^2}(0\leqslant x\leqslant 10)$

(2)选用(1)中的函数关系式

$y=\frac{20}{\cos\theta}-10\tan\theta+10(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$

来确定符合要求的污水处理厂的位置.

$y'=\frac{20\sin\theta}{\cos^2\theta}-10\cdot\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=10\cdot\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$，

$\therefore$令 $y'=0$ 得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，又$\because 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$.

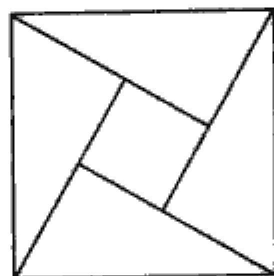
当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{6})$ 时，$y'<0$，当 $\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 时，$y'>0$，

所以函数 y 在 $[0,\frac{\pi}{6})$ 为减函数，在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ 上为增函数，所以 y 在 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时取得极小值，这个极小值就是函数 y 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值.

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$AO=BO=\frac{10}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

因此，当污水处理厂建在矩形区域内且到 A、B 两点的距离均为 $\frac{20}{3}\sqrt{3}$km 时，铺设的排污管道的总长度最短.

例2 (2007年北京高考理·T13)2002年在北京召开的国际数学家大会，会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形(如图). 如果小正方形的面积为1，大正方形的面积为25，



直角三角形中较小的锐角为 θ,那么 $\cos2\theta$ 的值等于________.

【规范解析】 设较小锐角对应的边长为 x,则由已知,

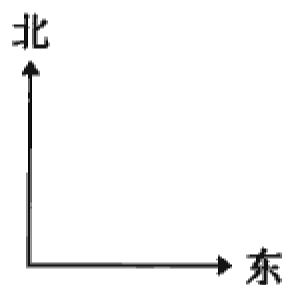
得 $x^2+(x+1)^2=25$.

$\therefore x=3$. ∴大正方形的斜边长为 5.

$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$. $\therefore \cos2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{7}{25}$.

【答案】 $\frac{7}{25}$

例 3 (2008 年湖南高考理 · T19)在一个特定时段内,以点 E 为中心的 7 海里以内海域被设为警戒水域. 点 E 正北 55 海里处有一个雷达观测站 A. 某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点 A 北偏东 45°且与点 A 相距 $40\sqrt{2}$ 海里的位置 B,经过 40 分钟又测得该船已行驶到点 A 北偏东 $45°+\theta$(其中 $\sin\theta=\frac{\sqrt{26}}{26}$,$0°<\theta<90°$)且与点 A 相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置 C.



(Ⅰ)求该船的行驶速度(单位:海里/时);

(Ⅱ)若该船不改变航行方向继续行驶,判断它是否会进入警戒水域,并说明理由.

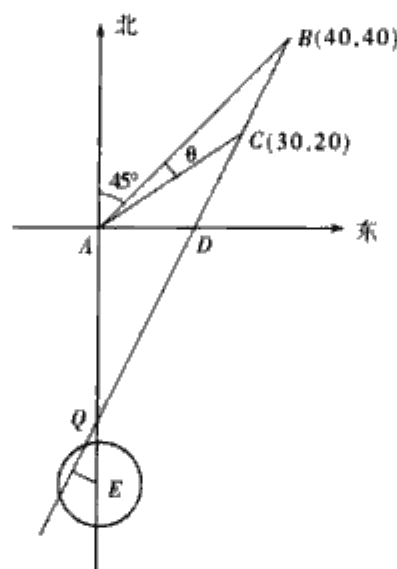
【规范解析】 (Ⅰ)如图,$AB=40\sqrt{2}$,$AC=10\sqrt{13}$,$\angle BAC=\theta$,$\sin\theta=\frac{\sqrt{26}}{26}$.

由于 $0°<\theta<90°$,所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{26}}{26}\right)^2}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$.

由余弦定理得

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\theta}=10\sqrt{5}$.

所以船的行驶速度为 $\frac{5\sqrt{5}}{\frac{2}{3}}=15\sqrt{5}$(海里/时).



（Ⅱ）解法一　如图所示，以 A 为原点建立平面直角坐标系，设点 B,C 的坐标分别是 $B(x_1,y_1)$，$C(x_1,y_2)$，BC 与 x 轴的交点为 D.

由题设有，$x_1=y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=40$，

$x_2=AC\cos\angle CAD=10\sqrt{13}\cos(45°-\theta)=30$，

$y_2=AC\sin\angle CAD=10\sqrt{13}\sin(45°-\theta)=20$.

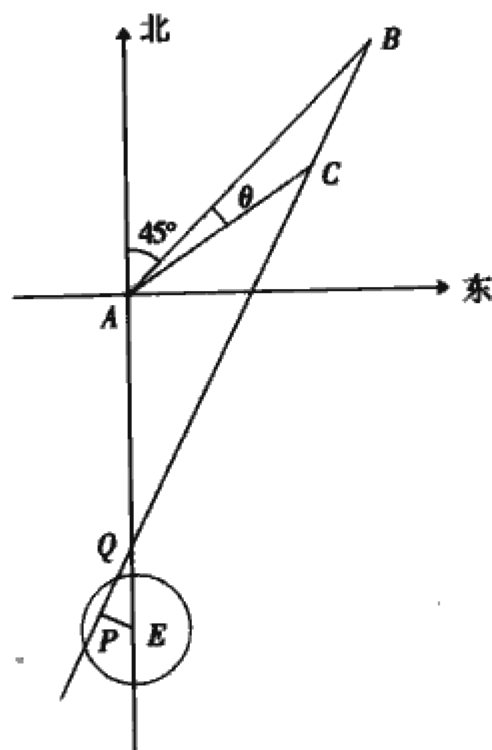
所以过点 B,C 的直线 l 的斜率 $k=\frac{20}{10}=2$，直线 l 的方程为 $y=2x-40$.

又点 $E(0,-55)$ 到直线 l 的距离

$d=\frac{|0+55-40|}{\sqrt{1+4}}=3\sqrt{5}<7$.

所以船会进入警戒水域.

解法二



如图所示，设直线 AE 与 BC 的延长线相交于点 Q. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{40^2\times2+10^2\times5-10^2\times13}{2\times40\sqrt{2}\times10\sqrt{5}}$$

$$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

从而 $\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}$

$$\sqrt{1-\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

在$\triangle ABQ$中，由正弦定理得

$$AQ=\frac{AB\sin\angle ABC}{\sin(45^\circ-\angle ABC)}=\frac{40\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{10}}{10}}=40.$$

由于$AE=55>40=AQ$，所以点Q位于点A和点E之间，且$QE=AE-AQ=15$.

过点E作$EP\perp BC$于点P，则EP为点E到直线BC的距离.

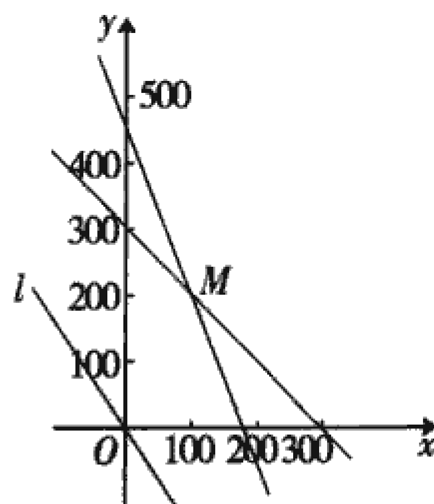
在$Rt\triangle QPE$中，$PE=QE\sin\angle PQE=QE\cdot\sin\angle AQC$

$=QE\cdot\sin(45^\circ-\angle ABC)=15\times\frac{\sqrt{5}}{5}=3\sqrt{5}<7.$

所以船会进入警戒水域.

五、线性规划的应用

例1 (2007年山东高考文·T19)某公司计划2008年在甲、乙两个电视台做总时间不超过300分钟的广告、广告总费用不超过9万元.甲、乙电视台的广告收费标准分别为500元/分钟和200元/分钟.假定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告，能给公司带来的收益分别为0.3万元和0.2万元.问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元？



【规范解析】 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为x分钟和y分钟，总收益为z元.由题意得$\begin{cases}x+y\leqslant 300,\\500x+200y\leqslant 90\ 000,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0.\end{cases}$

目标函数为$z=3\ 000x+2\ 000y$.

二元一次不等式组等价于$\begin{cases}x+y\leqslant 300,\\5x+2y\leqslant 900,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0.\end{cases}$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即可行域，如图.

作直线l:$3\ 000x+2\ 000y=0$，即$3x+2y=0$.

平移直线l，从图中可知，当直线l过M点时，目标函数取得最大值.联立$\begin{cases}x+y=300,\\5x+2y=900.\end{cases}$

解之，得 $x=100$，$y=200$. ∴点 M 的坐标为(100,200).

$\therefore z_{max}=3\ 000x+2\ 000y=700\ 000$(元).

答：该公司在甲电视台做100分钟广告，在乙电视台做200分钟广告，公司的收益最大，最大收益是70万元.

例2 (2007年四川高考理T9、文11)某公司有60万元资金，计划投资甲、乙两个项目，按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍，且对每个项目的投资不能低于5万元. 对项目甲每投资1万元可获得0.4万元的利润，对项目乙每投资1万元可获得0.6万元的利润，该公司正确规划投资后，在这两个项目上共可获得的最大利润为 ( )

A. 36万元　　B. 31.2万元

C. 30.4万元　　D. 24万元

【解析】 设投资甲、乙两项目分别为 x 万元、y 万元，利润为 z，

$$\begin{cases}x+y=60,\\ x\geqslant\frac{2}{3}y,\\ x\geqslant5,y\geqslant5,\end{cases}\quad z=0.4x+0.6y.$$

当 $x=24$，$y=36$ 时，$z_{最大}=31.2$(万元).

【答案】 B

【解后感言】 利用线性规划求实际问题的最大最小值问题是近两年高考试题中的异军突起，望考生注意掌握.

例3 2003年8月长江三峡电厂四台机组开始发电，每台机组日最大发电量为0.168亿度，每度电输送成本为0.32元，与此同时长江葛洲坝电厂有8台机组发电，每台机组日最大发电量为0.12亿度，每度电输送成本为0.35元. 由于高温和工业生产需要，江浙地区用电量增大，日增需求量至少1.35亿度.

(Ⅰ)假设你是一位电力调度总指挥，请你设计两大电厂每天各机组发电输送方案；

(Ⅱ)设长江电力公司电力调度总指挥安排三峡电厂 x 台机组发电、葛洲坝电厂 y 台机组发电输送江浙地区，输送成本为 z 亿元. 写出 x，y 应满足的条件以及 z 与 x，y 之间的函数关系式；

(Ⅲ)假设你是长江电力公司总经理，为使公司电力输送成本最小，每天如何安排两大电厂的发电机组数，可以满足江浙地区用电日增需求量？

【解】 (Ⅰ)设计两大电厂每天各机组发电输送方案如下：

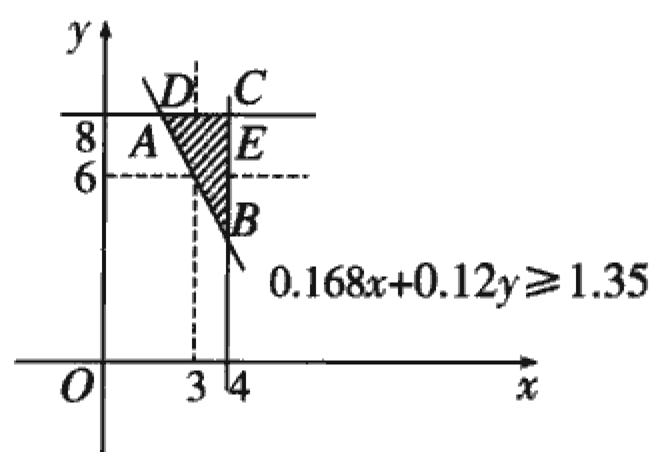
方案	三峡电厂机组数	葛洲坝电厂机组数	日最大发电量(亿度)
方案 1	4	8	1.632
方案 2	4	7	1.512
方案 3	4	6	1.392
方案 4	3	8	1.464

(Ⅱ)依题意写出 x,y 应满足的条件以及 z 与 x,y 之间的函数关系式如下：

$$\begin{cases}0.168x+0.12y\geqslant1.35,\\0\leqslant x\leqslant4,\\0\leqslant y\leqslant8.\end{cases}\quad(x,y\in\mathbf{N}).$$

$z=0.32\times0.168x+0.35\times0.12y\quad(x,y\in\mathbf{N}).\qquad(*)$

(Ⅲ)由(Ⅱ)作相关直线如图所示.求得 $A(2.32,8)$, $B(4,5.65)$, $C(4,8)$.



由于 x,y 取整数，且由(Ⅰ)知，还需考虑 $D(3,8)$ 和 $E(4,6)$ 处的 z 值，将 C,D,E 三点的坐标代入(*)式得

$z_C=0.55104$,

$z_D=0.49728$,

$z_E=0.46704$.

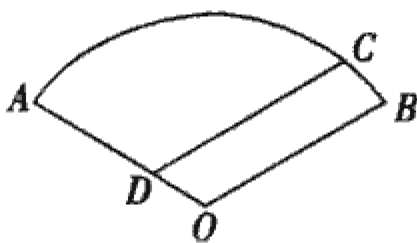
显然 $z_E<z_D<z_C$,

故安排三峡电厂 4 台机组发电、葛洲坝电厂 6 台机组发电输送江浙地区，可使公司电力输送成本最小.

【解后感言】 这是一道“请你决策”的试题，可以调动学生的积极性，也可以从某种角度窥测学生的个性和应用能力.

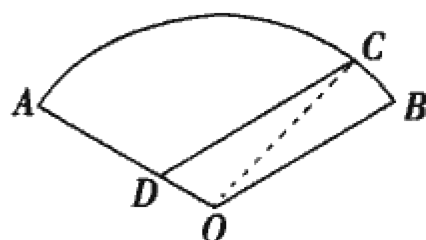
六、解析几何的应用

例 1 (2008 年上海高考理 · T17)如图，某住宅小区的平面图呈圆心角为 120°的扇形 AOB. 小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处，且小区里有一条平行于 BO 的小路 CD. 已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了 10 分钟，从 D 沿 DA 走到 A 用了 6 分钟. 若此人步行的速度为每分钟 50 米，求该扇形的半径 OA 的



长(精确到 1 米).

【规范解析】 解法一:设该扇形的半径为 r 米,连结 CO.



由题意,得 $CD=500$(米),$DA=300$(米),$\angle CDO=60^\circ$.

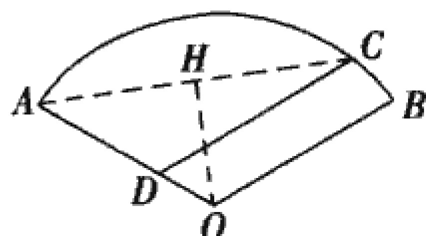
在$\triangle CDO$中,$CD^2+OD^2-2\cdot CD\cdot OD\cdot\cos60^\circ=OC^2$,

即 $500^2+(r-300)^2-2\times500\times(r-300)\times\frac{1}{2}=r^2$,

解得 $r=\frac{4\ 900}{11}\approx445$(米).

答:该扇形的半径 OA 的长约为 445 米.

解法二:连结 AC,作 $OH\perp AC$,交 AC 于 H.



由题意,得 $CD=500$(米),$AD=300$(米),$\angle CDA=120^\circ$.

在$\triangle ACD$中,$AC^2=CD^2+AD^2-2\cdot CD\cdot AD\cdot\cos120^\circ$

$=500^2+300^2+2\times500\times300\times\frac{1}{2}=700^2$,

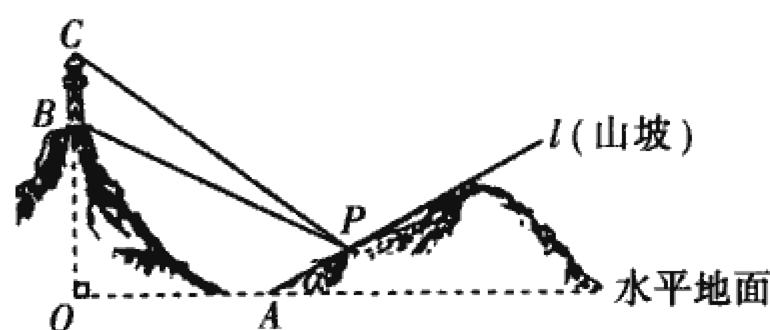
$\therefore AC=700$(米),$\cos\angle CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2\cdot AC\cdot AD}=\frac{11}{14}$.

在直角$\triangle HAO$中,$AH=350$(米),$\cos\angle HAO=\frac{11}{14}$.

$\therefore OA=\frac{AH}{\cos\angle HAO}=\frac{4\ 900}{11}\approx445$(米).

答:该扇形的半径 OA 的长约为 445 米.

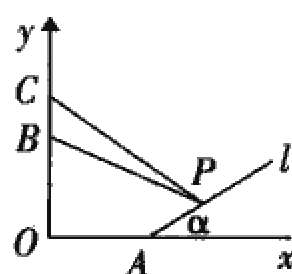
例 2 某人在一山坡 P 处观看对面山顶上的一座铁塔,如图所示.塔高 $BC=80$(m),塔所在的山高 $OB=220$(m),$OA=200$(m).图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上,l 与水平地面的夹角为 α,$\tan\alpha=\frac{1}{2}$.试问,此人距水平地面多高时,观看塔的视角$\angle BPC$最大(不计此人的身高?)



【解】 如图所示，建立平面直角坐标系，则 $A(200,0)$，$B(0,220)$，$C(0,300)$.

直线 l 的方程为 $y=(x-200)\tan\alpha$，

即 $y=\dfrac{x-200}{2}$.



设点 P 的坐标为(x,y)，则 $P\left(x,\dfrac{x-200}{2}\right)$，$x>200$.

由经过两点的直线的斜率公式，得

$$k_{PC}=\frac{\frac{x-200}{2}-300}{x}=\frac{x-800}{2x},$$

$$k_{PB}=\frac{\frac{x-200}{2}-220}{x}=\frac{x-640}{2x}.$$

由直线 PC 到直线 PB 的角的公式得

$$\tan\angle BPC=\frac{k_{PB}-k_{PC}}{1+k_{PB}\cdot k_{PC}}$$

$$=\frac{\frac{160}{2x}}{1+\frac{x-800}{2x}\cdot\frac{x-640}{2x}}$$

$$=\frac{64x}{x^2-288x+160\times 640}$$

$$=\frac{64}{x+\frac{160\times 640}{x}-288}(x>200).$$

要使 $\tan\angle BPC$ 达到最大，只须 $x+\dfrac{160\times 640}{x}-288$ 达到最小. 由均值不等式

$$x+\frac{160\times 640}{x}-288\geqslant 2\sqrt{160\times 640}-288,$$

当且仅当 $x=\frac{160\times640}{x}$ 时上式取得等号. 故当 $x=320$ 时, $\tan\angle BPC$ 最大. 这时, 点 P 的纵坐标 y 为

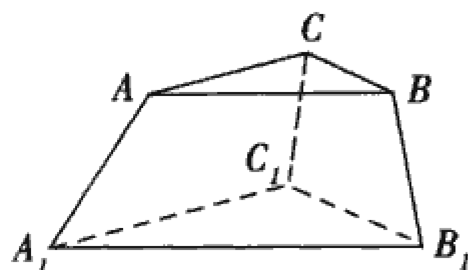
$$y=\frac{320-200}{2}=60.$$

由此实际问题知, $0<\angle BPC<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan\angle BPC$ 最大时, $\angle BPC$ 最大. 故当此人距水平地面 60m 高时, 观看铁塔的视角 $\angle BPC$ 最大.

【解后感言】 这里借助直线的夹角公式, 将视角的最值问题化归为点的坐标来处理, 最后又回到常用的均值不等式上来解决.

七、立体几何的应用

例 1 (2008 年重庆高考理・T16)某人有 4 种颜色的灯泡(每种颜色的灯泡足够多), 要在如题图所示的 6 个点 A,B,C,A_1,B_1,C_1 上各装一个灯泡, 要求同一条线段两端的灯泡不同色, 则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有_______种(用数字作答).



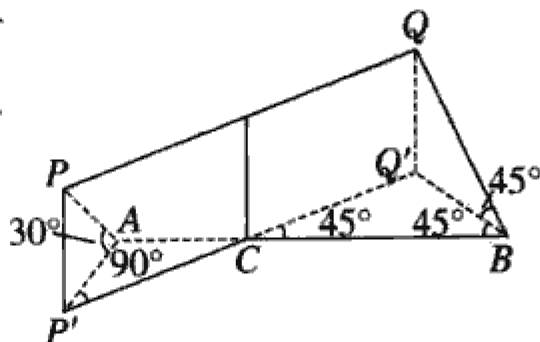
【解析】 按分步法计算. 第一步安装 A、B、C 有 A_4^3 种方法; 第二步将所剩颜色灯泡装到 A_1,B_1,C_1 中任一点有 C_3^1 种方法; 第三步用前三种颜色中任两种灯泡装到剩余两点上有 $1+1+1$ 种方法.

故共有 $A_4^3\times C_3^1\times(1+1+1)=216$ 种不同的装法.

【答案】 216

例 2 B 地在 A 地正东 6 km 处, 一架飞机保持一定的高度以等速往东北方向飞行. 先在 A 点测得飞机位于正南方向且仰角 $30°$, 1 min 后, 在 B 点测得飞机位于西北方向且仰角 $45°$. 假定 A,B 两地的海拔高度相同, 试求飞机飞行的高度和速度.

【解】 如图, 依题意作出飞行线 PQ 及相应的方位图, 其中 P,Q 两点在地面上的射影依次是 P', Q', 则



$\angle BAP'=90°$,

$\angle P'AP=30°$,

$\angle AP'Q'=45^\circ$,

$\angle ABQ'=45^\circ$,

$\angle Q'BQ=45^\circ$.

设 $PP'=QQ'=x$,$P'Q'\cap AB=C$,则

$AP'=\sqrt{3}x$,$BQ'=x$,$\angle ACP'=\angle BCQ'=45^\circ$.

$\therefore AC=\sqrt{3}x$,$P'C=\sqrt{6}x$,$BC=\sqrt{2}x$,$Q'C=x$. 于是 $6=AB=AC+CB=(\sqrt{3}+\sqrt{2})x$,

故 $x=6(\sqrt{3}-\sqrt{2})\approx1.9$(km).

$\therefore v=60\cdot PQ=60\cdot(P'C+Q'C)=60(1+\sqrt{6})x\approx395$(km/h.)

答:飞行高度约是 1.9 km,速度约是 395 km/h.

【解后感言】 本例中注意用方位角与空间角确定点的位置.

八、概率统计的应用

解题秘言:由于概率统计自身的学科特点的原因,概率统计与数学期望类的应用题在近两年的高考试题中大量涌现,已成为高考题中热点的热点.

例 1 (2008 年江西高考理·T18)因冰雪灾害,某柑橘基地果林严重受损,为此有关专家提出两种拯救果树的方案,每种方案都需分两年实施. 若实施方案一,预计第一年可以使柑橘产量恢复到灾前的 1.0 倍、0.9 倍、0.8 倍的概率分别是 0.3,0.3,0.4;第二年可以使柑橘产量为第一年产量的 1.25 倍、1.0 倍的概率分别是 0.5,0.5. 若实施方案二,预计第一年可以使柑橘产量达到灾前的 1.2 倍、1.0 倍、0.8 倍的概率分别是 0.2,0.3,0.5;第二年可以使柑橘产量为第一年产量的 1.2 倍、1.0 倍的概率分别是 0.4,0.6. 实施每种方案第一年与第二年相互独立,令 $\xi_i(i=1,2)$ 表示方案 i 实施两年后柑橘产量达到灾前产量的倍数.

(1)写出 ξ_1,ξ_2 的分布列;

(2)实施哪种方案,两年后柑橘产量超过灾前产量的概率更大?

(3)不管哪种方案,如果实施两年后柑橘产量达不到、恰好达到、超过灾前产量,预计利润分别为 10 万元、15 万元、20 万元. 问实施哪种方案的平均利润更大?

【规范解析】 (1)ξ_1 的取值为 0.8,0.9,1.0,1.125,1.25;

ξ_2 的取值为 0.8,0.96,1.0,1.2,1.44.

ξ_1,ξ_2 的分布列分别为:

ξ_1	0.8	0.9	1.0	1.125	1.25
P	0.3	0.15	0.25	0.15	0.15

ξ_2	0.8	0.96	1.0	1.2	1.44
P	0.3	0.2	0.18	0.24	0.08

(2)A,B 分别表示方案一、二两年后柑橘产量超过灾前，

$P(A)=0.15+0.15=3$，

$P(B)=0.24+0.08=0.32$，

所以应实施方案二.

③令 η_i 表示方案 i 的预计利润，则

η_1	10	15	20
P	0.35	0.35	0.3

η_2	10	15	20
P	0.5	0.18	0.32

所以，$E_{\eta_1}=14.75$， $E_{\eta_2}=14.10$.

所以方案一预计利润大.

例2 (2008年天津高考理·T18)甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球，命中率分别为$\frac{1}{2}$与 p，且乙投球 2 次均未命中的概率为$\frac{1}{16}$.

(Ⅰ)求乙投球的命中率 p；

(Ⅱ)若甲投球 1 次，乙投球 2 次，两人共命中的次数记为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望.

【规范解析】 (Ⅰ)设"甲投球一次命中"为事件 A，"乙投球一次命中"为事件 B.

由题意得

$(1-P(B))^2=(1-p)^2=\frac{1}{16}$，

解得 $p=\frac{3}{4}$ 或 $p=\frac{5}{4}$(舍去)，所以乙投球的命中率为$\frac{3}{4}$.

(Ⅱ)由题设和(Ⅰ)知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(\overline{A})=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{B})=\frac{1}{4}$. ξ 可能的取值为 0,1,2,3，故

$P(\xi=0)=P(\overline{A})P(\overline{B}\cdot\overline{B})=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{32}$，

$P(\xi=1)=P(A)P(\overline{B}\cdot\overline{B})+C_2^1P(B)P(\overline{B})\cdot P(\overline{A})$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{32}$,

$P(\xi=3)=P(A)P(B\cdot B)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{32}$.

例 3 (2007 年陕西高考理・T18)某项选拔共有三轮考核,每轮设有一个问题,能正确回答问题者进入下一轮考核,否则即被淘汰.已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{2}{5}$,且各轮问题能否正确回答互不影响.

(1)求该选手被淘汰的概率;

(2)该选手在选拔中回答问题的个数记为 ξ,求随机变量 ξ 的分布列与数学期望.

(注:本小题结果可用分数表示)

【规范解析】 **解法一**:(1)记"该选手能正确回答第 i 轮的问题"的事件为$A_i(i=1,2,3)$,

则 $P(A_1)=\frac{4}{5}$,$P(A_2)=\frac{3}{5}$,$P(A_3)=\frac{2}{5}$,

∴该选手被淘汰的概率为

$P=P(\overline{A_1}+A_1\overline{A_2}+A_1A_2\overline{A_3})$

$=P(\overline{A_1})+P(A_1)P(\overline{A_2})+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})$

$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{101}{125}$.

(2)ξ 的可能值为 1,2,3.

$P(\xi=1)=P(\overline{A_1})=\frac{1}{5}$,

$p(\xi=2)=P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)P(\overline{A_2})=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$,

$P(\xi=3)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$.

∴ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{12}{25}$

∴$E\xi=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{8}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{57}{25}$.



解法二：(1)记“该选手能正确回答第 i 轮的问题”的事件为 $A_i(i=1,2,3)$，则 $P(A_1)=\frac{4}{5}$，$P(A_2)=\frac{3}{5}$，$P(A_3)=\frac{2}{5}$.

∴该选手被淘汰的概率为 $P=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)$
$P(A_3)=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{101}{125}$.

(2)同解法一.

例 4 某工厂生产甲、乙两种产品，每种产品都是经过第一和第二道工序加工而成，两道工序的加工结果相互独立，每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级. 对每种产品，两道工序的加工结果都为 A 级时，产品为一等品，其余均为二等品.

(Ⅰ)已知甲、乙两种产品每一道工序的加工结果为 A 级的概率如表 1 所示，分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_甲$，$P_乙$；

表 1

工序 / 概率 / 产品	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

(Ⅱ)已知一件产品的利润如表 2 所示，用 ξ，η 分别表示一件甲、乙产品的利润，在(Ⅰ)的条件下，求 ξ，η 的分布列及 $E\xi$，$E\eta$；

表 2

等级 / 利润 / 产品	一等	二等
甲	5(万元)	2.5(万元)
乙	2.5(万元)	1.5(万元)

(Ⅲ)已知生产一件产品需用的工人数和资金额如表 3 所示. 该工厂有工人 40 名，可用资金 60 万元. 设 x，y 分别表示生产甲、乙产品的数量，在(Ⅱ)的条件下，x，y 为何值时，$z=xE\xi+yE\eta$ 最大？最大值是多少？(解答时须给出图示)

表 3

用量 项目 / 产品	工人(名)	资金(万元)
甲	8	5
乙	2	10

【解】 (Ⅰ)$P_{甲}=0.8\times0.85=0.68$,$P_{乙}=0.75\times0.8=0.6$.

(Ⅱ)随机变量 ξ,η 的分布列是

ξ	5	2.5
P	0.68	0.32

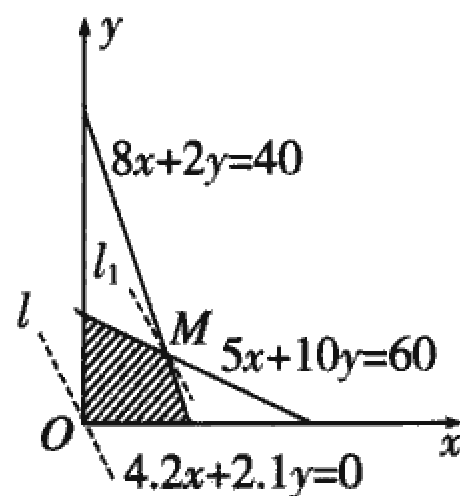
η	2.5	1.5
P	0.6	0.4

$E\xi=5\times0.68+2.5\times0.32=4.2$,

$E\eta=2.5\times0.6+1.5\times0.4=2.1$.

(Ⅲ)由题设知

$$\begin{cases}5x+10y\leqslant60,\\8x+2y\leqslant40,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$$



目标函数为 $z=xE\xi+yE\eta=4.2x+2.1y$.

作出可行域,作直线 l:$4.2x+2.1y=0$,将 l 向右上方平移至 l_1 位置时,直线经过可行域上的点 M 且与原点距离最大.此时 $z=4.2x+2.1y$ 取最大值.

解方程组 $\begin{cases}5x+10y=60,\\8x+2y=40\end{cases}$ 得 $x=4$,$y=4$.

即 $x=4$,$y=4$ 时,z 取最大值,z 的最大值为 25.2.

【解后感言】 本例将数学期望与线性规划进行整合,也是一道较新颖的数学应用题,也从某一个角度说明数学应用题将会从各个方面进行交汇、整合与翻新.

实战秘修二十

1. 某公司在甲、乙两地销售一种品牌车，利润（单位：万元）分别为 $L_1=5.06x-0.15x^2$ 和 $L_2=2x$，其中 x 为销售量（单位：辆）. 该公司在这两地共销售 15 辆车，则能获得的最大利润为（　　）

A. 45.606　　B. 45.6　　C. 45.56　　D. 45.51

2. 农民收入由工资性收入和其他收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元（其中工资性收入为 1800 元，其他收入为 1350 元），预计该地区自 2004 年起的 5 年内，农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长，其他收入每年增加 160 元. 根据以上数据，2008 年该地区农民人均收入将介于（　　）

A. 4200 元～4400 元　　B. 4400 元～4600 元

C. 4600 元～4800 元　　D. 4800 元～5000 元

3.（2007 年福建高考理·T19）某分公司经销某种品牌产品，每件产品的成本为 3 元，并且每件产品需向总公司交 a 元（$3\leqslant a\leqslant 5$）的管理费，预计当每件产品的售价为 x 元（$9\leqslant x\leqslant 11$）时，一年的销售量为 $(12-x)^2$ 万件.

(1) 求分公司一年的利润 L（万元）与每件产品的售价 x 的函数关系式；

(2) 当每件产品的售价为多少元时，分公司一年的利润 L 最大，并求出 L 的最大值 $Q(a)$.

4. 某公司有 5 万元资金用于投资开发项目. 如果成功，一年可获利 12%；一旦失败，一年后将丧失全部资金的 50%. 下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果.

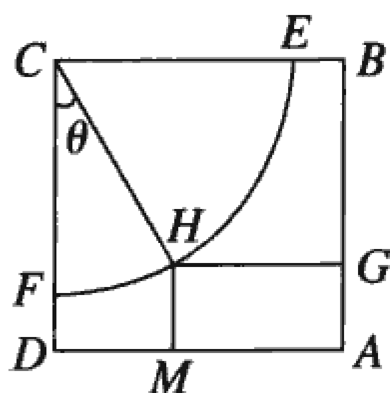
投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是________（元）.

5. 某工厂要制造 A 种电子装置 45 台，B 种电子装置 55 台，需用薄钢板给每台装置配一个外壳. 已知薄钢板的面积有两种规格. 甲种钢板每张面积 2m^2，可做 A，B 的外壳分别为 3 个和 5 个；乙种钢板每张面积 3m^2，可做 A、B 的外壳各 6 个. 求两种薄钢板各用________张，才能使总的用料面积最省.

6. 某体育馆拟用运动场的边角地建一个矩形的健身室，如图，$ABCD$ 是一块边长为 50m 的正方形地皮，扇形 CEF 是运动场的一部分，其半径为 40m. 矩形 $AGHM$ 就

是拟建的健身室，其中 G,M 分别在 AB 和 AD 上，H 在 $\overset{\frown}{EF}$ 上. 设矩形 $AGHM$ 的面积为 S，$\angle HCF=\theta$，请将 S 表示为 θ 的函数，并指出当点 H 在 $\overset{\frown}{EF}$ 的何处时，该健身室的面积最大，最大面积是多少？



7. 某商场在促销期间规定：商场内所有商品按标价的 80% 出售；同时，当顾客在该商场内消费满一定金额后，按如下方案获得相应金额的奖券：

消费金额(元)的范围	[200,400)	[400,500)	[500,700)	[700,900)	…
获得奖券的金额(元)	30	60	100	130	…

根据上述促销方法，顾客在该商场购物可以获得双重优惠. 例如，购买标价为 400 元的商品，则消费金额为 320 元，获得的优惠额为：$400\times0.2+30=110$(元).

设购买商品得到的优惠率$=\dfrac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$. 试问：

(1)若购买一件标价为 1000 元的商品，顾客得到的优惠率是多少？

(2)对于标价在[500,800](元)内的商品，顾客购买标价为多少元的商品，可得到不少于$\dfrac{1}{3}$的优惠率？

8. (2008 年四川高考理 · T18)设进入某商场的每一位顾客购买甲种商品的概率为 0.5，购买乙种商品的概率为 0.6，且购买甲种商品与购买乙种商品相互独立，各顾客之间购买商品也是相互独立的.

(Ⅰ)求进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率；

(Ⅱ)求进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种的概率；

(Ⅲ)记 ξ 表示进入商场的 3 位顾客中至少购买甲、乙两种商品中的一种的人数，求 ξ 的分布列及期望.

9. 某租赁公司拥有汽车 100 辆，当每辆车的月租金为 3000 元时，可全部租出；当每辆车的月租金每增加 50 元时，未租出的车将会增加一辆，租出的车每辆每月需要维护费 150 元，未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.

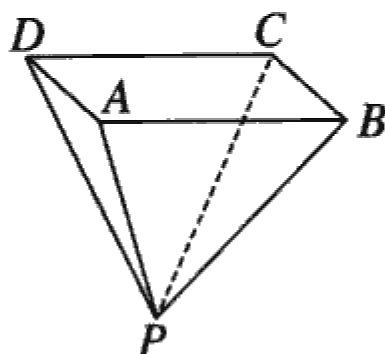
(1)当每辆车的月租金定为 3600 元时，能租出多少辆车？

(2)当每辆车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益最大，最大月收益是多少？

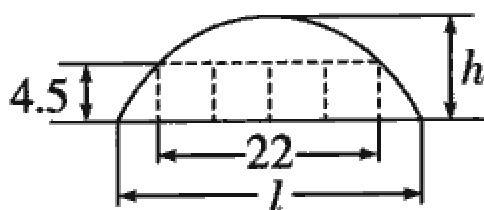
10. 用一块钢锭浇铸一个厚度均匀且全面积为 $2m^2$ 的正四棱锥形有盖容器，如下图所示，设容器的高为 hm，盖子边长为 am.

(1)求 a 关于 h 的函数表达式；

(2)设容器的容积为 $V\text{m}^3$，则当 h 为何值时，V 最大？求出 V 的最大值.(求解本题时，不计容器的厚度.)



11. 如图，某隧道设计为双向四车道，车道总宽 22m，要求通行车辆限高 4.5m，隧道全长 2.5km，隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.



(1)若最大拱高 h 为 6m，则隧道设计的拱宽 l 是多少？

(2)若最大拱高 h 不小于 6m，则应如何设计拱高 h 和拱宽 l，才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小？(半个椭圆的面积公式为 $S=\frac{\pi}{4}lh$，柱体体积为底面积乘以高，本题结果均精确到 0.1m.)

12. 假设你要开一家卖 T 恤和运动鞋的小商店，由于资金和店里的面积有限，在你经营时受到如下限制；

(1)你最多能进 50 件 T 恤：

(2)你最多能进 30 双运动鞋；

(3)你至少需要 T 恤和运动鞋共 40 件才能维持经营；

(4)已知进货价为：T 恤每件 36 元，运动鞋每双 48 元，现在你有 2400 元资金，假设每件 T 恤的利润是 18 元，每双运动鞋的利润是 20 元，问如何进货可以使你取得最大利润？

13. 某会议室用 5 盏灯照明，每盏灯各使用灯泡一只，且型号相同. 假定每盏灯能否正常照明只与灯泡的寿命有关，该型号的灯泡寿命为 1 年以上的概率为 p_1，寿命为 2 年以上的概率为 p_2. 从使用之日起每满 1 年进行一次灯泡更换工作，只更换已坏的灯泡，平时不换.

(1)在第一次灯泡更换工作中，求不需要更换灯泡的概率和更换 2 只灯泡的概率；

(2)在第二次灯泡更换工作中,对其中的某一盏灯来说,求该盏灯需要更换灯泡的概率;

(3)当 $p_1=0.8, p_2=0.3$ 时,求在第二次灯泡更换工作中,至少需要更换4只灯泡的概率(结果保留两个有效数字).

14. 9粒种子分种在3个坑内,每坑3粒,每粒种子发芽的概率为0.5.若一个坑内至少有1粒种子发芽,则这个坑不需要补种;若一个坑内的种子都没发芽,则这个坑需要补种.假定每个坑至多补种一次,每补种1个坑需10元,用 ξ 表示补种费用,写出 ξ 的分布列并求 ξ 的数学期望(精确到0.01).

15. 在一次购物抽奖活动中,假设某10张券中有一等奖券1张,可获价值50元的奖品;有二等奖券3张,每张可获价值10元的奖品;其余6张没有奖.某顾客从此10张券中任抽2张,求

(1)该顾客中奖的概率;

(2)该顾客获得的奖品总价值 ξ(元)的概率分布和期望 $E\xi$.

16. (2008年山东高考理·T18)甲、乙两队参加奥运知识竞赛,每队3人,每人回答一个问题,答对者为本队赢得一分,答错得零分.假设甲队中每人答对的概率均为 $\frac{2}{3}$,乙队中3人答对的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$,且各人回答正确与否相互之间没有影响.用 ξ 表示甲队的总得分.

(Ⅰ)求随机变量 ξ 的分布列和数学期望;

(Ⅱ)用 A 表示"甲、乙两个队总得分之和等于3"这一事件,用 B 表示"甲队总得分大于乙队总得分"这一事件,求 $P(AB)$.

实战秘修二十答案与提示

1. B　设在甲地销售 x 辆($0\leqslant x\leqslant 15, x\in \mathbf{N}$),则利润

$$L=5.06x-0.15x^2+2(15-x)=3.06x-0.15x^2+30,$$

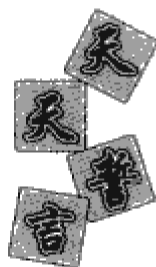
$$L'=-0.3x+3.06,$$

令 $L'=0$ 得 $x=10.2$.

当 $x=11$ 时,$L=45.51$;当 $x=10$ 时,$L=45.6$.

(用配方法也可,但计算量较大)

2. B　2008年该地区农民人均收入为



$1800(1+6\%)^5+1350+5\times160$

$=2150+1800[C_5^0+C_5^1\cdot6\%+\cdots+C_5^5(6\%)^5]$

$\approx2150+1800(1+0.3+0.036)=4554.8$(元).

3. **解**:(1)分公司一年的利润 L(万元)与售价 x 的函数关系式为 $L=(x-3-a)(12-x)^2,x\in[9,11]$.

(2)$L'(x)=(12-x)^2-2(x-3-a)(12-x)=(12-x)(18+2a-3x)$.

令 $L'=0$ 得 $x=6+\frac{2}{3}a$ 或 $x=12$(不合题意,舍去).

$\because 3\leqslant a\leqslant5,\therefore 8\leqslant6+\frac{2}{3}a\leqslant\frac{28}{3}$.

在 $x=6+\frac{2}{3}a$ 两侧 L'的值由正变负.

所以①当 $8\leqslant6+\frac{2}{3}a<9$,即 $3\leqslant a<\frac{9}{2}$时,

$L_{\max}=L(9)=(9-3-a)(12-9)^2=9(6-a)$.

②当 $9\leqslant6+\frac{2}{3}a\leqslant\frac{28}{3}$,即$\frac{9}{2}\leqslant a\leqslant5$ 时,$L_{\max}=L\left(6+\frac{2}{3}a\right)=\left(6+\frac{2}{3}a-3-a\right)\left[12-\left(6+\frac{2}{3}a\right)\right]^2=4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3$.

所以 $Q(a)=\begin{cases}9(6-a), & 3\leqslant a<\frac{9}{2},\\ 4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3, & \frac{9}{2}\leqslant a\leqslant5.\end{cases}$

答:若 $3\leqslant a<\frac{9}{2}$,则当每件售价为 9 元时,分公司一年的利润 L 最大,最大值 $Q(a)=9(6-a)$(万元);若$\frac{9}{2}\leqslant a\leqslant5$,则当每件售价为$\left(6+\frac{2}{3}a\right)$元时,分公司一年的利润 L 最大,最大值 $Q(a)=4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3$(万元).

4. 4760(元)

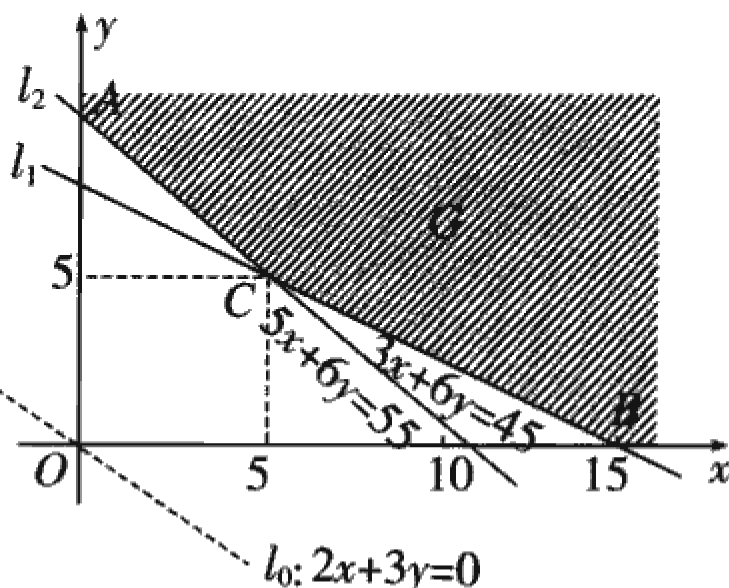
ξ的分布列为:

ξ	0.6	−2.5
P	$\frac{192}{200}$	$\frac{8}{200}$

$\therefore E\xi=0.6\times\frac{192}{200}-2.5\times\frac{8}{200}=4760$(元).

5. 各 5 张　设用甲种钢板 x 张,乙种钢板 y 张,则可做 A 种产品外壳 $3x+6y$ 个,B 种产品外壳 $5x+6y$ 个.依题意得可行域

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ 3x+6y\geqslant 45\\ 5x+6y\geqslant 55\end{cases}$$

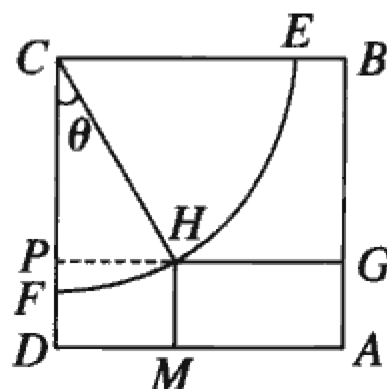


所用钢板总面积 $p=2x+3y(\mathrm{m}^2)$ 为目标函数.

如右图,直线 l_1:$3x+6y=45$ 和 l_2:$5x+6y=55$ 交于 $C(5,5)$.

过 $O(0,0)$ 作 l_0:$2x+3y=0$,平移 l_0 过 $C(5,5)$ 得最小 $p=25(\mathrm{m}^2)$.

6. 如右图,延长 GH 交 CD 于 P,则 $HP\perp CD$,$\angle HCP=\theta\in[0,90°]$,



故 $HP=CH\cdot\sin\theta=40\sin\theta$,$CP=CH\cos\theta=40\cos\theta$.

于是 $HG=50-40\sin\theta$,$HM=50-40\cos\theta$.

$\therefore S_{\text{矩形}AGHM}=HG\cdot HM=(50-40\sin\theta)(50-40\cos\theta)$

$=100[25-20(\sin\theta+\cos\theta)+16\sin\theta\cos\theta]$.

令 $u=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$,则 $u^2=1+2\sin\theta\cos\theta(1\leqslant u\leqslant\sqrt{2})$.

$\therefore S_{\text{矩形}AGHM}=100[25-20u+8(u^2-1)]$

$$=800\left(u-\frac{5}{4}\right)^2+450(1\leqslant u\leqslant\sqrt{2}).$$

$\therefore$当 $u=1$ 时,$S_{\text{矩形}AGHM}$达到最大值 $500(\mathrm{m}^2)$,此时 $\theta°=0$ 或 $90°$.

故当点 H 在 $\overset{\frown}{EF}$ 的端点 E 或 F 处时,矩形健身室的面积最大,最大面积是 $500\ \mathrm{m}^2$.

7. (1)购买标价为 1000 元的商品,消费金额是:$100\times80\%=800$(元),则可获得奖券 130 元,故顾客得到的优惠率为

$$\frac{(1000-800)+130}{1000}=33\%.$$

(2)设商品的标价是 x 元,则 $500\leqslant x\leqslant800$,

故消费额为 $x\cdot 80\%\in[400,640]$(元)，则有

$$\begin{cases}\dfrac{x\cdot 2\%+60}{x}\geqslant\dfrac{1}{3},\\ 400\leqslant x\cdot 800\%<500\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{x\cdot 20\%+100}{x}\geqslant\dfrac{1}{3},\\ 500\leqslant x\cdot 80\%\leqslant 640.\end{cases}$$

解得 $625\leqslant x\leqslant 750$.

故购买标价为 625 元～750 元的商品，顾客可得到不少于$\frac{1}{3}$的优惠率.

8. **解析**：记 A 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买甲种商品，

B 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买乙种商品，

C 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种，

D 表示事件：进入商场的 1 位顾客至少购买甲、乙两种商品中的一种.

(Ⅰ)$C=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$，

$P(C)=P(A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B)=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)$

$=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)$

$=0.5\times 0.4+0.5\times 0.6=0.5$.

(Ⅱ)$\overline{D}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，

$P(\overline{D})=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.5\times 0.4=0.2$，

$P(D)=1-P(\overline{D})=0.8$.

(Ⅲ)$\xi\sim B(3,0.8)$，故 ξ 的分布列为

$P(\xi=0)=0.2^3=0.008$，

$P(\xi=1)=C_3^1\times 0.8\times 0.2^2=0.096$，

$P(\xi=2)=C_3^2\times 0.8^2\times 0.2=0.384$，

$P(\xi=3)=0.8^3=0.512$.

所以 $E\xi=3\times 0.8=2.4$.

9. (1)$\frac{3600-3000}{50}=12$，即未租出的车为 12 辆，则租出的车为 88 辆.

(2)设每辆车的月租金定为 x 元，则租赁公司的月收益为

$$f(x)=\left(100-\frac{x-3000}{50}\right)(x-150)-\frac{x-3000}{50}\times 50,$$

整理得
$$f(x)=-\frac{1}{50}(x-4050)^2+307050.$$

∴当 $x=4050$ 时，$f(x)$ 最大值为 307050.

故当每辆车的月租金定为 4050 元时，租赁公司的月收益最大，最大月收益为 307050 元.

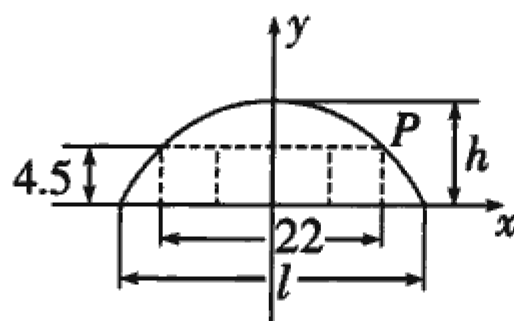
10.(1)设 h' 是正四棱锥的斜高，由题设得

$$\begin{cases} a^2+4\times\frac{1}{2}h'a=2 \\ h^2+\frac{1}{4}a^2=h'^2 \end{cases}$$ 解之得 $a=\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}(h>0)$.

(2)由 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{h}{3(h^2+1)}(h>0)$ 得 $V=\frac{1}{3\left(h+\frac{1}{h}\right)}$.

又 $h+\frac{1}{h}\geqslant 2\sqrt{h\cdot\frac{1}{h}}=2$，$\therefore V\leqslant\frac{1}{6}$，当且仅当 $h=\frac{1}{h}$，即 $h=1$ 时取等号.

故当 $h=1$ 米时，V 有最大值，且 V 的最大值为 $\frac{1}{6}\text{m}^3$.



11.(1)如右图建立直角坐标系，则点 $P(11,4.5)$，设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

将 $b=h=6$ 与点 P 坐标代入椭圆方程得

$a=\frac{44\sqrt{7}}{7}$，此时 $l=2a=\frac{88\sqrt{7}}{7}\approx 33.3$.

故隧道的拱宽约为 33.3 米.

(2)$\because$ 点 $P(11,4.5)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，

$\therefore \frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$.

$\because \frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}\geqslant\frac{2\times 11\times 4.5}{ab}$，即 $ab\geqslant 99$，

又 $l=2a$，$h=b$.

$\therefore S=\frac{\pi}{4}lh=\frac{\pi ab}{2}\geqslant\frac{99\pi}{2}$.

当 S 取最小值时，有 $\frac{11^2}{a^2}=\frac{4.5^2}{b^2}=\frac{1}{2}$，

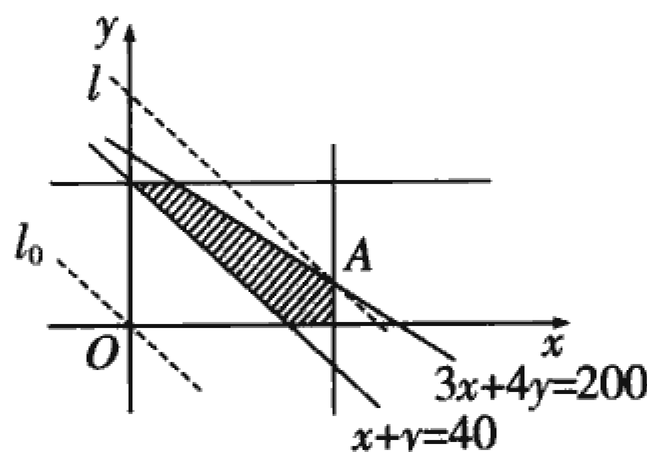
$\therefore a=11\sqrt{2}$，$b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

此时 $l=2a=22\sqrt{2}\approx31.1, h=b\approx6.4$.

故当拱高约为 6.4 m,拱宽约为 31.1 m 时,土方工程量最小.

12. 设购进 x 件 T 恤,y 双运动鞋,利润为 z 元,

则由题意应有



$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 50\\0\leqslant y\leqslant 30\\x+y\geqslant 40\\36x+48y\leqslant 2400\end{cases}\quad 即\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 50\\0\leqslant y\leqslant 30\\x+y\geqslant 40\\3x+4y\leqslant 200\end{cases}$$

$z=18x+20y$

如上图,作出可行域,作直线 l_0:$18x+20y=0$,即 $9x+10y=0$.

当直线 l_0 平移至过 A 点即成为直线 l 时,z 取最大值.易求得 $A\left(50,\frac{25}{2}\right)$.

此时 $z=18\times50+20\times\frac{25}{2}=1150$.

但经检验 $A\left(50,\frac{25}{2}\right)$不是实际最优解.

令 $18x+20y=1148$,由于 $0\leqslant x\leqslant50$,$0\leqslant y\leqslant30$,

$\therefore\begin{cases}x=36\\y=25\end{cases}$或$\begin{cases}x=46\\y=16\end{cases}$

但经检验(36,25),(46,16)仍不是可行解.

同理令 $18x+20y=1146$,则$\begin{cases}x=37\\y=24\end{cases}$或$\begin{cases}x=47,\\y=15.\end{cases}$但经检验也不是可行解.

再令 $18x+20y=1144$,则$\begin{cases}x=38,\\y=23\end{cases}$或$\begin{cases}x=48,\\y=14.\end{cases}$

经检验,其中$\begin{cases}x=48\\y=14\end{cases}$是可行解.

故购进 48 件 T 恤,14 双运动鞋可获得最大利润.

13. (1)在第一次更换灯泡工作中,不需更换灯泡的概率为 p_1^5,需要更换 2 只灯泡的概率为

$$C_5^2p_1^3(1-p_1)^2;$$

(2)对该盏灯来说,在第 1,2 次都更换了灯泡的概率为$(1-p_1)^2$;在第一次未更

换灯泡而在第二次需要更换灯泡的概率为 $p_1(1-p_2)$，故所求的概率为

$$p=(1-p_1)^2+p_1(1-p_2);$$

(3)至少换 4 只灯泡包括换 5 只和换 4 只两种情况. 换 5 只的概率为 p^5（其中 p 为(2)中所求，下同）；换 4 只的概率为 $C_5^1p^4(1-p)$，故至少换 4 只灯泡的概率为

$$p_3=p^5+C_5^1p^4(1-p).$$

又当 $p_1=0.8$，$p_2=0.3$ 时，$p=0.2^2+0.8\times0.7=0.6$.

$\therefore\quad p_3=0.6^5+5\times0.6^4\times0.4=0.34$.

即满 2 年至少需要换 4 只灯泡的概率为 0.34.

14. 因为单个坑内的 3 粒种子都不发芽的概率为 $(1-0.5)^3=\frac{1}{8}$，所以单个坑不需要补种的概率为

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

3 个坑都不需要补种的概率为

$$C_3^0\times\left(\frac{1}{8}\right)^0\times\left(\frac{7}{8}\right)^3=0.670,$$

恰有 1 个坑需要补种的概率为

$$C_3^1\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^2=0.287,$$

恰有 2 个坑需要补种的概率为

$$C_3^2\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\frac{7}{8}=0.041,$$

3 个坑都需要补种的概率为

$$C_3^3\times\left(\frac{1}{8}\right)^3\times\left(\frac{7}{8}\right)^0=0.002.$$

补种费用 ξ 的分布列为

ξ	0	10	20	30
P	0.670	0.287	0.041	0.002

ξ 的数学期望为

$E\xi=0\times0.670+10\times0.287+20\times0.041+30\times0.002=3.75.$



15. **解法一** (1)$P=1-\frac{C_0^2}{C_{10}^2}=1-\frac{15}{45}=\frac{2}{3}$. 即该顾客中奖的概率为$\frac{2}{3}$.

(2)ξ的所有可能值为:0,10,20,50,60(元).

且 $P(\xi=0)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$,

$P(\xi=10)=\frac{C_3^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{5}$,

$P(\xi=20)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$,

$P(\xi=50)=\frac{C_1^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$,

$P(\xi=60)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$.

故ξ有分布列:

ξ	0	10	20	50	60
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

从而期望 $E\xi=0\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{5}+20\times\frac{1}{15}+50\times\frac{2}{15}+60\times\frac{1}{15}=16$.

解法二 (1)$P=\frac{(C_4^1C_6^1+C_4^2)}{C_{10}^2}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$.

(2)ξ的分布列求法同解法一.

由于 10 张奖券总价值为 80 元,即每张奖券的平均奖品价值为 8 元,从而抽 2 张奖券的平均奖品价值

$$E\xi=2\times8=16(元).$$

16. **解析**:(Ⅰ)解法一:由题意知,ξ的可能取值为 0,1,2,3,且

$P(\xi=0)=C_3^0\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

$P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

$P(\xi=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$,

$P(\xi=3)=C_3^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

所以ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

ξ的数学期望为

$$E\xi=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2.$$

解法二：根据题设可知，$\xi\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，

因此ξ的分布列为

$$P(\xi=\kappa)=\mathrm{C}_3^\kappa\times\left(\frac{2}{3}\right)^\kappa\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-\kappa}$$

$$=\mathrm{C}_3^\kappa\times\frac{2^\kappa}{3^3},\kappa=0,1,2,3.$$

因为$\xi\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$. 所以$E\xi=3\times\frac{2}{3}=2.$

（Ⅱ）解法一：用C表示“甲得2分乙得1分”这一事件，用D表示“甲得3分乙得0分”这一事件，所以$AB=C\cup D$，且C、D互斥，

又$P(C)=\mathrm{C}_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times$

$$\left[\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right]=\frac{10}{3^4},$$

$$P(D)=\mathrm{C}_3^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3^5},$$

由互斥事件的概率公式得

$$P(AB)=P(C)+P(D)=\frac{10}{3^4}+\frac{4}{3^5}=\frac{34}{3^5}=\frac{34}{243}.$$

解法二：用A_κ表示“甲队得κ分”这一事件，用B_κ表示“乙队得κ分”这一事件，$\kappa=0,1,2,3$. 由于事件A_3B_0，A_2B_1为互斥事件，故有

$P(AB)=P(A_3B_0\cup A_2B_1)=P(A_3B_0)+P(A_2B_1)$.

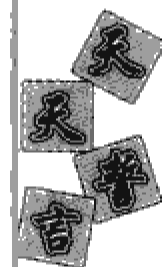
由题设可知，事件A_3与B_0独立，事件A_2与B_1独立，因此$P(AB)=P(A_3B_0)+P(A_2B_1)=P(A_3)P(B_0)+P(A_2)P(B_1)$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3^2}\times\frac{1}{2}\right)+\mathrm{C}_3^2\times\frac{2^2}{3^3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2}\times\mathrm{C}_2^1\times\frac{2}{3^2}\right)=\frac{34}{243}.$$

最后，祝寒窗苦读的您金榜题名，心想事成！

如果您使用本书心有所得并取得了好成绩，请发短信至13954711597，让我们作者共同分享您的成功与喜悦.

亲爱的读者，谢谢您！



附录一

2008年高考数学试题亮点品析及备考策略

北京大学　欧阳妙可

稳定与创新是高考数学的两大主旋律，2008年高考数学试题，注重对数学思想和方法的考查，加大思维含量，突出新的课改理念，试题亮点纷呈，特色明显.

一、新增内容工具化

新课程教材的新增内容为：简易逻辑、向量、概率与统计、导数. 这些内容给高中数学增添了活力，并且提供了更多新的研究方法. 如导数工具的引入与广泛运用，大大拓展了函数的研究范围；向量工具的引入，则使得解析几何、立体几何与代数有了完美的结合.

例1　(**江西卷**)已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3-a^2x^2+a^4(a>0)$

(1)求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 恰有两个交点，求 a 的取值范围.

解析：(1)易求得 $f(x)$ 的递增区间为 $(-2a,0)$ 与 $(a,+\infty)$，$f(x)$ 的递减区间为 $(-\infty,-2a)$ 与 $(0,a)$

(2)由(1)得到 $f(x)_{极小值}=f(-2a)=-\frac{5}{3}a^4$，

$f(x)_{极小值}=f(a)=\frac{7}{12}a^4$

$f(x)_{极大值}=f(0)=a^4$

要使 $f(x)$ 的图像与直线 $y=1$ 恰有两个交点，只要 $-\frac{5}{3}a^4<1<\frac{7}{12}a^4$ 或 $a^4<1$，

即 $a>\sqrt[4]{\frac{12}{7}}$ 或 $0\leqslant a<1$.

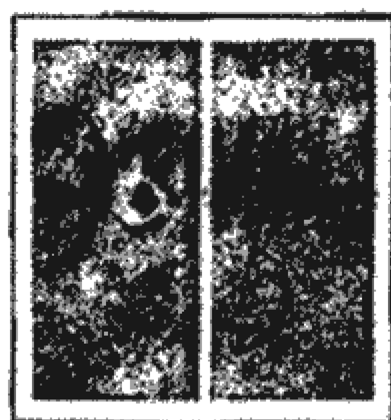
备考启迪：本题主要考查运用函数、导数的知识解决实际问题的能力. 今年的高考趋向于以新增内容为解题工具与传统内容相结合来进行能力考查，如导数使函数的单调性、极值、最值等问题都得到了有效而彻底的解决. 坐标法可以将平面向量与解析几何有机结合起来，将平面向量的坐标运算、直线的方向向量等向量的基本知

识与解析几何的思想方法巧妙地融为一体，情景新颖，体现了新课程高考命题的“新”导向.

二、试题教材习题迁移化

综观 2008 年各地高考数学试题，不难发现很多小题源于教材，也有许多综合题，特别是大部分三角函数题等也是由课本例、习题的组合、加工和延拓而成，充分表现出教材的基础作用. 这些试题源于教材又有创新，解法灵活多变，有效地检测了考生知识迁移的能力.

例 2 （**湖北卷**）如图 1，要设计一张矩形广告，该广告含有大小相等的左右两个矩形栏目（即图中阴影部分），这两栏的面积之和为 18000 cm^2，，四周空白的宽度为 10 cm，两栏之间的中缝空白的宽度为 5 cm，怎样确定广告的高与宽的尺寸（单位：cm），能使矩形广告面积最小？


图 1

解析：设矩形栏目的高为 a cm，宽为 b cm，则 $ab=9000$. ①

广告的高为 $a+20$，宽为 $2b+25$，其中 $a>0,b>0$.

广告的面积 $S=(a+20)(2b+25)=2ab+40b+25a+500=18500+25a+40b\geqslant 18500+2\sqrt{25\cdot 40b}=18500+\sqrt{1000ab}=24500$

当且仅当 $25a=40b$ 时等号成立，此时

$b=\frac{5}{8}a$，代入①式得 $a=120$，从而 $b=75$.

即当 $a=120,b=75$ 时，S 取得最小值 24500.

故广告的高为 140 cm，宽为 175 cm 时，可使广告的面积最小.

备考启迪：课本中每一个例题、习题的设置都有其目的性和导向作用，体现着本节知识所应达到的能力要求，同时也是高考试题命题的源泉. 因此，我们要充分发挥课本例、习题的基础性、典型性、示范性功能. 要坚持“以本为本、以纲为纲”，复习中要加强总结、提练并灵活运用，跳出“题海”，回归课本，重视教材.

三、研究性学习成果化

如何检测“研究性学习课题”的教学效果，考查学生在“研究性学习”中逐步养成的探索创新精神，这是高考命题的一个难点和亮点. 如 2008 年湖北卷、全国卷、广东卷都出现了研究性学习的试题，它们形式活泼，取材新颖，很好地考查了新课改研究性学习的新理念. 可以预测，今后高考将会更加注重倡导研究性学习，更加突显研究性学习的特点.

例 3 (**江苏卷**)将全体正整数排成三角形数阵:

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

11 12 13 14 15

……

根据以上的排列规律,第 $n(n\geqslant 3)$ 行从左向右第 3 个数是__________.

解析:本小题以杨辉三角为背景,考查考生归纳推理和会用等差数列求和公式的能力.前 $n-1$ 行共有正整数 $1+2\cdots+(n-1)$ 个,即 $\frac{n^2-n}{2}$ 个,

因此第 n 行第 3 个数是全体正整数中第 $\frac{n^2-n}{2}+3$ 个,即为 $\frac{n^2-n+6}{2}$

备考启迪:研究性学习的课题成果检测进入数学试卷,就把高考从单一的应试和机械重复书本知识、死记硬背中解脱出来.出现在多套高考卷中的有关研究性课题的试题,适时地体现出"高考指挥棒"的正面效应.

四、试题背景竞赛化

高考试题背景竞赛化,化及伴随着的对考生代数推理能力的考查的加强,这是今年高考试题中的一个比较明显的特征.这里有两个原因:一是近几年来,各类竞赛题相继降低了门槛,越来越贴近高考(全国高中数学联赛的一试接近于高考,但它比高考更侧重能力考查),联赛和高考自然会有不少相似之处;二是数学竞赛专家积极参与了高考命题工作.很明显,高考题过分偏爱不等式的解题与证题技巧就是高考试题竞赛化的一个突出表现.

例 4 (**湖南卷**)设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(如 $[2]=2,[\frac{5}{4}]=1$),对于给定的 $n\in\mathbf{N}^*$,定义 $C_n^x=\frac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$,$x\in[1,+\infty)$,则当 $x\in[\frac{3}{2},3)$ 时,函数 C_8^x 的值域是 ( )

A. $[\frac{16}{3},28)$　　B. $[\frac{16}{3},56]$

C. $(4,\frac{28}{3})\cup[28,56)$　　D. $(4,\frac{16}{3}]\cup(\frac{28}{3},28]$

解析:当 $x\in[\frac{3}{2},2)$ 时,$C_8^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$;

当 $x\to 2$ 时,$[x]=1$,所以 $C_8^x=4$;



当 $x\in[2,3)$ 时，$C_8^2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$；

当 $x\to3$ 时，$[x]=2$，所以 $C_8^x=\dfrac{8\times7}{3\times2}=\dfrac{28}{3}$.

故函数 C_8^x 的值域是 $(4,\dfrac{16}{3}]\cup(\dfrac{28}{3},28]$. 选 D.

备考启迪：目前高考的多数题型都能通过强化训练使考生熟练掌握，但为了遏制“题海涨潮”，高考命题在题型设计上做出了一系列有效的改革尝试，代数推理即为其中之一. 这类问题知识网络的交汇点多，涉及的思想方法丰富，提供的思维空间广阔.

五、知识衔接高等化

近几年高考试题中出现的新概念、新定义、新定理或新运算等等题型，就其试题背景而言，常与高等数学知识及思想方法相衔接，立意新颖，抽象程度高，注重考查考生的学习潜能和思维能力. 如 2008 年四川卷(21)、(22)以计算数学中用切线法(牛顿法)求解方程的近似根、高等数学中的重要极限 e 为背景，安徽卷以矩阵为背景等. 在高等数学与高中数学的知识交汇处命题，已成为近几年高考命题的一种趋向.

例 5 （**福建卷**）设 P 是一个数集，且至少含有两个数，若对任意 a、$b\in p$，都有 $a+b$、$a-b$、ab、$\dfrac{a}{b}\in p$（除数 $b\neq0$）则称 p 是一个数域，例如有理数集 Q 是数域有下列命题：

①数域必含有 0，1 两个数；

②整数集是数域；

③若有理数集 $Q\subseteq M$，则数集 M 必为数域；

④数域必为无限集.

其中正确的命题的序号是________.（把你认为正确的命题的序号都填上）

解析：读懂题意易得①④.

备考启迪：初等数学是高等数学的准备和基础，高等数学是初等数学的延伸. 其大致有三类：一类是题目本身带有明显高等数学知识的痕迹；二是问题的进一步引申及一般性探讨属高等数学研究范围；三是解题过程中体现了高等数学的观点或方法.

六、知识交叉凸显化

命题时从学科整体的高度考虑问题，注重知识之间的交叉、渗透和综合，以检验



考生能否形成一个有序的网络化知识体系，尤其是学科内的知识交汇非常明显，有计算、论证，题目新颖，区分度高，是近年来高考命题的重点和热点.

例 6 （**浙江卷**）如图 2，AB 是平面 α 的斜线段，A 为斜足，若点 P 在平面 α 内运动，使得 $\triangle ABP$ 的面积为定值，则动点 P 的轨迹是 （　　）

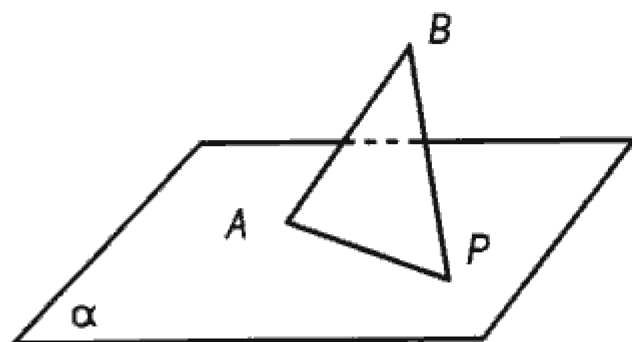


图 2

A. 圆　　　　B. 椭圆

C. 一条直线　　　　D. 两条平行直线

解析：本题是一道立体几何与解析几何的综合问题. 从本质上来看，点 P 就要求做到既在平面 α 内运动，又在运动过程中保持到直线 AB 的距离不变. 而 P 的轨迹是以 AB 为轴的圆柱，这样就要把它迁移到一个平面斜截一个圆柱表面的问题上来，所以得到的轨迹是椭圆. 故选 B.

备考启迪：知识的交叉、整合主要体现在综合考查平面向量的数量积、向量的夹角、方程、不等式、三角函数等多项知识；把集合、导数、不等式结合起来，并考查分类与整合的数学思想；涉及球、正四面体的基本性质，或者将立体几何与解析几何相结合；将二次函数与三角函数结合，并与数列、不等式、导数相融合等.

七、思想方法主角化

数学的思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象、概括与提炼. 今年的数学试题对数学思想和方法的考查贯穿于整卷之中，既注重全面，又突出重点，使试题处处有“思想”，而且还体现出层次性.

例 7 （**湖北卷**）观察下列等式：

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n,$$

$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$,

$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$,

……

$\sum_{i=1}^{n} i^k = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-2}n^{k-1} + a_{k-2}n^{k-2} + \cdots a_1 n + a_0$,

可以推测，当 $k \geqslant 2(k \in \mathbf{N}^*)$ 时，$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$，$a_k = \frac{1}{2}$，$a_{k-1}=$________，$a_{k-2}=$________.

解析：本题并不难，却很好的考查了观察、类比、猜想、归纳等思想方法，易得答案$\frac{k}{12}$，0.

备考启迪：数学思想方法是数学学习和研究的"核心"和"灵魂"，它并不是完全抽象的东西，而是以数学知识为载体的实实在在的内容，同时又是万千实例的提炼和总结，具有本质性、概括性和指导性.

八、传统内容双向化

高中数学新课程中，立体几何内容编排了两个版本：一个是沿袭传统的立体几何和知识基础和编排策略，通过演绎证明和逻辑推理建立几何体系；另一个是应用空间向量的方法处理几何问题，把几何图形的性质代数化，通过计算解决几何问题，这是改革立体几何研究方法的新的尝试. 在各省的试验中，两种方法都有采用，高考命题中为了支持课程改革，对于同一题目，考生都可以采用两种不同的方法求解，方法使用难易相当(哈哈，记否：向量思想上天入地 · 随想所欲?).

例 8 (**山东卷**)如图 3，已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ABC = 60°$，E、F 分别是 BC、PC 的中点.

(Ⅰ)证明：$AE \perp PD$；

(Ⅱ)若 H 为 PD 上的动点，EH 与平面 PAD 所成最大角的正切值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.

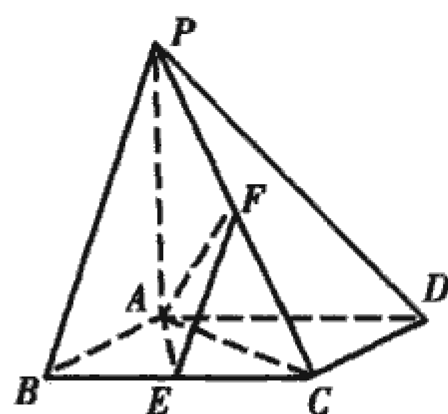


图 3

解析：(Ⅰ)证明略.

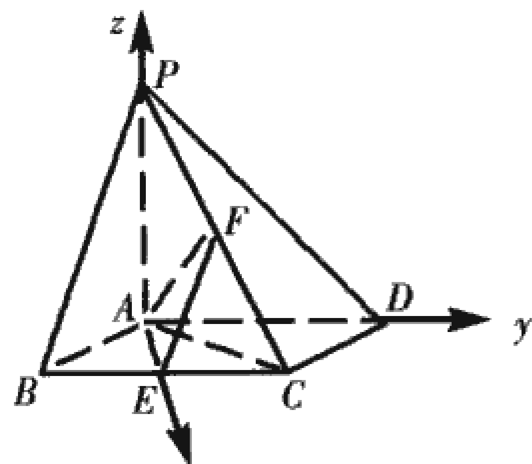
(Ⅱ)设 $AB=2$，H 为 PD 上任意一点，连接 AH，EH.

由(Ⅰ)知 $AE \perp$ 平面 PAD，则$\angle EHA$ 为 EH 与平面 PAD 所成的角.

在 Rt$\triangle EAH$ 中，$AE=\sqrt{3}$，∴当 AH 最短时，$\angle EHA$ 最大，即当 $AH \perp PD$ 时，

$\angle EHA$最大. 此时 $\tan\angle EHA=\frac{AE}{AH}=\frac{\sqrt{3}}{AH}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore AH=\sqrt{2}$. 又 $AD=2$，所以 $\angle ADH=45^\circ$，$PA=2$.

向量法：由（Ⅰ）知 AE、AD、AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，建立如图 4 所示的空间直角标系，又 E、F 分别为 BC、PC 的中点，所以 E、F 分别为 BC、PC 的中点，由 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，$F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，$\therefore \overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$.



设平面 AEF 的一法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$

则 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0$

$$\therefore\begin{cases}\sqrt{3}x_1=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+z_1=0.\end{cases}$$

取 $z_1=-1$，则 $\vec{m}=(0,2,-1)$，

$\because BD\perp AC$，$BD\perp PA$，$PA\cap AC=A$，所以 $BD\perp$平面 AFC，故$\overrightarrow{BD}$为平面 AFC 的一法向量.

又$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},3,0)$，

$$\therefore\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{BD}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{2\times3}{\sqrt{5}\times\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{15}}{5},$$

$\because$二面角 $E-AF-C$ 为锐角，故所求二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

（注：该问还可以用传统法来解，您不妨试一试）

备考启迪：2008 年理科 18 份试卷中，有 16 道立体几何题明显给出了空间坐标系的框架，只要有利用空间向量的意识，建立空间坐标系后就容易求解. 立体几何题大多可以用向量作工具解决，兼顾了（A）、（B）两种教材版本，而对函数、不等式、数列、圆锥曲线等问题大多需与导数相联系，促进了新老内容的衔接.

九、新课程思想理念化

在近几年高考命题中贯彻了新课程标准的理念，“多考一点想，少考一点算”，以能力立意的数学高考试题不断推出一些思路开阔、情境新颖脱俗的创新题型，它们



往往不是以知识为中心，而是以问题为中心，并不拘泥于具体的知识点，而是将数学知识、方法和原理融于一体.

例 9 **（江苏卷）**请先阅读：在等式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1(x\in\mathbf{R})$ 的两边求对 x 求导，得 $(\cos 2x)'=(2\cos^2 x-1)'$，由求导法则，得 $(-\sin 2x)\cdot 2=4\cos x\cdot(-\sin x)$，化简得等式 $\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$.

(1)利用上题的想法（或其他方法），结合等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots C_n^nx^n(x\in\mathbf{R}$，正整数 $n\geqslant 2)$，证明：$n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$.

(2)对于正整数 $n\geqslant 3$，求证：(i) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k=0$；(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kk^2C_n^k=0$；

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

证明：(1)在等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots C_n^nx^n$ 两边对 x 求导得

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+\cdots(n-1)C_n^{n-1}x^{n-2}+nC_n^nx^{n-1}$

移项得 $n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$　　(*)

(2)(i)在(*)式中，令 $x=1$，整理得 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k=0$，故 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k=0$

(ii)由(1)知 $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2\cdots+nC_n^nx^{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^kx^{k-1}$，

两边对 x 求导，得 $n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kx^{k-2}$，令 $x=-1$，

得 $\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k(-1)^{k-2}=0$，

即 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k(k^2-k)C_n^k=0$　　(1)

又由(i)知 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k=0$　　(2)

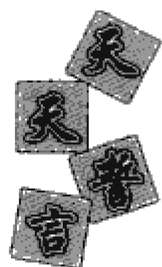
(1)+(2)得 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kk^2C_n^k=0$

(iii)将等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$ 两边在 $[0,1]$ 上对 x 积分，得

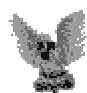
$\int_0^1(1+x)^ndx=\int_0^1(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)dx$

由微积分基本定理，得 $\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}|_0^1=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^kx^{k-+1})|_0^1$

$\therefore\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.



备考启迪：本题的设计是比较新颖的，要求考生既会编题，又会解题，这是用数学问题考查创新意识的典范. 又说：经常进行编题训练，有益于解题.



链接



主干知识突出化. 2008年高考数学试题，对于支撑高中数学学科的函数、不等式与导数、数列与递推数列、三角函数与向量、解析几何与立体几何、概率与统计等内容在数学试卷中占有很高的比例，并且达到了惊人的深度和高度，从而构成了数学试卷的主体.

知识应用生活化. 在近几年高考的数学命题中，将数学应用于实际问题的解决已成为一种趋势，例如从简单的贺卡分配问题到复杂的价格问题、人口住房问题、环境污染问题、存款按揭问题、医疗卫生问题、种植与成本问题、抢险救灾问题、比赛设置与结果预测问题等.

问题情境开放化. 命题的新颖是多年来高考的又一特点，每年都会推出一些新题，这种“新”表现为命题的立意新、情境新、设问方式新. 2008年数学试题通过多元化、多途径、开放式的设问背景，客观、全面地测试考生观察、试验、联想、猜测、归纳、类比、推广等思维活动的水平，命题时注重了试题的多样性，设计了大量研究型、探索型或开放型的题目，使试题处处有思想.

附录二

2008年高考数学创新题型评析

清华大学　上官玉玺

综观近几年高考数学试题，试卷在创新改革题型的"试验田"中迈出了较大步伐，相继推出了一些题意新颖、构思精巧，具有相当深度和明确导向的创新题型，使高考数学试卷充满青春活力，并随之加大了高考试题的难度．下面就2008年高考数学试卷中的创新题型进行评析，旨在探索题型规律，总结解题方法，助您一考成名！

一、情景创新——突出信息迁移

这类试题常以考生已有的知识为基础，给出一定容量的新信息，如新概念、新公式、新运算、新法则等，要求考生能运用这些知识做进一步的运算、推理和迁移，做到"化生为熟"，考查考生解决新问题的能力．其特点是内容新颖、推理简捷、即时运用．

1. **定义新概念**

在中学阶段没有出现过，而在高等数学中的基本概念都属于这种范畴，比如在历届高考试卷中就出现过矩阵基本概念、线性相关问题、"～"(集合A的一个等价关系)、集合的分拆等的试题．

例1　(**福建卷**)设P是一个数集，且至少含有两个数，若对任意$a,b\in P$都有$a+b,a-b,ab,\frac{a}{b}\in p$(除数$b\neq0$)，则称$p$是一个数域．例如有理数集Q是数域；数集$F=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in Q|\}$也是数域．有下列命题：

①整数集是数域；②若有理数集$Q\subseteq M$，则数集M必为数域；③数域必为无限集；④存在无穷多个数域．

其中正确的命题的序号是________．(把你认为正确的命题的序号都填上)

解析：整数集中取两个数2，3，由于$\frac{2}{3}\notin \mathbf{Z}$，所以①错；整数$Q\subseteq M$满足，$M$中有异于Q的一个无理数，显然此时$M$不符合定义，故②错，由定义知③、④符合定义．

评析：这里"数域"是一个全新的概念，要使问题得到圆满解决，必须真正领会"数域"的含义．

2. **规定新运算**

除了中学教材中定义的运算法则外，还可以自行定义一些运算关系来考查学生的理解能力，此类问题在集合中出现的几率最多，常定义的一些新运算例如："$M-P$"、"※""$\oplus$"等．

例 2 （**江西卷**）定义集合运算：$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A\times B$ 的所有元素之和为（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 6

解析：由新定义知，$A*B=\{0,2,4\}$，所以所有元素之和为 6.

评析：此题以集合为载体，通过新定义"*"，考查学生的阅读理解能力和对新知识的转化能力.

3. **设定新规则**

新规则要强于新运算，因为此类问题属于新概念与新运算的综合问题，既要理解透新规则中的新概念含义，又要会将新运算法则转化为以前学过的法则才能把问题解决.

例 3 （**北京卷**）对于每项均是正整数的数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$，定义变换 T_1，T_1 将数列 A 变换成数列 $T_1(A):n,a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1$.

对于每项均是非负整数的数列 $B:b_1,b_2,\cdots,b_m$，定义变换 T_2，T_2 将数列 B 各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列 $T_2(B)$；又定义 $S(B)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+\cdots+b_m^{\ 2}$.

设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列，令 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))(k=0,1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）如果数列 A_0 为 5,3,2，写出数列 A_1,A_2；

（Ⅱ）对于每项均是正整数的有穷数列 A，证明 $S(T_1(A))=S(A)$；

解析：（Ⅰ）A_0：5,3,2，$T_1(A_0)$：3,4,2,1，$A_1=T_2(T_1(A_0))$：4,3,2,1；$T_1(A_1)$：4,3,2,1,0；$A_2=T_2(T_1(A_1))$：4,3,2,1.

（Ⅱ）设每项均是正整数的有穷数列 A 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，

则 $T_1(A)$ 为 $n,a_1-1,a_2-1,\cdots,a_n-1$，

从而 $S(T_1(A))=2[n+2(a_1-1)+3(a_2-1)+\cdots+(n+1)(a_n-1)]+n^2+(a_1-1)^2+(a_2-1)^2+\cdots+(a_n-1)^2$.

又 $S(A)=2(a_1+2a_2+\cdots+na_n)+a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}$，

所以 $S(T_1(A))-S(A)=2[n-2-3-\cdots-(n+1)]+2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+n=-n(n+1)+n^2+n=0$，故 $S(T_1(A))=S(A)$.

评析："变换数列"是一个全新的概念，要使问题得到圆满的解决，必须深刻理解"变换数列"的新规则，然后借用数列的运算规则把问题转化. 解此类问题需要仔细阅读、理解题意和较强的转换能力，即把"变换数列"转化为普通的数列的能力.

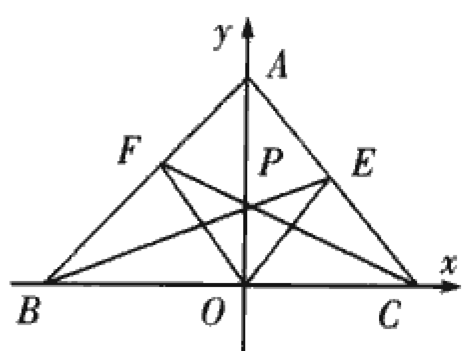
二、开放创新——注重探索规律

所谓开放探索型问题是相对于中学课本中有明确条件和明确结论的封闭型问题而言的. 这类试题的知识覆盖面较大，综合性较强，灵活选择方法的要求较高，具有相当的深度和难度. 它重在考查考生的分析、探索能力.

1. **完形填空型**

这类问题一般给出部分或全部结论，条件残缺或部分结论不完善，要答题者分析、探索缺少的条件或结论.

例 4 （江苏卷）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，设$\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，点 $P(0,P)$ 是线段 OA 上一点（异于端点），a、b、c、P 均为非零常数．直线 BP、CP 分别交 AC、AB 于点 E、F．一同学已正确地求出直线 OE 的方程$(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})x+(\frac{1}{P}-\frac{1}{a})y=0$ 为，请你完成直线 OF 的方程：(　　)$x+(\frac{1}{P}-\frac{1}{a})y=0$.



解析：通过画草图，由对称性可猜想$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$．事实上，由截距式可得直线 AB：$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，直线 CP：$\frac{x}{c}+\frac{y}{p}=1$，两式相减得$(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})x+(\frac{1}{p}-\frac{1}{a})y=0$，显然直线 AB 与 CP 的交点 F 满足此方程，又原点 O 也满足此方程，故为所求直线 OF 的方程.

评析：这是一道数学完形题，其特点是命题中部分结论明确，需要完善另一结论．解答此类问题，一般借用已给结论，通过对比、联想等手段，完善填空题所缺少的条件.

2．归纳猜想型

所谓归纳，是指通过特例的观察和综合去发现一般规律，它是发现和认识规律的重要手段，有些高考填空题往往可以通过特例寻觅出解题思路.

例 5 （北京卷）某校数学课外小组在坐标纸上，为学校的一块空地设计植树方案如下：第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k,y_k)$处，其中 $x_1=1$，$y_1=1$，当 $k\geqslant 2$ 时，

$$\begin{cases}x_k=x_{k-1}+1-5[T(\frac{k-1}{5})-T(\frac{k-2}{5})],\\ y_k=y_{k-1}+T(\frac{k-1}{5})-T(\frac{k-2}{5}).\end{cases}$$

$T(a)$表示非负实数 a 的整数部分，例如 $T(2.6)=2$，$T(0.2)=0$．按此方案，第 6 棵树种植点的坐标应为________；第 2008 棵树种植点的坐标应为________.

解析：设 $z=T(\frac{k-1}{5})-T(\frac{k-2}{5})$，则 $z(k)=z(k+5)$，且 $k=5m+1$，$m\in\mathbf{N}^*$，由已知可求得 $x_6=1$，$y_6=2$，所以有 $x_{2008}=x_3=3$，$y_{2008}=y_{2006}=1+(z_{2006})\times 401=402$（其中 401 为 $2008=5\times 401+3$ 模 5 带余算式中的商）.

$\therefore(x_{2008},y_{2008})=(3,402)$.

评析：阅读理解题考查的不仅是阅读理解能力、观察分析能力，还考查考生的归纳总结及灵活变形能力．只要考生有归纳的意识，并细心观察就能完成解答.

3．结论开放型

在近几年的高考数学试卷中，填空题已成为创新改革的“试验田”，其中出现了不少以能力立意为目标，以增大思维容量为特色，具有一定深度和明确导向的创新题型，其中多项选择题，即要求符合题意条件的结论按说明填写出来，其实也就是选择题的补充和拓展.

例6 （**江西卷**）如图1，一个正四棱柱形的密闭容器水平放置，其底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块，容器内盛有 a 升水时，水面恰好经过正四棱锥的顶点 P. 如果将容器倒置，水面也恰好过点 P（图2），有下列四个命题：

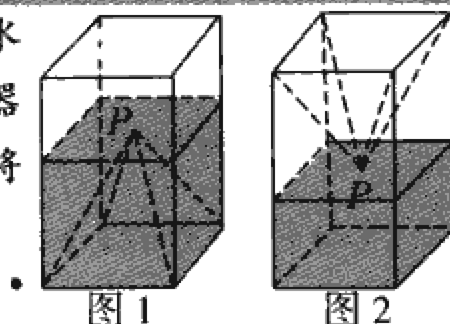


图1　　图2

A. 正四棱锥的高等于正四棱柱高的一半

B. 将容器侧面水平放置时，水面也恰好过点 P

C. 任意摆放该容器，当水面静止时，水面都恰好经过点 P

D. 若往容器内再注入 a 升水，则容器恰好能装满

其中真命题的代号是：________（写出所有真命题的代号）

解析：由于正四棱柱和正四棱锥均左右对称，所以将容器侧面水平放置时，水面也恰好过点 P.

将容器倒置，水面也恰好过点 P，所以上下两部分容器相等，所以真命题的代号为B、D.

评析：这是近年来才出现的新题型，属于选择题中的多选题，排除了"唯一性"中"猜"的成份，多个结论的开放加大了问题的难度，要求考生必须对每个备选结论逐一研究其真伪性，才能探索出正确答案. 对这类问题不能有一丝一毫的疏忽，错选一个全题皆错.

三、知识交叉——注入高考新活力

以知识网络的交汇点设计的高考解答题，运用知识之间的交叉、渗透和组合，是基础性与综合性的最佳表现形式. 随着学习的深入，知识积累的增多，各部分知识在各自发展中的纵向联系以及部分知识之间的横向联系日益密切，您应不失时机地构筑知识网络，并在各个阶段逐步扩充与完善.

例7 （**江苏卷**）请先阅读：在等式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$（$x\in\mathbf{R}$）的两边对 x 求导，得 $(\cos 2x)'=(2\cos^2 x-1)'$，由求导法则，得 $(-\sin 2x)\cdot 2=4\cos x\cdot(-\sin x)$，化简得等式 $\sin 2x=2\cos\cdot\sin x$.

（1）利用上题的想法（或其他方法），结合等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x\cdots+C_n{}^nx^n$（$x\in\mathbf{R}$，正整数 $n\geqslant 2$），证明：$n[(1+x)n-1-1]=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n{}^kx^{k-1}$.

（2）对于正整数 $n\geqslant 3$，求证：

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n{}^k=0$；

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kk^2C_n{}^k=0$；

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}C_n{}^k=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

证明：(1) 将等式 $(1+x)^n=C_n{}^0+C_n{}^1x+C_n{}^2x^2+\cdots+C_n{}^nx^n$ 两边求导，得

$n(1+x)^{n-1}=C_n{}^1+2C_n{}^2x+3C_n{}^3x^2+\cdots+nC_n{}^nx^{n-1}=n+\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n{}^kx^{k-1}$.

所以 $n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$.

(2)(i)、(iii)略.

(ii)对等式 $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}=\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$ 再一次求导,得 $n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kx^{k-2}$.

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kk^2C_n^k=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kk(k-1)C_n^k+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k=\sum\limits_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k(-1)^{k-2}-\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k(-1)^{k-1}=n(n-1)(1-1)^{n-2}-n(1-1)^{n-1}=0$.

评析:此考题是以三角函数的导数和恒等式为先导,综合考查组合数、二项式定理、导数等知识,这是典型的网络综合问题.解此类问题应注意从题目的众多条件和求解(求证)中提取相关信息,推动题目信息的延伸,归结到某个确定的数学关系,从而形成一个解题的行动序列.

本书引用了部分同志的文字资料,特表感谢.因无法取得联系,望您见书后来领取稿酬(13954711597).